常微分方程学习辅导与习题解答

Guidance Series for Mathematics Majors

数学类专业学习辅导丛书

朱思铭 编

常微分方程在微积分概念出现后即已出现，发展初期是对具体的常微分方程希望能用初等函数或超越函数表示其解，属于“求通解”时代。早期的常微分方程的求解热潮被刘维尔证明里卡蒂方程不存在一般的初等解而中断，加上柯西初值问题的提出，常微分方程从“求通解”转向“求定解”时代……



高等教育出版社

数学类专业学习辅导丛书

常微分方程学习辅导与习题解答

宋思铭 编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程学习辅导与习题解答/朱思铭编.—北京:高等教育出版社,2009.1

ISBN 978-7-04-024865-4

Ⅰ.常…　Ⅱ.朱…　Ⅲ.常微分方程-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O175.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第193778号

策划编辑 李　蕊　**责任编辑** 李华英　**封面设计** 赵　阳
责任绘图 朱　静　**版式设计** 王艳红　**责任校对** 殷　然
责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京市白帆印务有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com

开　　本	850×1168　1/32	**版　　次**	2009年1月第1版
印　　张	23.375	**印　　次**	2009年1月第1次印刷
字　　数	600 000	**定　　价**	36.10元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　24865-00

前　言

本书是常微分方程的教学参考书，为学习或讲授《常微分方程（第三版）》的师生补充教材以外的参考资料，并提供各种常微分方程模型，供常微分方程应用者和准备参加数学建模竞赛者参考。

早在联系修订《常微分方程（第三版）》时，高等教育出版社李蕊编辑就和我联系编写《常微分方程学习辅导与习题解答》一书，并曾寄来有关资料。修订完《常微分方程（第三版）》后，便趁着刚退休，已没有博士、硕士生教学任务的空闲时段开始编写了。因王寿松教授有学校督导工作，原约好和李艳会博士共同编写，因她熟悉计算机软件。后来她有更为迫切的任务，只好自己独立编写。经过一年多，终于在公式、符号和文字频繁转换的电脑输入的时间流逝中完成了。

希望这本常微分方程的学习、教学参考书能适合各种类型学生、教师的需要：对初学者给出学习要点或解题指导、测试练习及习题解答；对程度较高的学生可以作排疑解惑与补充提高；对讲课教师则介绍补充例题、考题及发展历史；同时对考研及参加数学建模竞赛的学生亦有所帮助；专注于常微分方程的实际应用及计算机具体应用于常微分方程的读者也能从中获益。

针对学生学习和教师备课的不同层次，书中将结合《常微分方程（第三版）》的各章，分成“内容提要”、“学习辅导”、“补充提高”和“习题与习题解答”四个部分。第二部分“学习辅导”适合初学者；第三部分“补充提高”供较深入学习之用。

在“补充提高”中与其他辅导书不同的是，增加了“应用实例”

和“历史与人物”两部分。常微分方程模型是数学模型的重要组成部分，有大量的常微分方程应用，而原教材无法深入涉及，这里将在“应用实例”中作较充分阐述，介绍实际应用的各种常微分方程模型。既可窥见常微分方程的应用全貌，也可供常微分方程应用者和参加大学生、研究生数学建模竞赛者参考。

常微分方程是微积分的有机组成部分，数学史上伟大数学家都在常微分方程发展史上留下印记。“历史与人物”让我们了解常微分方程和某些数学思想的发展历史及相关杰出人物的成就，并感受数学的丰富多彩。

在“习题与习题解答”中则有本书中给出的测试练习和补充习题的解答以及《常微分方程（第三版）》中全部习题的解答，有些还给出了多种解法。如何既给出习题解答又要避免学生抄袭是一个不易解决的问题，我们不采用习题选解的办法，而给出全部习题的解答。但除部分详细解答作为范例外，相当部分采用提示或略解，只给出关键部分，中间过程需要自己推导、补充和说明。这既避免被抄袭，又节省篇幅。

除按原教材各章内容依顺序编写以方便学习、教学外，还根据需要编写了“期中、期末及硕士研究生入学试题”和“数学软件在常微分方程中的应用”两章。在后一章中讨论了常微分方程的计算机辅助分析，并按使用 Mathematica、MATLAB、Maple 和 SCILAB 软件分别给出某些常微分方程例题及习题的有关程序。这是对原教材附录Ⅱ的补充。特别推荐读者使用新介绍的科学计算自由软件 SCILAB，包括其较有特色的 SCILAB Demos。

最后，在附录中列出科学计算自由软件 SCILAB 的使用和绘制轨线图貌的改进；解题和建模常用的部分公式，包括函数、微分、积分公式。并对各章排疑解惑、应用例题、历史与人物和软件程序的细目给出索引，以方便查阅。

本书的编写曾参考了众多的常微分方程教材、参考书及习题集与习题解答，特别是李尚廉编、王高雄校订的油印本《常微分方

程习题课参考资料》(1983 年)。同时在“期中、期末及硕士研究生入学试题”中引用了大量中山大学常微分方程的有关试题。容志新、李艳会参加了第十章和附录Ⅰ的编写。武汉大学博士生导师曾宪武教授和高等教育出版社的同志详细审阅了本书。我的已毕业的博士研究生们还分工校阅了初稿。审阅和校阅者们提出了大量修改意见,改正了错漏。在这里,对支持本书出版的有关同志特别是武汉大学的曾宪武教授、中山大学的王寿松、王其如、赵育林、姜正禄教授及高等教育出版社的编辑表示衷心的感谢!

本书希望能对常微分方程和数学模型的学习、教学及应用有所帮助。因编写较仓促,错漏之处在所难免,望广大读者提出宝贵意见。

朱思铭

中山大学康乐园

2008 年 6 月

使用说明

1. 本书前八章与原教材七章及附录1(边值问题)的内容对应。后两章为试题和软件。附录为学习时供查阅的资料。

2. 前八章每章分为“内容提要”、“学习辅导”、“补充提高”和“习题与习题解答”四个部分。“内容提要”给出了必须掌握的概念、定理和公式。

3. “学习辅导”供初学者、自学者或复习者使用,内含学习要点或解题指导、例题选讲、测试练习。解题指导列出解题时应考虑的思路;例题选讲为原教材的补充;测试练习作为学习后的自我测验,往往不必全解。

4. “补充提高”供学生深入学习或教学者参考,含补充习题、排疑解惑、应用实例和历史与人物。“补充习题”既含测试练习中未要求全解的习题,也补充了较难或书中未涉及的方法的习题;“排疑解惑”解答了学习时可能的疑惑并对有关内容作了补充,包括书中未涉及的新方法;“应用实例”包含应用习题和应用模型,模型仅作指导性描述;“历史与人物”供读者了解常微分方程的历史发展及相关的历史人物,并介绍了一些近代典故。

5. “习题与习题解答”含本章中给出的测试练习和补充习题的解答及《常微分方程(第三版)》中全部习题的解答。对《常微分方程(第三版)》中同步习题附上题目。解答中有些还给出多种方法和注释。除部分详细解答外,往往省略部分中间推导过程,具体解答时由学习者补全。

6. 第九章“期中、期末及硕士研究生入学试题”给出了几套常微分方程期中、期末试题和硕士研究生入学考试的试题及其解答。

其中半套题是指常微分方程不作为专科而作为综合考试的一部分和其他科目合考的题目，其考试时间和分数约占一半。除完整的试题作套题、半套题外还选列了各院校出的较好的常微分方程试题作为散题，并附以解答。

7. 第十章“数学软件在常微分方程中的应用”含常微分方程的计算机辅助分析论述和 Mathematica、MATLAB、Maple 和 SCILAB 软件程序两部分。其常微分方程例题及习题的各软件程序基本不重复。

8. 附录中则列出科学计算自由软件 SCILAB 的使用和绘制轨线图貌的改进及解题和建模常用的部分函数、微分、积分公式。并有各章排疑解惑、应用例题和历史与人物的细目索引供查阅。

9. 书中引用本书部分时直接用章节号标明；引用教材《常微分方程(第三版)》时则用“书”及章节号；引用参考文献时只列明“文”与参考文献编号及章节号，均用数字表示。对某些较难的或较特别的(如应用模型或软件等)用星号“*”标注。

10. 书中例题、测试题及补充题多取自众多参考文献，如[文 1]~[文 8]及[文 26]，而历史与人物中的材料则多取自[文 36]~[文 38]及[文 17]，均不一一列注。



目　　录

第一章　绪　　论

§1.1　内容提要

§1.1.1　常微分方程模型

(1) ***RLC* 电路**　包含电阻 R、电感 L、电容 C 及电源的电路称为 RLC 电路. 电流 I 经过电阻 R、电感 L、电容 C 的电压降分别为 RI、$L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ 和 $\dfrac{Q}{C}$, Q 为电量, E, $e(t)$ 为电源电压, $I=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$. 应用基尔霍夫(Kirchhoff)第二定律(在闭合回路中,所有支路上的电压的代数和等于零)可列出 RLC 电路的微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{I}{LC}=\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t},$$

初值条件为 $I(t_0)=I_0$(二阶方程增加 $I'(t_m)=0$).

(2) **数学摆**　数学摆是系于一根长度为 l 的线上而质量为 m 的质点 M,在重力的作用下,它在垂直于地面的平面上沿圆周运动. 摆与铅垂线所成的角为 φ, M 沿圆周的切向速度为 v, $v=l\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$. 摆的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0.$$

微小振动(φ 较小时,可用 φ 代替 $\sin\varphi$):

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

存在阻力时(阻力系数为μ):

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

有强迫力 $F(t)$ 时:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l}\varphi = \frac{1}{ml}F(t).$$

摆的初始状态:

$$\text{当 } t = 0 \text{ 时}, \varphi = \varphi_0, \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0,$$

φ_0 代表摆的初始位置,ω_0 代表摆的初始角速度.

(3) **人口模型** 马尔萨斯(Malthus)模型:基本假设是,在人口自然增长的过程中,净相对增长率(单位时间内人口的净增长数与人口总数 $N(t)$ 之比)是常数,记此常数为 r(生命系数)

$$\frac{dN}{dt} = rN.$$

logistic 模型:荷兰生物学家 Verhulst 引入常数 N_m(环境最大容纳量)表示自然资源和环境条件所能容纳的最大人口数,并假设净相对增长率为 $r\left(1 - \frac{N}{N_m}\right)$,即净相对增长率随 $N(t)$ 的增加而减少,当 $N(t) \to N_m$ 时,净增长率 $\to 0$.

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{N_m}\right)N.$$

初值条件为 $t = t_0$ 时,$N(t) = N_0$.

(4) **传染病模型** 假设传染病传播期间其地区总人数 n 不变. 开始时病人数为x_0, 在时刻 t 的健康人数为 $y(t)$,病人数为 $x(t)$,k 为传染系数.

SI 模型:易感染者(Susceptible)和已感染者(Infective)模型,

$$\frac{dx}{dt} = kx(n - x), \quad x(0) = x_0.$$

SIS 模型：治愈率为 μ 时，其平均传染期为 $\frac{1}{\mu}$，接触数 $\sigma = \frac{k}{\mu}$，

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = ky(t)x(t) - \mu x(t), \quad x(0) = x_0.$$

SIR 模型：病人治愈后不会再被感染，称为移出者(Removed)。治愈率 l，

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kxy - lx, & x(0) = x_0, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -kxy, & y(0) = y_0 = n - x_0. \end{cases}$$

(5) **两生物种群生态模型**　甲、乙两种群的数量分别记为 x, y.

沃尔泰拉(Volterra)模型：分竞争、共生、捕食与被捕食等类型，

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(a + bx + cy), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y(d + ex + fy). \end{cases}$$

一般两种群竞争系统：$M(x,y)$ 与 $N(x,y)$ 为相对于 x 与 y 的增长率，

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = M(x,y)x, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = N(x,y)y. \end{cases}$$

(6) **洛伦茨(Lorenz)方程**

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(y - x), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = cx - y - xz, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy - bz. \end{cases}$$

气象学家洛伦茨由大气对流现象模型简化，$a=10,b=\frac{8}{3},c=28$ 为参数. 被称为混沌(chaos) 现象第一例.

*(7) **化学动力学模型** 化学反应体系，内部包含三种化学成分 A,B 和 x. A,B 是反应物，x 为中间产物，A,B,x 分别代表 A 类、B 类和 x 类的分子数.

Schlogt 单分子化学动力学模型：体系的状态仅由单个变量 x 来表征，

$$\frac{dx}{dt}=-k_3x^3+k_2Ax^2-k_1x+k_0B.$$

双分子化学动力学模型：有两个中间变量，

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=k_1Ax-k_2xy,\\ \frac{dy}{dt}=k_2xy-k_3y.\end{cases}$$

三分子化学动力学模型：开放的体系中进行着一系列化学反应，

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=A-(B+1)x+x^2y,\\ \frac{dy}{dt}=Bx-x^2y.\end{cases}$$

*(8) **力学系统中的常微分方程模型** 有完整约束的力学系统，可以通过引进广义坐标$(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)$ 解除约束，用一个拉格朗日函数 $L(q_1,q_2,\cdots,q_i)$ 刻画系统，归结为拉格朗日方程$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$. 引进广义速度$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$，用广义动量$\boldsymbol{p}=\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}$代表广义速度$\boldsymbol{v}$，再通过拉格朗日变换 $H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=\dot{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{p}-L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$，便得到等价于拉格朗日方程的哈密顿正则方程

$$\dot{\boldsymbol{p}}=-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}},\quad \dot{\boldsymbol{q}}=-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}.$$

§1.1.2 常微分方程基本概念

微分方程 联系自变量、未知函数及其导数的关系式.

实值微分方程 自变量、未知函数均为实值的微分方程.

复值微分方程 未知函数取复值或自变量、未知函数均取复值的微分方程.

常微分方程 只有一个自变量的微分方程.

偏微分方程 有两个或两个以上自变量的微分方程.

一阶微分方程 微分方程中未知函数的导数仅为一阶.

n 阶微分方程 微分方程中未知函数的导数最高为 n 阶,一般形式为

$$F\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right)=0. \quad ①$$

n 阶线性微分方程 n 阶微分方程 ① 的左端为 $y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ 的一次有理整式,一般形式为

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}+a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_n(x)y=f(x), \quad ②$$

其中 $a_1(x),\cdots,a_n(x),f(x)$ 为 x 的函数.

非线性微分方程 不是线性微分方程的微分方程.

(显式)解 使微分方程 ① 变为恒等式的函数 $y=\varphi(x)$ 称为方程的解.

隐式解 若微分方程 ① 的解 $y=\varphi(x)$ 由关系式 $\Phi(x,y)=0$ 决定,称 $\Phi(x,y)=0$ 为微分方程 ① 的隐式解.

通解 n 阶微分方程 ① 的含有 n 个独立的任意积分常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的解

$$y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n).$$

隐式通解(通积分) 由含有 n 个独立的任意积分常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的关系式 $\Phi(x,y,c_1,c_2,\cdots,c_n)=0$ 决定的 n 阶微分方程

① 的解.

定解条件 为确定微分方程的一个特定的解需附加的条件.

定解问题 求微分方程满足定解条件的解的问题.

初值条件 n 阶微分方程 ① 的初值条件为

$$当\ x = x_0\ 时, y = y_0, \frac{dy}{dx} = y_0^{(1)}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = y_0^{(n-1)}.$$

或写为

$$y(x_0) = y_0, \frac{dy(x_0)}{dx} = y_0^{(1)}, \cdots, \frac{d^{n-1}y(x_0)}{dx^{n-1}} = y_0^{(n-1)}.$$

初值问题 当定解条件为初值条件时的定解问题.

特解 满足定解问题的解.

积分曲线 一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{③}$$

的解 $y = \varphi(x)$ 在 Oxy 平面上表示为一条曲线,称为微分方程 ③ 的积分曲线. 曲线上的点的斜率$\frac{dy}{dx}$值为$f(x, y)$.

向量场 用一阶微分方程 ③ 的右端函数$f(x, y)$ 在 Oxy 平面某区域 D 上定义过各点的小线段(线素)的斜率方向,称这样的区域 D 为方程 ③ 所定义的向量场(方向场,线素场). 通过向量场可以判断微分方程的解的走向.

等倾斜线 向量场中方向相同的曲线$f(x, y) = k$ 称为等倾斜线或等斜线.

微分方程组 n 阶微分方程

$$z^{(n)} = g(t, z, z', \cdots, z^{(n-1)})$$

可通过变换

$$y_1 = z, y_2 = z', \cdots, y_n = z^{(n-1)}$$

化为一阶方程组

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \cdots, y_n), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

或写成向量形式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}),$$

其中 $\boldsymbol{y}\in D\subset\mathbf{R}^n$.

驻定微分方程组 右端不含自变量 t 的微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}). \tag{④}$$

动力系统 对 n 维空间某区域 $D\subset\mathbf{R}^n$,D 到 D 的含参数 t 的同胚映射(变换)$\boldsymbol{\Phi}_t(\boldsymbol{y})$,如满足恒同性 $\boldsymbol{\Phi}_0(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}$ 和可加性 $\boldsymbol{\Phi}_{t_1+t_2}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\Phi}_{t_1}(\boldsymbol{\Phi}_{t_2}(\boldsymbol{y}))=\boldsymbol{\Phi}_{t_2}(\boldsymbol{\Phi}_{t_1}(\boldsymbol{y}))$,则称映射 $\boldsymbol{\Phi}_t(\boldsymbol{y})$ 为 D 上的动力系统.

微分方程所定义的动力系统 由驻定微分方程组过 $\boldsymbol{y}\in D\subset\mathbf{R}^n$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{y})$ 可定义动力系统 $\boldsymbol{\Phi}_t(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{y})$,称为微分方程所定义的动力系统.

相空间 不含自变量,仅由未知函数组成的空间.

轨线 微分方程的解在相空间中的轨迹,即积分曲线在相空间中的投影.驻定微分方程的解在相空间中的轨线互不相交.

奇点(平衡解、驻定解) 驻定微分方程组④右端函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ 的满足 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})=\mathbf{0}$ 的解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^*$ 称为方程组的平衡解或驻定解,是方程组在相空间中的奇点.

水平、垂直等倾斜线 平面一阶驻定微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,y),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=g(x,y)\end{cases}$$

等价于一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{g(x,y)}{f(x,y)}(f(x,y)\neq 0)\ \text{或}\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{f(x,y)}{g(x,y)}(g(x,y)\neq 0).$$

在相平面 Oxy 上的等倾斜线 $g(x,y)=kf(x,y)$ 中 $k=0$ 即 $g(x,y)=0$ 时的曲线为水平等倾斜线;$k=\infty$ 即 $f(x,y)=0$ 时的曲线为

垂直等倾斜线. 水平、垂直等倾斜线的交点为奇点.

雅可比矩阵 n 个变元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 m 个函数

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

的雅可比矩阵定义为

$$\frac{D(y_1, y_2, \cdots, y_m)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

雅可比行列式 n 个变元的 n 个函数的雅可比矩阵对应的行列式.

函数相关、函数无关 设函数 $y_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)(i = 1, 2, \cdots, m)$ 及其一阶偏导数在某区域 $D \subset \mathbf{R}^n$ 上连续. 如果在 D 内 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 中的一个函数能表成其余函数的函数,则称它们函数相关;如果它们在 D 内任何点的邻域均不是函数相关,则称它们函数无关. 如果雅可比矩阵在 D 内任何点的秩均小于 m,则 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 函数相关;如果其秩均等于 m,则 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 函数无关. 当 $n = m$ 时雅可比行列式不等于零则函数无关.

§1.2 学习辅导

§1.2.1 学习要点

(1) 熟悉微分方程的类型,包括阶数、线性或非线性、高阶方程或方程组、齐次或非齐次、驻定或非驻定、通解与特解.

(2) 学会验证微分方程的解. 要熟悉各种函数特别是三角函数、指数函数的微分.

(3) 了解如何应用物理、力学知识建立微分方程.

(4) 能够应用斜率、切线定义建立满足条件的曲线的微分

方程.

(5) 对一阶微分方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$能够在Oxy平面区域内网格点上画出微分方程的向量场(方向场),可以通过等倾斜线$f(x,y)=k$画出积分曲线的图貌(大致走向).如果存在且容易计算时能够计算微分方程的特殊解、确定积分曲线的极值点和拐点.

§1.2.2 例题选讲

例1 验证函数$y=x-e^x$是微分方程$y'-y=1-x$的解.

解 将函数$y=x-e^x$代入微分方程$y'-y=1-x$左端,得$(x-e^x)'-(x-e^x)=1-x$.即函数$y=x-e^x$使微分方程$y'-y=1-x$成为恒等式,故是微分方程的解.

例2 试从$y=ce^{-x}$中消去常数c,建立微分方程.

解 要消去一个常数c,需要含c的两个方程.将$y=ce^{-x}$对x微分,得$y'=-ce^{-x}$.于是可消去c:$y'=-ce^{-x}=-y$,即$y'+y=0$,此即为所求的不含常数c的关系式——微分方程.

例3 建立曲线切点斜率等于切线横截距的曲线的微分方程(设斜率不为零).

解 曲线切点(x,y)处斜率为$\frac{dy}{dx}$,切线方程为

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x),$$

其中(X,Y)为切线上的点.因此当$\frac{dy}{dx}\neq 0$时曲线上的点(x,y)的切线横截距为$X=x-y\Big/\frac{dy}{dx}$.依题意曲线的微分方程为$\frac{dy}{dx}=x-y\Big/\frac{dy}{dx}$,即

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-x\frac{dy}{dx}+y=0.$$

例 4　试画出微分方程$\frac{dy}{dx}=y-y^2$在区域$[0,1]\times[-1,3]$上的积分曲线的图貌.

解　由方程右端可解得两个常数解$y=0, y=1$. 当$y>1$时$\frac{dy}{dx}<0$, y减小；当$0<y<1$时$\frac{dy}{dx}>0$, y增加；当$y<0$时$\frac{dy}{dx}<0$, y减小. 在区域$[0,1]\times[-1,3]$上可在网格点上画出微分方程的切线方向段得到方程的向量场，并在其上画出特殊积分曲线$y=0, y=1(0\leqslant x\leqslant 1)$及一般积分曲线的图貌. 如图 1.1 所示.

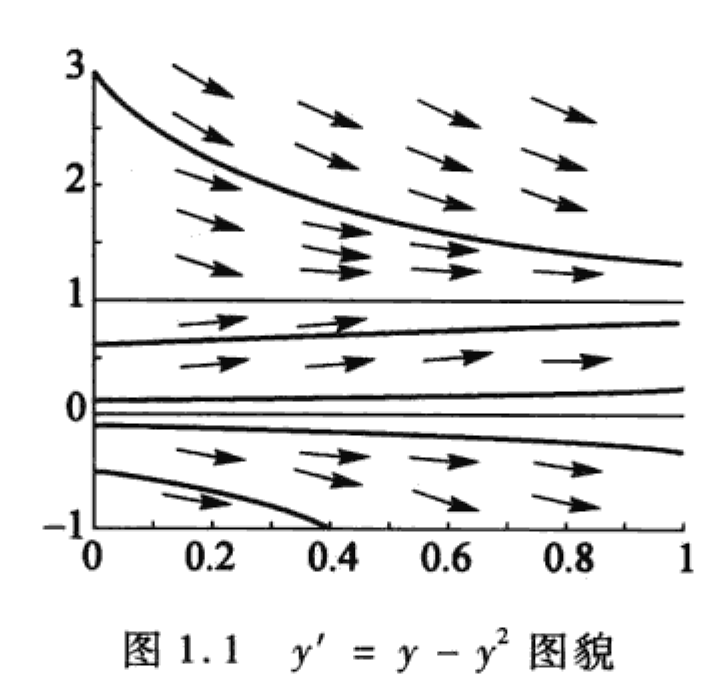


图 1.1　$y'=y-y^2$ 图貌

* **例 5**　试用数学软件画出例 4 的向量场.

解　见图 1.2，程序参看第十章[§10.2, §10.3, §10.4, §10.5].

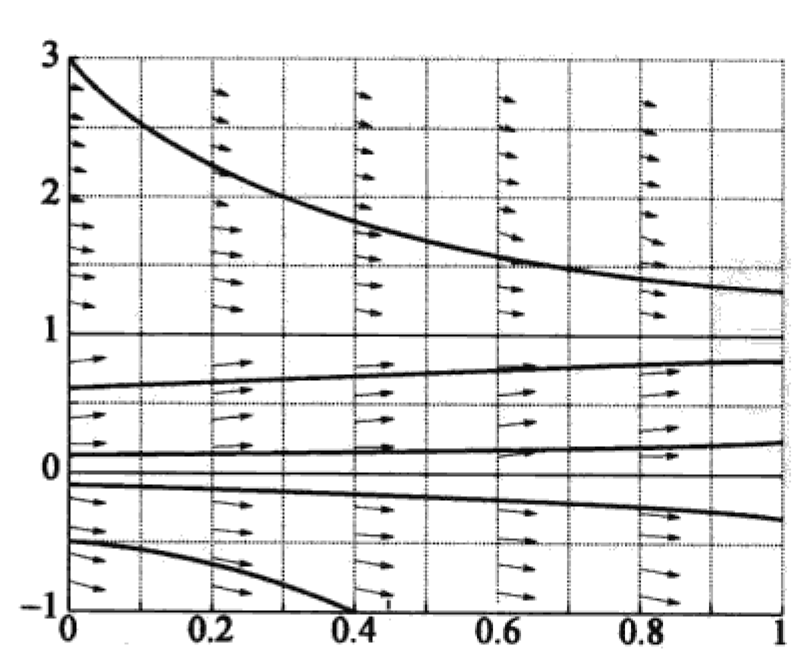


图 1.2　计算机软件画向量场

§1.2.3 测试练习

1. 试判断下列微分方程的自变量、因变量及其类型，包括阶数、线性或非线性、一阶或高阶、方程或方程组、齐次或非齐次、驻定或非驻定.

(1) $\frac{dy}{dx} = 7y - 3$；

(2) $\frac{d^2r}{dy^2} + y\left(\frac{dr}{dy}\right)^2 = 1$；

(3) $\frac{d^3x}{dy^3} + y\frac{d^2x}{dy^2} + \frac{dx}{dy} = \sin y$；

(4) $\frac{dx}{dt} = 3 + x + y^2, \frac{dy}{dt} = 1 - y + x^2$.

2. 验证或确定下列函数是否是相应微分方程的解，并确定解的区间.

(1) $x(t) = 2e^{-t} + te^{-t}, x'' + 2x' + x = 0$；

(2) $y(x) = (x + c)^2$ 及 $y(x) = 0, y'^2 - 4y = 0$；

(3) $y(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, y' + 2xy^2 = 0$.

3. 熟悉下列常用的函数的导数.

$c, x, x^\mu, e^x, a^x, \ln x, \log_a x, \sin x, \cos x,$

$\tan x, \cot x, \arcsin x, \arccos x, \arctan x, \text{arccot}\, x$.

§1.3 补充提高

§1.3.1 补充习题

1. 验证或确定下列函数是否是相应微分方程的解.

(1) $y = \ln x, xy'' + y' = 0$；

(2) $y = e^{mx}, y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$.

2. 试从下列方程消去参数使之成为微分方程.

(1) $y = mx$;

(2) $y = a\sin(t + b)$;

(3) $y = a\cos\alpha x + b\sin\alpha x$($\alpha$ 为固定常数);

(4) $y = ae^{3x} + be^{x} + c$;

(5) $x^2y^3 + x^3y^5 = c$;

(6) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

3. 建立其轴与 y 轴平行,同时又与 $y = 0$,$y = x$ 两直线相切的抛物线的微分方程.

4. 对下列方程画出等倾斜线,以从图上了解方程的解.

(1) $y' = 1 + xy$;

(2) $y(y' + x) = 1$.

§1.3.2 排疑解惑

(1) **常微分方程的来源** 常微分方程一般来自三个方面,一是几何问题,二是物理、生物、社会等实际问题,三是从含有变量和任意常数的多个基本的(代数)关系式推出,这实质上也是几何(曲线族)问题,关系式又称为原始式或积分式,消去 n 个(独立)常数一般变成 n 阶微分方程,参见[§1.3.1 - 2].

(2) **常微分方程的基础** 常微分方程是从微积分中自然发展起来的,有了微分才能提出微分方程,而通过积分求解微分方程. 因此,常微分方程的基础是微积分,学习常微分方程首先要熟悉各类函数的微分和积分.

(3) **常微分方程对其他学科的影响** 微分方程(包括常微分方程)首先是了解物理科学的基础,因物理规律往往用微分方程表示. 微分方程是高等分析中大部分思想和理论的根源,由解(常)微分方程引出了幂级数、傅里叶变换、特殊函数、复分析、勒贝格积分、度量空间、算子理论、泛函分析等. 由常微分方程还逐渐发展出积分方程、泛函微分方程、随机微分方程、时标微分方程、分

数微分方程等新分支.经典力学、控制理论、人口理论、电路网络理论和种群生态学等也是以常微分方程为基础发展起来的."微分方程是自然科学数学观的基础"、"常微分方程理论是数学科学的基本工具之一"(见[文22]).

(4) **常微分方程与动力系统** 动力系统开始是作为常微分方程的一个分支发展起来的,是常微分方程的推广.因动力系统的定义对象更为广泛,且可运用拓扑、泛函、复分析等各种工具,后来得到更迅速的发展.现在,往往反过来,将常微分方程作为动力系统的一个分支,把常微分方程作为动力系统的一种:由常微分方程定义的动力系统.

(5) **数学模型** 常微分方程模型是数学模型中不可或缺的、重要的一个分支.作为数学模型,需要讨论模型的建立、参数的确定、模型的求解和讨论以及模型的推广.常微分方程教程主要考虑常微分方程的求解和分析;模型的建立涉及与实际问题有关的物理、生物等学科知识;参数的确定往往与数据处理有关;模型的讨论和推广则由实际问题决定.虽然,对常微分方程模型,常微分方程的求解和分析是关键,但要结合实际问题综合考虑.另一方面,学习常微分方程模型时除了了解模型的建立外还要同时学习常微分方程的解题、分析方法,以便能举一反三,不要纠缠在细枝末节中.

(6) **常微分方程与计算机** 计算机在常微分方程的发展中曾起过重要作用,如在[§6.3.4 -(8)、(10)]中所述,洛伦茨吸引子的发现便是通过计算机数值模拟发现的,日本吸引子也应用了模拟计算机.孤立子虽然早已发现,但只在1965年通过计算机数值模拟等离子体的非线性作用时再次发现才开始重视,并取得重大成果,从而掀起研究热潮.计算机强大的数值模拟和数据可视化功能使计算机在常微分方程的研究、学习中起着越来越大的作用.

可以使用已成熟的通用的计算机数学软件研究、学习常微分

方程. 如在[书附录 Ⅱ]中介绍的三种数学软件 Mathematica、MATLAB、Maple,或在[§10.5及附录 Ⅰ]中介绍的科学计算自由软件 SCILAB,以及其他较为简易的数学软件如 MathCAD 等. 上述数学软件同样可在常微分方程教学时应用. 专用的常微分方程模型仿真软件商品化的有 DYNAMO,它是以水流为假设对象,提供流量、流速、水库等各种函数,可直接由实际关系建立模型,由系统软件编译为常微分方程求解. DYNAMO 适合未学过常微分方程的人使用. 在网上也有人发布有关常微分方程数值求解、定性分析等一些专用软件,但未普及.

(7) **常微分方程的学习** 有些人认为"常微分方程这一学科(只)是求解的技巧和提示的汇集,并说它之所以重要是因为它能解决物理学、工程学等方面的问题."实际上,常微分方程这一学科是统一、完整而连贯的,当代数学大师、菲尔兹数学奖获得者斯梅尔(S. Smale)和 V. I. Arnold 都出版过用现代观点阐述的常微分方程教材(见[文 21,22]). 斯梅尔认为"常微分方程对其他学科领域的重要性在于它能启发、统一并推动这些学科领域",而且"了解微分方程与其他学科之间是如何联系的,对于学生及数学工作者来说,是获得洞察和启示的一种主要源泉"(见[文 21 序言]). 这些,正是我们学习常微分方程应该遵循的方法. 除了学习常微分方程基本理论,掌握求解技巧,学习如何建立模型、解决实际问题外,还要体会常微分方程如何启发、统一并推动其他学科领域(见[§1.3.2 - (3)]),了解微分方程与其他学科之间是如何联系. 从而得到启示,提高洞察力. 在本书的历史与人物中,还介绍了常微分方程的一些近代发展花絮,如[§6.3.4 - (7)、(8)、(9)、(10)],让我们了解科学概念、历史是如何发现、发展的.

§1.3.3 应用实例

(1) **几何图形构成的微分方程** 平面曲线上点的切线的斜率可用导数表示,从而可从曲线切线关系中建立微分方程.

在直角坐标系(x,y)中,曲线$y=y(x)$上任意点(x,y),如图1.3.

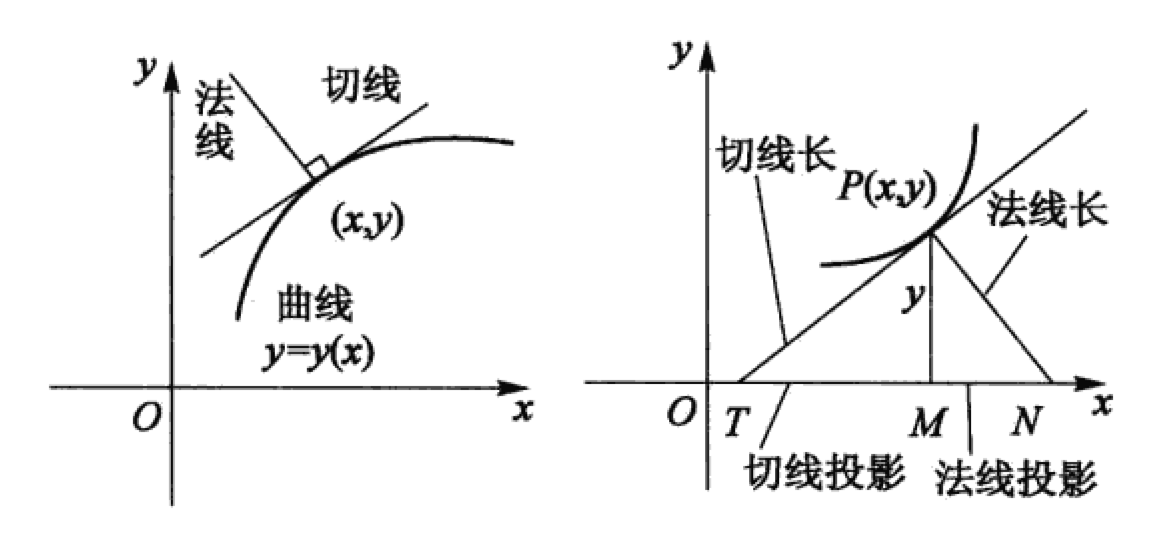


图 1.3 直角坐标系

点(x,y)的切线斜率为y',切线方程:

$$Y-y=y'(X-x);$$

点(x,y)的法线斜率为$-\frac{1}{y'}$,法线方程:$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$;

切线投影 TM:$\left|\frac{y}{y'}\right|$;法线投影 MN:$|yy'|$;

切线在x轴和y轴上的截距:$x-\frac{y}{y'}, y-xy'$;

法线在x轴和y轴上的截距:$x+yy', y+\frac{x}{y'}$;

切线长 PT:$\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2}$;

法线长 PN:$|y|\sqrt{1+y'^2}$;

曲线的弧长:$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$,$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+y'^2}$,

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x;$$

曲率半径:$R=\left|\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\right|$;

面积要素:$y\mathrm{d}x$ 和 $x\mathrm{d}y$.

在极坐标系(r,θ)中$(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$，曲线$r = r(\theta)$上任意点$(r,\theta)$，如图1.4.

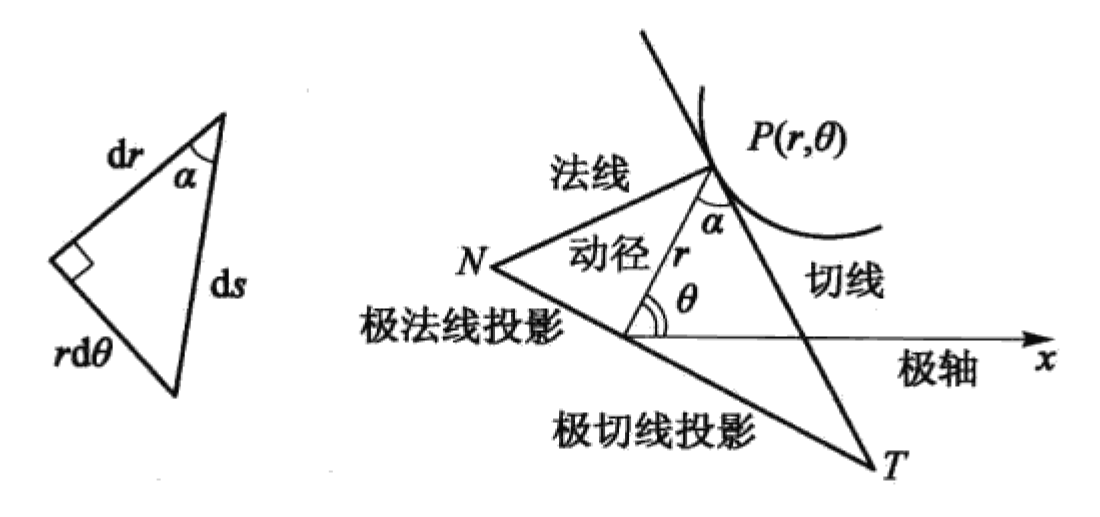


图1.4　极坐标系

动径与向极轴方向引出的切线夹角α：

$$\tan\alpha = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r};$$

曲线的弧长：$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}r)^2 + r^2(\mathrm{d}\theta)^2}$；

面积要素：$\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta$；

极点至切线的垂直线长：$|r\sin\alpha| = r^2\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right|$；

极切线投影OT：$|r\tan\alpha| = r^2\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\right|$；

极法线投影ON：$|r\cot\alpha| = \left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right|$.

等角曲线：一曲线K与某曲线族中各曲线相交成一角度α时，称K为此曲线族的等角曲线，或α等角曲线. α等角曲线$y = y(x)$上各点(x,y)的斜率为$y' = \tan\theta$时，对应曲线族曲线斜率为$\tan(\theta - \alpha)$. 原曲线族曲线方程为$f(x,y,y') = 0$时等角曲线K的方程为$f\left(x,y,\frac{y' - \tan\alpha}{1 + y'\tan\alpha}\right) = 0$，当正交即$\alpha = \frac{\pi}{2}$时为

$f\left(x,y,-\dfrac{1}{y'}\right)=0$. 对于极坐标方程 $g\left(r,\theta,\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)=0$,$K$ 的方程为 $g\left(r,\theta,\dfrac{r\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}+r^2\tan\theta}{r-\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\tan\theta}\right)=0$,当正交时为 $g\left(r,\theta,\dfrac{-r^2}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}}\right)=0$. 如图 1.5.

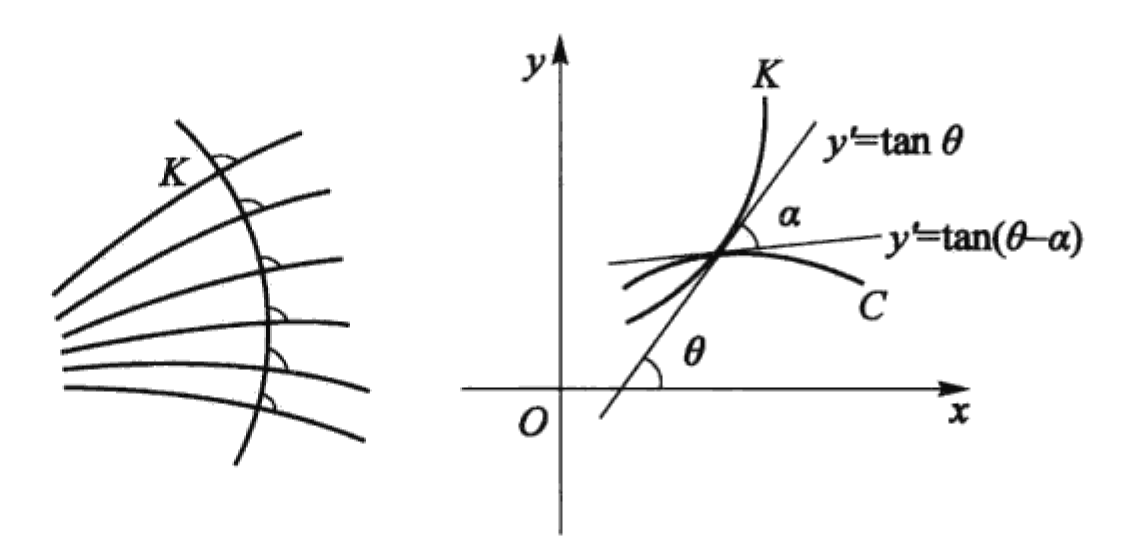


图 1.5　等角曲线

(2) **物理现象产生的微分方程**　物理现象往往用微分方程描述. 如牛顿运动定律中的速度、加速度和力的平衡;热力学中的热量变化;结构理论中梁的弯曲;流体中的流速与流量变化;电路网络的平衡等. 微分方程理论,包括常微分方程和偏微分方程理论,是在解决物理现象中开始建立和发展的. 各种各样的物理问题给出的应用模型是常微分方程应用的最大源泉.

(3) **经典力学**　常微分方程直接应用于力学特别是动力学、分析力学、经典力学中. 在[书 §1.1 例 8] 中已指出一系列重要的力学问题,如刚体动力学问题可以化为牛顿运动(常微分)方程求解;通过引入广义坐标和拉格朗日函数,可以将小振动和冲击运动问题化为二阶常微分拉格朗日方程组;更一般的力学问题则可以利用哈密顿函数化为特殊形状的常微分方程组(哈密顿方程)研究. 在[书 §1.1 - 例 2, §4.2.4] 及[§4.3.3 - (3)、(4), §8.3.3 - (2) ~ (5)] 给出了数学摆、质点振动、倒置摆、梁和弦等例子. 在[§2.3.3 - (1), §4.3.3 - (1)、(2), §8.3.3 - (1)]

讨论了降落伞和小船的运动速度与位置及追赶轨迹、悬链线与导弹跟踪. 关于力学运动方程的还有[§5.3.3 - (1)、(7)] 炮弹和飞机的运动. 关于质点动力学及二体、三体问题的讨论见[书 §4.3.3] 及[§5.3.3 - (5), §4.3.3 - (6)、(7)]. 在[§5.3.3 - (6)] 则介绍了刚体运动与陀螺仪. 这些都是常微分方程在力学问题特别是经典力学中的应用.

(4) **化学动力学**　在[书 §1.1 - 例7] 中给出了分子反应的化学动力学模型,包括单分子、双分子及三分子的化学动力学模型例子. 单分子模型右端是多项式,可直接积分求解;双分子模型和传染病 SIR 模型、两种群竞争模型一样,可以分离变量求解,见[书 §2.1 - 例2];而三分子模型,在[书 §6.4.2] 中详细分析了存在(唯一) 和不存在极限环的条件. 在[§6.3.3 - (10)] 中还给出从化学反应出现混沌的例子. 分子化学动力学是常微分方程的用武之地,可参看[文 12 §2.10].

(5) **控制系统**　通过反馈机构控制组成的控制系统通常可用常微分方程描述其机构的运动. 如下列非线性常微分方程组表示了一类控制系统的运动

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \varphi(\sigma)\boldsymbol{b}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \varphi(\sigma), \sigma = \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \gamma\xi, \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 是 n 维向量,表示控制系统的某种状态,称为状态变量;ξ 是辅助(控制) 变量;σ 为反馈信号;常量 γ 和向量 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}$ 是控制参数;函数 $\varphi(\sigma)$ 为控制机构,一般具非线性特征: 连续, $\varphi(0) = 0$, $\sigma\varphi(\sigma) > 0(\sigma \neq 0$ 时), $\int_0^{+\infty} \varphi(\sigma)\mathrm{d}\sigma \to \infty$.

当 $\gamma \neq 0$ 时称为间接控制系统. 当 $\gamma = 0$ 时方程组化为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \varphi(\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\boldsymbol{b},$$

称为直接控制系统. 在[§6.3.3 - (4)] 中将对非线性控制系统进

行稳定性分析.

(6) **社会科学** 常微分方程同样在社会科学中得到广泛应用. 首先是人口的增长研究,提出了马尔萨斯模型,后来又有更复杂的logistic模型([书 §1.1 例3])和人口发展方程([§7.3.3 - (1)]),探讨性别、年龄、环境等的影响,形成了所谓人口学. 还有综合国力与经济调整模型([§6.3.3 - (1)])、交通流([§7.3.3 - (2)]) 和技术革新的推广速度模型([§3.3.3 - (5)]). 经济管理中的经济增长模型和供求关系的价格均衡模型([§6.3.3 - (5)]). 金融市场中的股票价值、期权定价研究则要用到随机微分方程.

(7) **生命科学** 常微分方程也在迅速发展的生命科学中取得一席之地. 生态数学、人口学、细胞学、传染病传播、脑神经活动等中均有大量的常微分方程模型,成为常微分方程的应用天地. 参见[书 §1.1 例3、例4、例5] 及[§2.3.3 - (6), §5.3.3 - (2)、(3), §6.3.3 - (3)、(4)、(6)、(7)、(8)] 等.

§1.3.4 历史与人物

(1) **简史(常微分方程)** 常微分方程是伴随着17世纪微积分的发展而兴起的. 牛顿在发明微积分的时候就已应用微分方程解决行星运动问题([§4.3.3 - (6)]). 但至1693年惠更斯(Huygens)才明确说到微分方程([文38(2) §21.1]). 有几类物理问题促进了微分方程的研究. 一是中世纪建宏伟教堂需处理的弹性问题,如梁的变形、弹簧的恢复力、弦的振动等. 二是摆问题,它联系着地球的形状和引力的平方反比律的验证. 牛顿通过不同地点的摆周期的变化推断地球的形状. 知道地球形状,加上重力加速度,可查对引力规律. 三是主导18世纪物理研究领域的天文学,它与月球运动及大海航行中船的定位有关. 牛顿用微分方程讨论了二体和三体问题及日食和月食的预报. 通过数学家们的通信,提出了各种微分方程的求解方法并解决了摆线、悬链线、追线以及弦

的振动、奇解等问题. 这里,杰出的数学家如牛顿、欧拉、伯努利家族、拉格朗日、高斯、里卡蒂等均参与常微分方程的研究. 在18世纪,数学家用初等函数求常微分方程的解,探索常微分方程的一般积分方法. 直至1775年,其求解的巨大努力失败后,便转向用无穷级数求解,并满足于用一个没有积出的积分来表示解,称为特殊函数或高级超越函数. 19世纪,研究出各种各样的特殊函数类,包括从偏微分方程通过变量分离而得到的常微分方程的积分. 数学物理中偏微分方程问题往往包含一些边界条件,而引出常微分方程的特征值和特征向量问题,从而出现施图姆 - 刘维尔理论. 因大多数常微分方程无法求解,必须研究解的存在性、唯一性以及近似解、数值解,并引出线性微分方程解的性质的研究. 复线性微分方程还引出了包括椭圆函数的自守函数理论. 特殊函数对应的二阶微分方程会出现奇异的系数,从而发展出奇点理论. 因 n 体问题不可能明显解出,Hill 转向研究月球近地点的周期运动. 从而刺激了庞加莱对行星轨道稳定性的研究. 于19世纪末,庞加莱建立了近代常微分方程定性理论. 与此同时,俄国李雅普诺夫也从力学角度建立了稳定性理论. 伯克霍夫又从定性理论中引出动力系统理论. 定性、稳定性和动力系统理论是20世纪常微分方程的三大发展方向.

(2) **牛顿**(I. Newton,1642—1727)　以万有引力定律的发现举世闻名. 生于英国农家. 在剑桥大学求学,22岁至24岁发现负数和分数的二项式级数、微分和积分、万有引力定律、日光光谱等,以致他的老师巴罗(I. Barrow)于1669年辞去教授职位让位给他. 牛顿对发表文章没有兴趣,且只把数学作为研究工具. 1687年发表了《自然哲学的数学原理》被认为是自然科学的里程碑,书中奠定了理论力学及流体力学的基本原理;用数学分析了波动现象;从引力推出开普勒定律;建立了潮汐理论. 1704年发表了《光学》. 1690年离开剑桥赴伦敦任造币厂主任(后为厂长). 牛顿终身未婚,晚年沉迷于神学,被认为是一个献身的、孤寂的、富于直观能力的神

秘主义者.

(3) **欧拉**(L. Euler,1707—1783) 瑞士人,是近世三大数学家之一(另两位是高斯、黎曼). 毕业于巴塞耳(Basel) 大学. 作为柏林科学院院士、彼得堡科学院院士,一生主要在这两地度过. 最后 17 年间完全失明,仍通过口授撰写众多论文. 其全集完全印出约一百卷以上. 他总结前人发现并充满自己见解地写出了《无穷分析引论》(1748)、《微分法》(1755)、《积分法》(1768—1794) 三大经典著作. 书中创造了一批标准数学记号 $e,\pi,i,\log_a x,e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 等. 他是运用无穷级数、无穷乘积、连分数的大师. 对微分方程提出了许多重要思想:各种降阶法、积分因子(常叫欧拉常数) 法、二阶线性方程理论、幂级数解法及变分法等. 在欧拉的时代还不分纯粹数学和应用数学,对他来说,整个物理世界正是其分析方法的用武之地. 古典力学的基础是牛顿奠定的,而欧拉则是主要建筑师.

(4) **高斯**(C. F. Gauss,1777—1855) 德国人,是最伟大的数学家. 很小就表现出对数学的非凡才能,15 岁就被当地公爵送到学院学习,后去哥廷根大学学习. 很早就发现了质数定理、最小二乘法和正态分布律. 因来不及详述其发现,他只能用简短科学日记进行记录,1796—1814 年间就有 146 项. 如 1796 年 3 月 30 日记正 17 边形可作(用圆规直尺作图);1795 年发现了二次互反律. 1789 年完成的名著《算术论丛》是近世数论的开始. 其博士论文(1799) 给出的代数基本定理是数学史上的里程碑. 高斯后期转向繁重的应用数学工作,在欧洲天文学家寻找新星体失败后,高斯以无比的计算技巧重新发现了谷神星(Ceres). 以至 1807 年被任命为天文学教授和格廷根新天文台台长. 写出不少天文著作,最重要的是《天体运动理论》,书中处理摄动的方法导致海王星的发现. 1820 年左右主持大地测量工作,奠定了一般曲面的内在微分几何理论. 后期高斯还从事光学、地磁学等物理研究. 高斯把纯数学当作消遣,1831 年发表的四次剩余论文开创了代数数论方向. 他还建立

了位势论、近代矢量分析的散度定理、柯西积分定理,以及和微分方程有关的解析函数的泰勒展开式、超几何级数和椭圆函数等特殊函数及解析函数方面的工作. 高斯像一个探险家,他说"给予我最大愉快的 …… 是得出成就的过程".

(5) **黎曼**(B. Riemann,1826—1866)　德国北部一个乡村牧师的儿子,是近世三大数学家之一,对 20 世纪数学有重大影响. 曾在哥廷根大学读神学,后转数学. 他跟随狄利克雷学习,并一生得其帮助. 1855 年高斯去世后狄利克雷接任教授职位,1859 年狄利克雷去世又将教授职位传给黎曼. 黎曼一生短促,论文相对较少,但却永远改变了分析、几何和数论的面貌. 他提出了黎曼曲面、黎曼积分、黎曼几何等理论,并开创了实变函数论. 他在数论方面的唯一著作关于质数分布的黎曼 ζ 函数在纯数学的几个分支掀起了浪潮. 其黎曼假设的猜想至今仍未破解. 黎曼在微分方程方面有超几何函数和阿贝尔函数以及脱离显式表示约束的解析(复变)函数的一般理论.

(6) **希尔伯特**(D. Hilbert,1862—1943)　德国数学家,是 20 世纪最伟大的数学家之一. 他对数学有巨大和多方面的贡献. 他典型的研究方式是直攻数学中的重大问题,开拓新的研究领域,并从中寻找带普遍性的方法. 曾第一次给出完备的欧几里得几何公理系统,提出的证明论计划带动了 20 世纪数学基础研究的发展. 1900 年他在巴黎第二届国际数学家大会上作了题为《数学问题》的著名讲演. 提出了新世纪数学面临的 23 个问题. 对这些问题的研究推动了20世纪数学发展的进程. 其中第16个问题中的下半部分是常微分方程的极限环的个数和相对位置,见[§6.3.2 -(6)].

(7) **沃尔泰拉**(V. Volterra,1860—1940)　杰出意大利数学家. 早年在积分方程方面作出贡献,晚年涉猎数理生物学,著有《生存竞争数学理论讲义》.

历史人物尚有:伯努利家族([§2.3.4 - (3)]),拉格朗日

([§5.3.4 - (2)]), 施图姆([§8.3.4 - (2)]), 刘维尔([§8.3.4 - (3)]), 庞加莱([§6.3.4 - (2)]), 李雅普诺夫([§6.3.4 - (3)]),伯克霍夫([§6.3.4 - (4)]) 等.

§1.4 习题与习题解答

§1.4.1 测试练习解答

1. (1) 自变量 x,因变量 y,1 阶线性、驻定、非齐次微分方程.

(2) 自变量 y, 因变量 r,2 阶非线性、非驻定、非齐次微分方程.

(3) 自变量 y,因变量 x,3 阶线性、非驻定、非齐次微分方程.

(4) 自变量 t,因变量 x,y,1 阶非线性、驻定、非齐次微分方程组.

2. (1) $x' = -e^{-t} - te^{-t}, x'' = te^{-t}$, 于是 $x'' + 2x' + x \equiv 0$. $x(t) = 2e^{-t} + te^{-t}$ 是解. 解在 $-\infty < t < +\infty$ 存在.

(2) $y' = 2(x+c), y'^2 - 4y = 4(x+c)^2 - 4(x+c)^2 \equiv 0$. $y=0$ 亦为解. $y(x) = (x+c)^2$ 及 $y(x)=0$ 是解. 解在 $-\infty < x < +\infty$ 存在. 在 Oxy 平面上解存在于半平面 $\{(x,y): y \geqslant 0\}$.

(3) 应有 $x \neq \pm 1$, 此时 $y' = -\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}, y' + 2xy^2 = -\dfrac{2x}{(x^2-1)^2} + 2x\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)^2 \equiv 0$. 当 $x \neq \pm 1$ 时 $y(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ 是方程 $y' + 2xy^2 = 0$ 的解. 解在 $x \neq \pm 1$ 时存在.

3. 函数: c, x, x^μ, e^x, a^x, $\ln x$, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$.

导数: 0, 1, $\mu x^{\mu-1}$, e^x, $a^x \ln a$, $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{x\ln a}$, $\cos x$, $-\sin x$.

函数：$\tan x, \cot x$,　$\arcsin x$, $\arccos x$,　$\arctan x, \operatorname{arccot} x$.

导数：$\sec^2 x, -\csc^2 x, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{1}{1+x^2}$,　$-\frac{1}{1+x^2}$.

§1.4.2　补充习题解答

1. (1) 由 $y = \ln x$ 有 $y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}$，于是 $xy'' + y' = -\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x} = 0$. $y = \ln x$ 是方程 $xy'' + y' = 0$ 的解.

(2) 由 $y = e^{mx}$ 有 $y' = me^{mx}, y'' = m^2e^{mx}, y''' = m^3e^{mx}$，代入方程 $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$，消去 e^{mx} 得 $m^3 - 2m^2 - 4m + 8 = 0$. 因 $m^3 - 2m^2 - 4m + 8 = (m-2)^2(m+2) = 0$，故当且仅当 $m = \pm 2$ 时 $y = e^{mx}$ 为方程 $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$ 的解.

2. (1) 消去 1 个参数需要 2 个方程，对 x 求导得 $y' = m$，代入方程有 $y = y'x$.

(2) 消去 2 个参数需要 3 个方程，由 $y = a\sin(t+b)$，有 $y' = a\cos(t+b), y'' = -a\sin(t+b)$. 消去参数，变为 $y'' + y = 0$.

(3) 由 $y = a\cos\alpha x + b\sin\alpha x$，有 $y' = -a\alpha\sin\alpha x + b\alpha\cos\alpha x$, $y'' = -a\alpha^2\cos\alpha x - b\alpha^2\sin\alpha x$. 消去参数，变为 $y'' + \alpha^2 y = 0$.

(4) 由 $y = ae^{3x} + be^x + c$，有 $y' = 3ae^{3x} + be^x, y'' = 9ae^{3x} + be^x$, $y''' = 27ae^{3x} + be^x$. 因为 $y''' - y'' = 18ae^{3x}, y'' - y' = 6ae^{3x}$，所以 $y''' - y'' = 3(y'' - y')$，故方程为 $y''' - 4y'' + 3y' = 0$.

(5) 方程对 x 求导得 $(2xy^3 + 3x^2y^2y') + (3x^2y^5 + 5x^3y^4y') = 0$. 或当 $xy \neq 0$ 时变为 $(2y + 3xy') + xy^2(3y + 5xy') = 0$，即 $(3x + 5x^2y^2)y' + 2y + 3xy^3 = 0, \frac{dy}{dx} = -\frac{2y + 3xy^3}{3x + 5x^2y^2}$. 亦可写成微分式 $(2xy^3 + 3x^2y^5)dx + (3x^2y^2 + 5x^3y^4)dy = 0$，或消去 xy^2 后得 $(2y + 3xy^3)dx + (3x + 5x^2y^2)dy = 0$.

(6) 由 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$，有 $2(x-a) + 2y'(y-b) =$

$0, 2+2y''(y-b)+2y'^2=0$，即 $y-b+(y'^2+1)/y''=0$. 再对 x 求导得 $y'+[2y'y''^2-(y'^2+1)y''']/y''^2=0$，整理得 $3y'y''^2=(y'^2+1)y'''$.

3. 其轴为 y 轴的抛物线方程为 $x^2=2p(y+a)$，与 y 轴平行时方程为 $(x+b)^2=2p(y+a)$，即 $y=\frac{1}{2p}(x+b)^2-a$. 在点 (x,y) 处抛物线上的斜率为 $y'=\frac{1}{p}(x+b)$，与 $y=0$ 相切时切点处有 $y'=\frac{1}{p}(x+b)=0$，得 $x=-b$ 且 $y=0$，即抛物线方程中 $a=0$. 而与 $y=x$ 相切则切点处有 $y'=\frac{1}{p}(x+b)=1$，得 $x=p-b$ 且 $y=x$，抛物线方程中 $y=\frac{1}{2p}p^2=\frac{p}{2}=x, b=p-x=\frac{p}{2}$. 所求的抛物线方程为 $y=\frac{1}{2p}\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$. 对 x 求导得 $y'=\frac{1}{p}\left(x+\frac{p}{2}\right)=\frac{x}{p}+\frac{1}{2}$，即 $y=\frac{1}{2p}\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{y'^2}{2}p=\frac{y'^2}{2}\cdot\frac{2x}{2y'-1}$. 满足条件的微分方程为 $xy'^2=y(2y'-1)$.

4. (1) 等斜线是双曲线 $1+xy=k$. 特别地当 $k=1$ 时双曲线退化为一对直线 $x=0$ 和 $y=0$，就是说，在 x 轴和 y 轴上积分曲线有相同的切线方向.

进一步考虑积分曲线的极值点和拐点. 为此，令 $k=0$ 时得 $1+xy=0$，在此双曲线上 $y'=0, y''=y+x(1+xy)=y$，可见积分曲线在双曲线的一支(对应于 $y>0$) 上取得极小值，而在其另一支(对应于 $y<0$) 上达到极大. 同样易知积分曲线的拐点位于曲线 $x+(x^2+1)y=0$ 上.

根据以上提供的信息，我们即可近似地画出积分曲线的分布概况如图 1.6.

(2) $y'=\frac{1}{y}-x$ 的等倾斜线为 $\frac{1}{y}-x=\tan\alpha=k$，可令 $k=$

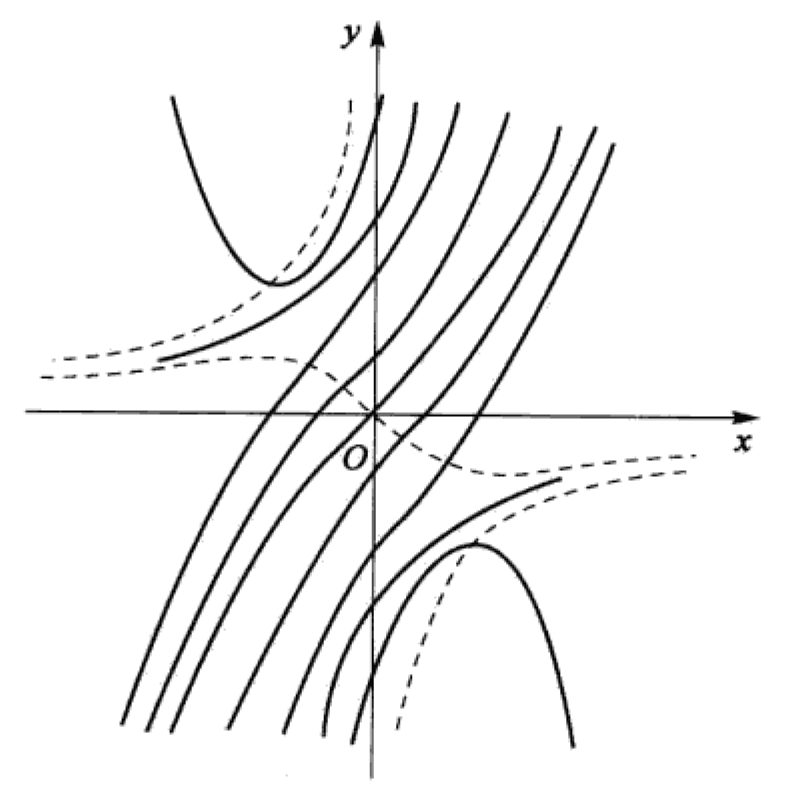


图 1.6　$y' = -\dfrac{x}{y}$ 的等倾斜线

$0,\infty$ 等得到不同斜率的曲线并在网格点上计算斜率. 见图 1.7.

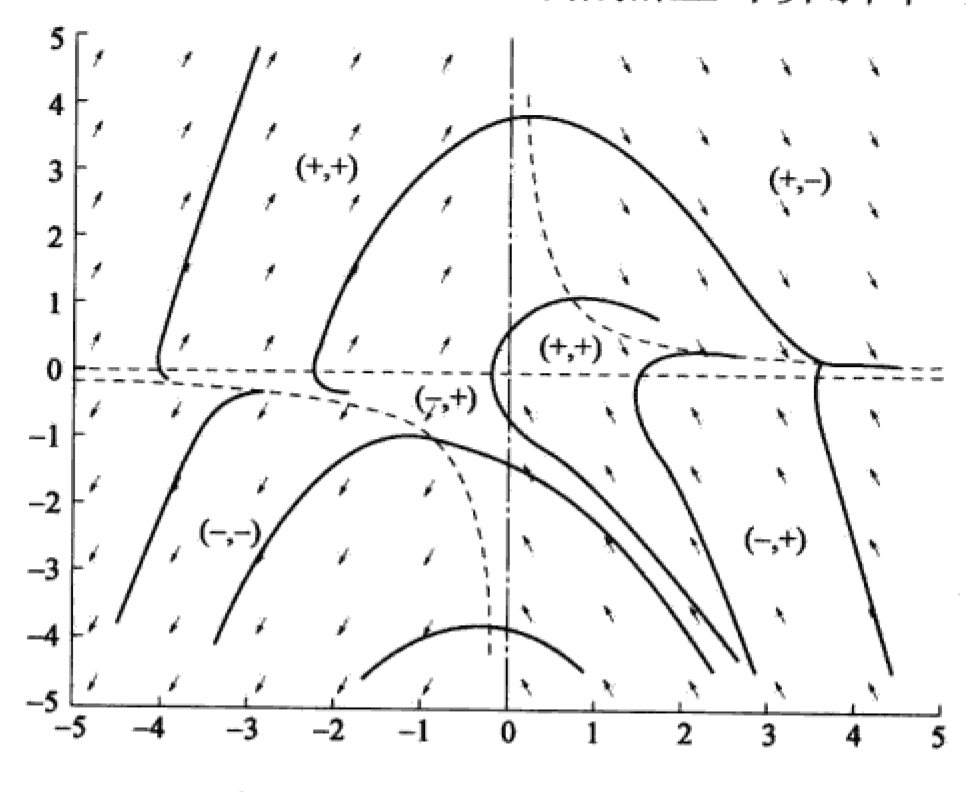


图 1.7　$y' = \dfrac{1}{y} - x$ 的等倾斜线

§1.4.3　习题 1.2 及其解答

1. 指出下面微分方程的阶数,并回答方程是否线性的:

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 4x^2 - y$;

(2) $\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 12xy = 0$;

(3) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - 3y^2 = 0$;

(4) $x\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 3xy = \sin x$;

(5) $\frac{dy}{dx} + \cos y + 2x = 0$;

(6) $\sin\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + e^y = x$.

解 (1) 1 阶,线性;(2) 2 阶,非线性;(3) 1 阶,非线性;(4) 2 阶,线性;(5) 1 阶,非线性;(6) 2 阶,非线性.

2. 试验证下面函数均为方程$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$的解,这里 $\omega > 0$ 是常数:

(1) $y = \cos \omega x$;

(2) $y = c_1\cos \omega x$ (c_1 是任意常数);

(3) $y = \sin \omega x$;

(4) $y = c_2\sin \omega x$ (c_1 是任意常数);

(5) $y = c_1\cos \omega x + c_2\sin \omega x$ (c_1, c_2 是任意常数);

(6) $y = A\sin(\omega x + B)$ (A, B 是任意常数).

解 (1) ~ (4) 是(5) 的特例.

(5) $y' = -c_1\omega\sin \omega x + c_2\omega\cos \omega x$,

$$y'' = -c_1\omega^2\cos \omega x - c_2\omega^2\sin \omega x,$$

$$y'' + \omega^2 y = -c_1\omega^2\cos \omega x - c_2\omega^2\sin \omega x + \omega^2(c_1\cos \omega x + c_2\sin \omega x) \equiv 0,$$

故 $y = c_1\cos \omega t + c_2\sin \omega t$ 是原方程的解.

(6) $y' = A\omega\cos(\omega x + B)$, $y'' = -A\omega^2\sin(\omega x + B)$,即

$$y'' + \omega^2 y = -A\omega^2\sin(\omega x + B) + \omega^2 A\sin(\omega x + B) \equiv 0,$$

故 $y = A\sin(\omega x + B)$是原方程的解.

3. 验证下列各函数是相应微分方程的解:

(1) $y = \frac{\sin x}{x}, xy' + y = \cos x$.

解 $y' = \frac{1}{x^2}(x\cos x - \sin x)$,

$$xy' + y = \frac{1}{x}(x\cos x - \sin x) + \frac{\sin x}{x} = \cos x.$$

(2) $y = 2 + c\sqrt{1 - x^2}, (1 - x^2)y' + xy = 2x$ (c是任意常数).

提示 $y' = \frac{-cx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

(3) $y = ce^x, y'' - 2y' + y = 0$ (c是任意常数).

提示 $y' = y'' = ce^x$.

(4) $y = e^x, y'e^{-x} + y^2 - 2ye^x = 1 - e^{2x}$.

提示 $y' = y'' = e^x$.

(5) $y = \sin x, y' + y^2 - 2y\sin x + \sin^2 x - \cos x = 0$.

提示 $y' = \cos x$.

(6) $y = -\frac{1}{x}, x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$.

提示 $x^2y' = 1, x^2y^2 + xy = 0$.

(7) $y = x^2 + 1, y' = y^2 - (x^2 + 1)y + 2x$.

提示 $y^2 - (x^2 + 1)y = 0$.

(8) $y = -\frac{g(x)}{f(x)}, y' = \frac{f'(x)}{g(x)}y^2 - \frac{g'(x)}{f(x)}$.

解 $y' = \frac{g(x)f'(x)}{f^2(x)} - \frac{g'(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)}{g(x)}\left[\frac{g(x)}{f(x)}\right]^2 - \frac{g'(x)}{f(x)}$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)}y^2 - \frac{g'(x)}{f(x)}.$$

4. 给定一阶微分方程$\frac{dy}{dx} = 2x$,

(1) 求出它的通解;

(2) 求通过点(1,4)的特解;

(3) 求出与直线 $y = 2x + 3$ 相切的解;

(4) 求出满足条件$\int_0^1 y dx = 2$ 的解;

(5) 给出(2),(3),(4)中解的图形.

解 (1) 仿[书 §1.1 例3]将方程改写为 $dy = 2xdx$,再两边积分$\int dy = \int 2xdx + c$,得 $y = x^2 + c$,便得含一个任意常数 c 的通解 $y = x^2 + c$.

(2) 过点(1,4)的解为 $4 = 1^2 + c, c = 3$,即特解为 $y = x^2 + 3$.

(3) 直线 $y = 2x + 3$ 的斜率为 $k = y' = 2$. 通解 $y = x^2 + c$ 在切点(x,y)的斜率为 $y' = 2x = k = 2$,即 $x = 1, y = 2 \times 1 + 3 = 5$,代入通解得 $c = 4$,故与直线 $y = 2x + 3$ 相切的解为 $y = x^2 + 4$.

(4) 通解为 $y = x^2 + c$,于是 $\int_0^1 y dx = \int_0^1 (x^2 + c) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + cx\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + c = 2, c = \frac{5}{3}$,所求的解为 $y = x^2 + \frac{5}{3}$.

(5) 如图 1.8.

5. 求下列两个微分方程的公共解:

$$y' = y^2 + 2x - x^4, \quad y' = 2x + x^2 + x^4 - y - y^2.$$

提示 $(y - x^2)[1 + 2(y + x^2)] = 0$. 检验得 $y = x^2$ 是公共解,而 $y = -x^2 - \frac{1}{2}$ 不是公共解.

6. 求微分方程 $y' + xy'^2 - y = 0$ 的直线积分曲线.

提示 设直线积分曲线为 $y = ax + b$,有 $a(a-1)x + a - b = 0$. 解得 $a = b = 0$ 或 $a = b = 1$. 即 $y = 0$ 或 $y = x + 1$.

7. 微分方程 $4x^2y'^2 - y^2 = xy^3$,证明:与其积分曲线关于坐标

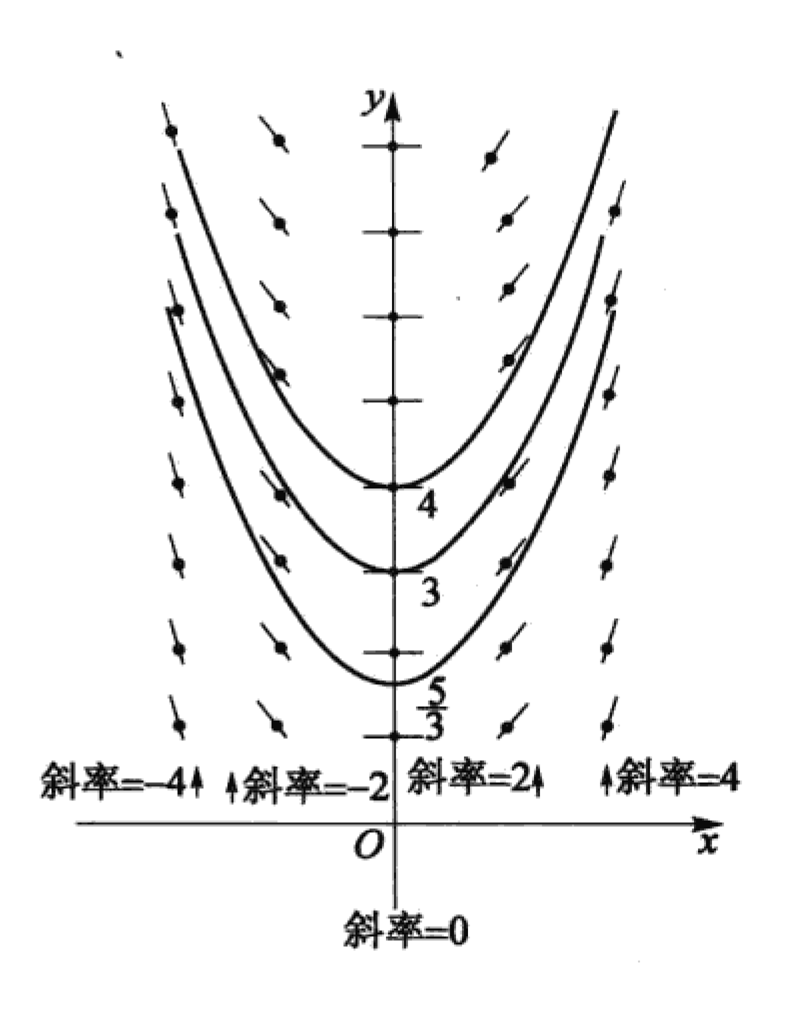


图 1.8 $\frac{dy}{dx}=2x$ 解的图形

原点(0,0) 成中心对称的曲线,也是此微分方程的积分曲线.

解 设微分方程的积分曲线为 $y=f(x)$,即有 $4x^2f'^2(x)-f^2(x)\equiv xf^3(x)$. 又设与积分曲线 $y=f(x)$ 成中心对称的曲线为 $y=g(x)$,则有 $f(-x)=-g(x)$,$f'(-x)=g'(x)$. 对方程 $4x^2f'^2(x)-f^2(x)\equiv xf^3(x)$ 用 $-x$ 代替 x 得

$$4(-x)^2f'^2(-x)-f^2(-x)\equiv -xf^3(-x),$$

即

$$4x^2[f'(-x)]^2-[-f(-x)]^2\equiv x[-f(-x)]^3.$$

于是 $4x^2g'^2(x)-g^2(x)\equiv xg^3(x)$,这就证明了 $y=g(x)$ 也是微分方程的积分曲线.

8. 试建立分别具有下列性质的曲线所满足的微分方程:

(提示:过点 (x,y) 的切线的横截距和纵截距分别为 $x-\frac{y}{y'}$ 和 $y-xy'$.)

(1) 曲线上任一点的切线与该点的径向夹角为 α.

解 设曲线为 $y = f(x)$,在点(x,y)处曲线斜率为 $k = y' = f'(x)$,而点(x,y)处向径斜率为 $k_r = \frac{y}{x}$. 当曲线与切点的径向夹角为 α 时有关系式 $\tan\alpha = \frac{k - k_r}{1 + kk_r}$,所求的微分方程为

$$\tan\alpha = \frac{y' - \frac{y}{x}}{1 + y'\frac{y}{x}}, \quad xy' - y = \tan\alpha(x + yy'),$$

$$y' = \frac{y + x\tan\alpha}{x - y\tan\alpha}.$$

(2) 曲线上任一点的切线介于两坐标轴之间的部分等于定长 l.

解 设曲线为 $y = f(x)$,在点(x,y)处曲线斜率为 $k = y'$,切线方程为

$$Y - y = y'(X - x),$$

这里(X,Y)为切线的流动坐标. 切线在 x,y 坐标轴上截距分别为 $\overline{X} = x - \frac{y}{y'}$ 和 $\overline{Y} = y - xy'$. 题设要求切线在两坐标轴之间长为 l,即 $\overline{X}^2 + \overline{Y}^2 = l^2$. 于是

$$\left(x - \frac{y}{y'}\right)^2 + (y - xy')^2 = l^2,$$

$$(xy' - y)^2 + y'^2(y - xy')^2 = l^2y'^2,$$

$$(1 + y'^2)(xy' - y)^2 = l^2y'^2.$$

所求的微分方程为$(1 + y'^2)(xy' - y)^2 = l^2y'^2$.

(3) 曲线上任一点的切线与两坐标轴所围成的三角形(如存在)的面积都等于常数 a^2.

提示 由(2),$\frac{1}{2}|\overline{X}\ \overline{Y}| = a^2$,$(y - xy')^2 = 2a^2|y'|$.

(4) 曲线上任一点的切线介于两坐标轴之间的部分被切点

等分.

提示 由(2),$\frac{1}{2}\overline{Y}=y, xy'+y=0$.

(5) 曲线上任一点的切线的纵截距等于切点横坐标的平方.

提示 由(2),$\overline{Y}=x^2, xy'=y-x^2$.

(6) 曲线上任一点的切线的纵截距是切点的横坐标和纵坐标的等差中项.

提示 由(2),$\overline{Y}=\frac{1}{2}(x+y), 2xy'=y-x$.

(7) 曲线上任一点的切线的斜率与切点的横坐标成正比.

提示 $y'=kx$ ($k>0$ 为比例常数).

第二章　一阶微分方程的初等解法

§2.1　内 容 提 要

§2.1.1　变量分离方程与变量变换

（1）**变量分离方程** $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$

解法：$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx,\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C.$

（2）**齐次方程** $\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right).$

解法：变量变换 $u=\frac{y}{x},\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$，方程化为变量分离方程 $\frac{du}{dx}=\frac{g(u)-u}{x}.$

（3）**分式线性方程** $\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$ 或 $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

解法：（ⅰ）$c_1=c_2=0$ 情形：$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}=g\left(\frac{y}{x}\right)$ 属齐次方程.

（ⅱ）$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=k$ 情形：令 $u=a_2x+b_2y$，方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{(a_2x+b_2y)+c_2}=f(u)$，$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a_2+b_2f(u)$ 属变量分离方程.

（ⅲ）一般情形：先解联立代数方程 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0,\\ a_2x+b_2y+c_2=0,\end{cases}$ 得解 $\begin{cases}x=\alpha,\\ y=\beta,\end{cases}$ 再作代换 $\begin{cases}X=x-\alpha,\\ Y=y-\beta,\end{cases}$ 则将原方程化为齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=g\left(\dfrac{Y}{X}\right)$.

§2.1.2 线性方程与常数变易法

（1）**一阶齐次线性方程** $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y$，用变量分离方法得通解 $y=c\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$.

（2）**常数变易法** 对一阶非齐次线性方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y+Q(x)$. 假设有形式解 $y=c(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$，代入方程化简得 $c(x)=\int Q(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\tilde{c}$，原方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\tilde{c}\right).$$

（3）**伯努利方程** $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y+Q(x)y^n$. 变量变换 $z=y^{1-n}$ 化为线性方程求解：$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)P(x)z+(1-n)Q(x)$.

§2.1.3 恰当方程与积分因子

（1）**恰当方程** 将一阶微分方程写成对称形式 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$.

若方程右端恰可表为某函数 $u(x,y)$ 的全微分：$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y \equiv \mathrm{d}u(x,y)$，则称方程为恰当方程. 恰当方程的通解为 $u(x,y) = c$.

方程为恰当方程的充要条件为$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. 此时有

$$u = \int M(x,y)\partial x + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x\right]\mathrm{d}y.$$

式中 ∂x 为对 x 的偏积分. 见[§2.2.1 - 4(a) 注].

(2) **分项组合全微分方法** 将恰当方程的各项分项组合成全微分形式.

简单二元函数的全微分：$y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = \mathrm{d}(xy)$,

$$\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2} = \mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right), \quad \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{xy} = \mathrm{d}\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right),$$

$$\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} = -\mathrm{d}\left(\arctan\frac{y}{x}\right), \quad \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right).$$

(3) **积分因子** 如存在连续可微函数 $\mu(x,y)$，使得 $\mu M\mathrm{d}x + \mu N\mathrm{d}y = \mathrm{d}u$，则称 $\mu(x,y)$ 为方程 $M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = 0$ 的积分因子. 同一方程可以有不同的积分因子.

μ 为积分因子的充要条件：$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$，即

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu.$$

(4) **单变量积分因子** $\mu(x)$, $\mu(y)$ 有 $\mu = \mu(x)$ 形式的积分因子的充要条件：$\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \psi(x)$. 此时积分因子为 $\mu(x) = \mathrm{e}^{\int\psi(x)\mathrm{d}x}$.

同样，有 $\mu=\mu(y)$ 形式的积分因子的充要条件：$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\varphi(y)$，此时积分因子为 $\mu(y)=\mathrm{e}^{\int\varphi(y)\mathrm{d}y}$.

§2.1.4 一阶隐式微分方程与参数表示

一阶隐式微分方程形式为 $F(x,y,y')=0$.

(1) $y=f(x,y')$　令 $y'=p$. 对 $y=f(x,p)$ 取 x 微分得 $p=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，视为 x,p 的一阶微分方程解之. 解为 $p=\varphi(x,c)$ 时原方程的通解为 $y=f(x,\varphi(x,c))$；解为 $x=\psi(p,c)$ 时原方程的通解为 $\begin{cases}x=\psi(p,c),\\ y=f(\psi(p,c),p).\end{cases}$

(2) $x=f(y,y')$　令 $y'=p$. 对 $x=f(y,p)$ 取 y 微分得 $\dfrac{1}{p}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，视为 y,p 的一阶微分方程解之，解为 $p=\varphi(y,c)$ 时原方程的通解为 $x=f(y,\varphi(y,c))$；解为 $y=\psi(p,c)$ 时原方程的通解为 $\begin{cases}x=f(\psi(p,c),p),\\ y=\psi(p,c).\end{cases}$

(3) $F(x,y')=0$　令 $y'=p$. 方程化为 $F(x,p)=0$，代表 (x,p) 平面上的一条曲线. 如有参数解 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ p=\psi(t),\end{cases}$ 则原方程的通解为 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\displaystyle\int\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t+c.\end{cases}$

(4) $F(y,y')=0$　令 $y'=p$. 方程化为 $F(y,p)=0$，代表 (y,p) 平面上的一条曲线. 如有参数解 $\begin{cases}y=\varphi(t),\\ p=\psi(t),\end{cases}$ 则原方程的通

解为$\begin{cases} x = \int \dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t + c, \\ y = \varphi(t). \end{cases}$

§2.2 学习辅导

§2.2.1 解题指导

（1）解题时，首先要审题. 审题则先分类. 对常微分方程课程题目，可先判断：边值问题、初值问题或通解问题；一阶常微分方程、高阶微分方程或微分方程组. 根据审题判断的题目类型再分别处理.

（2）对一阶微分方程，当显含$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$时可按下列顺序判断方程类型并解之. 开始时最好先检查是否存在 y 的零解，如存在则要在解得通解后检查零解是否包含在通解中.

（a）线性齐次$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y$：通解为 $y = c\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$（变量分离法）.

（b）线性非齐次$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y + Q(x)$：通解为 $y = \mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \tilde{c}\right]$（常数变易法）.

（c）伯努利方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y + Q(x)y^n$：变量变换 $z = y^{1-n}$ 化为线性方程（变量变换法）.

（d）里卡蒂方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$：已知或观察求一特解 $\tilde{y}$：变量变换 $z = y - \tilde{y}$ 可化为伯努利方程解之.

（e）变量分离方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$：变量分离方法$\int \dfrac{\mathrm{d}y}{g(y)} =$

$\int f(x)\mathrm{d}x + c$.

(f) 齐次方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g\left(\frac{y}{x}\right)$：变量变换 $u = \frac{y}{x}$，化为变量分离方程$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{g(u) - u}{x}$.

(g) 分式线性方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$：先求方程$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases}$的解 α,β. 再作代换$\begin{cases} X = x - \alpha, \\ Y = y - \beta, \end{cases}$化为齐次方程$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = g\left(\frac{Y}{X}\right)$（特殊情形可直接化之）.

(3) 当显含$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$时可将 y 和 x 对调按(2)的(a)～(g)方法判断求解.

(4) 不属(2)、(3)类型时可考虑将原方程写成对称形式 $M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$，看是否能化为恰当方程解之：

(a) 检验是否满足$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$：满足时有

$$u = \int M(x,y)\partial x + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x\right]\mathrm{d}y,$$

通解为 $u(x,y) = c$.

注　积分号内的 ∂x 表示为对 x"偏"积分，另一变量作为参数，不同于一般积分，本书中出现的此符号均如此理解.

(b) 如有$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \psi(x)$：积分因子为 $\mu(x) = \mathrm{e}^{\int\psi(x)\mathrm{d}x}$，使得 $\mu M\mathrm{d}x + \mu N\mathrm{d}y = \mathrm{d}u$.

(c) 如有$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \varphi(y)$：积分因子为 $\mu(y) = \mathrm{e}^{\int\varphi(y)\mathrm{d}y}$，使得

$\mu M\mathrm{d}x + \mu N\mathrm{d}y = \mathrm{d}u.$

(d) 尝试分项组合全微分方法：将恰当方程的各项分项组合成全微分式.

(5) 对一般隐函数形式一阶微分方程 $F(x,y,y')=0$，先尝试能否解出 y'. 对 $y'=p$，$F(x,y,p)=0$ 如有实因子分解

$$\begin{aligned}F(x,y,p) &\equiv p^n + F_1(x,y)p^{n-1} + \cdots + F_{n-1}(x,y)p + F_n(x,y)\\ &= (p-f_1(x,y))\cdots(p-f_n(x,y)),\end{aligned}$$

则解出 $y'=f_i(x,y)$ 的通解 $\varphi_i(x,y,c_i)=0$ 后 $F(x,y,y')=0$ 的通解为

$$\varphi_1(x,y,c_1)\cdots\varphi_n(x,y,c_n)=0.$$

如上方法失效时可考虑是否为下列四种形式：

(a) $y=f(x,y')$：令 $y'=p$ 得 $p=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，解出 $x=\psi(p,c)$，通解为 $\begin{cases}x=\psi(p,c),\\ y=f(\psi(p,c),p).\end{cases}$

(a′) 克莱罗方程 $y=xp+f(p)$ 的通解为 $y=cx+f(c)$，并需求其奇解（见[书 §3.4]）.

(b) $x=f(y,y')$：令 $y'=p$ 得 $\dfrac{1}{p}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，解出 $y=\psi(p,c)$，通解为 $\begin{cases}x=f(y,p),\\ y=\psi(p,c).\end{cases}$

(b′) 拉格朗日方程 $y=xf(p)+g(p)$，对 x 求导可得

$$p=f(p)+[xf'(p)+g'(p)]\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},$$

化为 x 的线性方程 $[f(p)-p]\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}+f'(p)x+g'(p)=0$ 解之.

(c) $F(x,y')=0$：令 $y'=p$，方程化为 $F(x,p)=0$，参数解为 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ p=\psi(t)\end{cases}$ 时，通解为 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\displaystyle\int\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t+c.\end{cases}$

(d) $F(y,y')=0$：令 $y'=p$，方程化为 $F(y,p)=0$，参数解为 $\begin{cases} y=\varphi(t), \\ p=\psi(t) \end{cases}$ 时，通解为 $\begin{cases} x=\displaystyle\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t+c, \\ y=\varphi(t). \end{cases}$

(6) 常用的函数及其积分(常用的全微分组合见[§2.1.3(2)]，省略积分常数)：

(a) 简单

函数：0, x^{μ}, $\dfrac{1}{x}$, e^{x}, a^{x}, $\sin x$, $\cos x$, $\dfrac{1}{\cos^{2}x}$, $\dfrac{1}{\sin^{2}x}$

积分：c, $\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$, $\ln|x|$, e^{x}, $\dfrac{a^{x}}{\ln a}$, $-\cos x$, $\sin x$, $\tan x$, $-\cot x$

函数：$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$, $\dfrac{1}{1+x^{2}}$, $\dfrac{1}{x^{2}-1}$, $\dfrac{1}{\sqrt{x^{2}+1}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{x^{2}-1}}$

积分：$\arcsin x$, $\arctan x$, $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$, $\ln(x+\sqrt{x^{2}+1})$, $\ln\left|x+\sqrt{x^{2}-1}\right|$

(b) 复杂

$$\int (x^{2}-1)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{x}{\sqrt{x^{2}-1}},$$

$$\int x^{2}\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\left(\frac{x^{2}}{a}-\frac{2x}{a^{2}}+\frac{2}{a^{3}}\right)\mathrm{e}^{ax},$$

$$\int \frac{\ln x}{x^{m}}\mathrm{d}x=-\frac{\ln x}{(m-1)x^{m-1}}-\frac{1}{(m-1)^{2}x^{m-1}}\quad (m\neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\cos^{2}x}\mathrm{d}x=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x\quad \left(x\neq k\pi+\frac{1}{2}\pi\right),$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos \alpha x} = \frac{1}{\alpha}\ln\left|\tan\left(\frac{\alpha x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| = \ln(\sec\theta + \tan\theta),$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}),$$

§2.2.2 例题选讲

例 1 解微分方程 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = y^2$.

解 化为 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 - y, \frac{\mathrm{d}y}{y^2 - y} = \frac{\mathrm{d}x}{x}, \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{x}$,
两边积分得 $\ln|y-1| - \ln|y| = \ln|x| + \tilde{c}, \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln|x| + \tilde{c}$,

$$\frac{y-1}{y} = cx, (1-cx)y = 1.$$

即通解为 $(1-cx)y = 1$,其中 c 为任意常数. 此外,$y = 0$ 和 $y = 1$ 亦为解. 解 $y = 1$ 含于通解中.

例 2 解微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\sin^2(x+y)$.

解 令 $z = x + y$,则由 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 1 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,方程变为 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 1 - \sin^2 z = \cos^2 z$. 分离变量积分之:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\cos^2 z} = \mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{d}z}{\cos^2 z} = \int \mathrm{d}x + c, \quad \tan z = x + c.$$

最后得通解

$$\tan(x+y) = x + c,$$

其中 c 为任意常数. 此外,还有解 $y = k\pi + \frac{\pi}{2} - x, k \in \mathbf{Z}$.

例 3 解微分方程 $(y^2 + 2xy)\mathrm{d}x - x^2\mathrm{d}y = 0$.

分析 微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$ 为一阶齐次伯努利型微分方程.

因 $M = y^2 + 2xy, N = -x^2, \frac{\partial M}{\partial y} = 2y + 2x \neq -2x = \frac{\partial N}{\partial x}$,微分方程不是全微分型,但

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{-M} = \frac{2y + 4x}{-(y^2 + 2xy)} = -\frac{2}{y},$$

可取 $\mu(y)$ 型积分因子.

解 1 方程化为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2},$$

是齐次微分方程. 令 $u = \frac{y}{x}$,有 $y = ux, \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x} = u^2 + 2u$,即 $x\frac{du}{dx} + u = u^2 + 2u, x\frac{du}{dx} = u + u^2, \frac{dx}{x} = \frac{du}{u(1+u)} = \frac{du}{u} - \frac{du}{1+u}$,两边积分得 $\ln|u| - \ln|u+1| = \ln|x| + c_1, \ln\left|\frac{u}{u+1}\right| = \ln|x| + c_1, \frac{u}{u+1} = cx, (1-cx)u = cx$,因 $u = \frac{y}{x}$,故通解为 $(1-cx)y = cx^2, y = \frac{cx^2}{1-cx}$,其中 c 为任意常数. 还有解 $u = 0$,即 $y = 0$,含于通解中.

解 2 方程化为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} = \frac{2}{x}y + \frac{1}{x^2}y^2,$$

为伯努利型微分方程 $n = 2$. 可用 y^{-2} 乘方程两边,再引入变换 $z = y^{-1}$,化为线性微分方程

$$\frac{dz}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx} = -y^{-2}\frac{y^2 + 2xy}{x^2} = -\frac{2}{x}z - \frac{1}{x^2}.$$

应用非齐次线性微分方程通解式得

$$z = e^{\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx}\left[-\int \frac{1}{x^2}e^{-\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx}dx + c_1\right]$$

$$= e^{-2\ln|x|}\left(-\int \frac{e^{2\ln|x|}}{x^2}dx + c_1\right)$$

$$= x^{-2}(-x + c) = cx^{-2} - x^{-1},$$

于是通解为

$$y^{-1} = cx^{-2} - x^{-1}, (c - x)y = x^2, y = \frac{x^2}{c - x},$$

其中 c 为任意常数. 还有解 $y = 0$.

解 3 验证微分方程 $(y^2 + 2xy)dx - x^2dy = 0$ 是否为全微分型方程. 因 $M = y^2 + 2xy, N = -x^2, \frac{\partial M}{\partial y} = 2y + 2x \neq -2x = \frac{\partial N}{\partial x}$,故原方程不是全微分型方程. 但有

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{-M} = \frac{2y + 4x}{-(y^2 + 2xy)} = -\frac{2}{y}.$$

可取 $\mu(y)$ 型积分因子 $\mu(y) = e^{-\int \frac{2}{y}dy} = e^{-2\ln y} = y^{-2}$. 这时有 $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = -\frac{2x}{y^2} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$,是全微分型方程. 有

$$\int \mu M \partial x + \int\left(\mu N - \frac{\partial}{\partial y}\int \mu M \partial x\right)dy$$

$$= \int\left(1 + 2\frac{x}{y}\right)dx + \int\left[-\frac{x^2}{y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left(x + \frac{x^2}{y}\right)\right]dy$$

$$= x + \frac{x^2}{y} = c.$$

即方程有通积分 $x + \frac{x^2}{y} = c$,其中 c 为任意常数. 还有解 $y = 0$.

解 4 用 $\mu = y^{-2}$ 乘全式得 $(1 + 2xy^{-1})dx - x^2y^{-2}dy = 0$,即有

$$dx + y^{-1}dx^2 + x^2dy^{-1} = dx + d(x^2y^{-1}) = 0, x + x^2y^{-1} = c,$$

其中 c 为任意常数. 还有解 $y = 0$.

例 4 解微分方程 $2y'^3 + y' = y$,其中 $y' = \frac{dy}{dx}$.

解 方程缺 x,令 $p=y'$,方程化为 $2p^3+p=y$. 对 x 微分得

$$(6p^2+1)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p,\mathrm{d}x=\left(6p+\frac{1}{p}\right)\mathrm{d}p,x=3p^2+\ln|p|+c.$$

微分方程有以 p 为参数的通解

$$\begin{cases}x=3p^2+\ln|p|+c,\\y=2p^3+p.\end{cases}$$

此外,$y=0$ 亦为解.

例 5 $x\sqrt{1+y'^2}+xy'-y=0.$

解 1 可解出 y,令 $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$,对 $y=f(x,p)$ 有 $p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$. 现 $y=x(\sqrt{1+p^2}+p)$,于是 $p=(\sqrt{1+p^2}+p)+x\left(1+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$,有

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=-\frac{\sqrt{1+p^2}}{x\left(1+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)}=-\frac{1+p^2}{x(\sqrt{1+p^2}+p)},$$

得

$$-\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\sqrt{1+p^2}+p}{1+p^2}\mathrm{d}p=\left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}+\frac{p}{1+p^2}\right)\mathrm{d}p.$$

积分得

$$\ln(p+\sqrt{1+p^2})+\frac{1}{2}\ln(1+p^2)=-\ln|x|+\tilde{c},$$

$$x(p+\sqrt{1+p^2})\sqrt{1+p^2}=\tilde{c},$$

$$x+xp(p+\sqrt{1+p^2})=\tilde{c}.$$

上式代入原方程变为 $x+py=\tilde{c}$. 解得 $p=\frac{\tilde{c}-x}{y}$. 于是有

$$y'=\frac{\tilde{c}-x}{y},y\mathrm{d}y=(\tilde{c}-x)\mathrm{d}x,y^2=cx-x^2,$$

即通解为 $y^2+x^2=cx$,其中 c 为任意常数.

解 2　将方程化为 $x\sqrt{1+y'^2}=y-xy'$,平方后化简之.

$x^2(1+y'^2)=y^2-2xyy'+x^2y'^2, 2xyy'=y^2-x^2, y'=\dfrac{y^2-x^2}{2xy}$.

方程为齐次方程,取变换 $y=xu$,则

$y'=u+xu'=\dfrac{y^2-x^2}{2xy}=\dfrac{u}{2}-\dfrac{1}{2u}, xu'=-\dfrac{u}{2}-\dfrac{1}{2u}=-\dfrac{u^2+1}{2u}$.

分离变量积分得

$$\frac{2u\mathrm{d}u}{u^2+1}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}, \ln(u^2+1)=-\ln|x|+\tilde{c}, x(u^2+1)=c.$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入,通解为 $y^2+x^2=cx$,其中 c 为任意常数.

解 3　将方程化为 $x\sqrt{1+y'^2}=y-xy'$,平方后化简之.

$$x^2(1+y'^2)=y^2-2xyy'+x^2y'^2, 2xyy'=y^2-x^2.$$

分项组合积分

$$2xy\mathrm{d}y=y^2\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}x, -y^2\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y^2=-x^2\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{y^2}{x}\right)=-\mathrm{d}x, \frac{y^2}{x}=c-x, y^2=x(c-x).$$

即通解为 $y^2+x^2=cx$,其中 c 为任意常数.

例 6　试解微分方程 $2y(y'-1)-xy'^2=0$.

解　方程可解出 y,令 $p=y'$,方程化为 $y=\dfrac{xp^2}{2(p-1)}$,对 x 求导得

$$p=\frac{p^2}{2(p-1)}+\left[\frac{xp}{p-1}-\frac{xp^2}{2(p-1)^2}\right]\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

$$=\frac{p^2}{2(p-1)}+\frac{xp(p-2)}{2(p-1)^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{xp(p-2)}{2(p-1)^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p-\frac{p^2}{2(p-1)}=\frac{p(p-2)}{2(p-1)},$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-\frac{p-1}{x}\right]\frac{p(p-2)}{p-1}=0,$$

有解

$$p=0,p=2,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{p-1}{x},$$

前两式代入原方程有解 $y=0$ 及 $y=2x$，后微分式有解 $p=1+cx$，代入方程得通解

$$2cy=(1+cx)^2.$$

例 7 解微分方程 $y'+4y+y^2=0$.

解 方程为伯努利型微分方程 $n=2$. 可引入变换 $z=y^{-1}$，化为线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-y^{-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y^{-2}(-4y-y^2)=4z+1.$$

应用非齐次线性微分方程通解式得

$$z=\mathrm{e}^{\int 4\mathrm{d}x}\left(\int \mathrm{e}^{-\int 4\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c_1\right)=\mathrm{e}^{4x}\left(\int \mathrm{e}^{-4x}\mathrm{d}x+c_1\right)=\mathrm{e}^{4x}c_1-\frac{1}{4},$$

于是

$$y^{-1}=\mathrm{e}^{4x}c_1-\frac{1}{4},(\mathrm{e}^{4x}c-1)y=4.$$

微分方程的通解为 $(\mathrm{e}^{4x}c-1)y=4$，其中 c 为任意常数. 方程还有解 $y=0$.

例 8 解微分方程 $x^2(x-1)y'-y^2-x(x-2)y=0$.

解 方程化为 $y'=\dfrac{x-2}{x(x-1)}y+\dfrac{1}{x^2(x-1)}y^2$，此为伯努利型微分方程 $n=2$. 可引入变换 $z=y^{-1}$，化为线性微分方程：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}&=-y^{-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y^{-2}\left[\frac{x-2}{x(x-1)}y+\frac{1}{x^2(x-1)}y^2\right]\\&=-\frac{x-2}{x(x-1)}z-\frac{1}{x^2(x-1)}.\end{aligned}$$

应用非齐次线性微分方程通解式，由 $\int\dfrac{x-2}{x(x-1)}\mathrm{d}x=$

$\int\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x = 2\ln|x| - \ln|x-1|$ 得

$$z = \mathrm{e}^{-\int\frac{x-2}{x(x-1)}\mathrm{d}x}\left[-\int\frac{1}{x^2(x-1)}\mathrm{e}^{\int\frac{x-2}{x(x-1)}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c_1\right]$$

$$= \frac{x-1}{x^2}\left[-\int\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x + c\right] = \frac{x-1}{x^2}\left(\frac{1}{x-1}+c\right).$$

于是

$$y^{-1} = \frac{(x-1)c+1}{x^2}, y = \frac{x^2}{(x-1)c+1}.$$

微分方程的通解为 $y = \dfrac{x^2}{(x-1)c+1}$,其中 c 为任意常数. 方程还有解 $y = 0$.

例 9 解微分方程 $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$.

解 此为里卡蒂方程,想办法求一特解 $\tilde{y}$,再用变量变换 $z = y - \tilde{y}$ 化为伯努利方程. 可取形如 $\tilde{y} = ax + b$ 的特解,代入得

$$a - 2x(ax+b) + (ax+b)^2 = 5 - x^2,$$

$$a + b^2 - 2bx + 2abx - 2ax^2 + a^2x^2 = 5 - x^2.$$

即

$$a + b^2 = 5, -2b + 2ab = 0, -2a + a^2 = -1.$$

可解得 $a = 1, b = 2$. 即里卡蒂方程有特解 $y = x + 2$.

取变量变换 $z = y - x - 2$,则方程化为

$$(z+x+2)' - 2x(z+x+2) + (z+x+2)^2 = 5 - x^2,$$

$$z' + 4z + z^2 = 0.$$

此为伯努利方程. 由上例 7 知伯努利方程的通解为 $(c\mathrm{e}^{4x} - 1)z = 4$,因此微分方程的通解为 $(c\mathrm{e}^{4x} - 1)(y - x - 2) = 4$,其中 c 为任意常数. 还有解 $z = 0$,即 $y - x = 2$.

§2.2.3 测试练习

试判定下列方程的类型及可能的处理或求解方法,但不必具

体求解(具体求解见[§2.3.1 - 1, §2.4.2 - 1]):

1. 分离变量和变量代换:

(1) $x^2y' - 2xy = y$;

(2) $xy' - xy = x - y - 1$;

(3) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y + \sqrt{x^2 - y^2} = 0$;

(4) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^6 - 2x^2}{2xy^5 + x^2y^2}$;

(5) $x\mathrm{d}y + (y + x^2y^4)\mathrm{d}x = 0$.

2. 积分因子或全微分:

(1) $\frac{y}{x}\mathrm{d}x + (y^3 + \ln x)\mathrm{d}y = 0$;

(2) $\sin x\cos y\mathrm{d}x + \cos x\sin y\mathrm{d}y = 2\sin y\cos y\mathrm{d}y$;

(3) $2xy\mathrm{d}x + (y^2 - x^2)\mathrm{d}y = 0$;

(4) $(x^2 - \sin^2 y)\mathrm{d}x + x\sin 2y\mathrm{d}y = 0$;

(5) $(y + 2xy + y^2)\mathrm{d}x + (x + y)\mathrm{d}y = 0$;

(6) $3x^2y\ln y\mathrm{d}x + (2x^3 + 2y^3 + 3y^3\ln y)\mathrm{d}y = 0$;

(7) $4x^2y^2\mathrm{d}x - (1 - 2x^3y)\mathrm{d}y = 0$;

(8) $x^2 = y^2 - 2xyy'$.

3. 隐方程:

(1) $y'^2 - 2xy' - 8x^2 = 0$;

(2) $y = y'^2 + 2y'^3$;

(3) $x^4y'^2 - xy' + y = 0$;

(4) $y'^2 - yy' + \mathrm{e}^x = 0$;

(5) $y^2y'^2 + 3xy' - y = 0$;

(6) $y(xy' - y)^2 = y - 2xy'$.

4. 特殊类型:

(1) $y' + y\tan x = \sec x$;

(2) $y\mathrm{d}x - (2x + y^4)\mathrm{d}y = 0$;

(3) $y = 2xy' - 4y'^3$;

(4) $3xy' + 2y = 4x^2y^4$;

(5) $y' + y = xy^{\frac{3}{2}}$;

(6) $xy' - y^2 + (2x+1)y = x^2 + 2x$.

§2.3 补充提高

§2.3.1 补充习题

1. 试具体解出分离变量和变量代换方程 §2.2.3 第 1 题.

2. 试具体解出积分因子或全微分方程 §2.2.3 第 2 题.

3. 试具体解出隐方程 §2.2.3 第 3 题.

4. 试具体解出特殊类型方程 §2.2.3 第 4 题.

5. 试推导仅含与 y 有关的积分因子的通解式.

6. 试对下列类型方程证明可将其化为变量可分离方程.

(1) $M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = 0$ 是齐次的;

(2) $yf(xy)\mathrm{d}x + xg(xy)\mathrm{d}y = 0$.

7. 求解下列方程:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\dfrac{x+y-1}{x+y+1}\right)^2$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sin(x+y)$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x^3y^3 + xy}$;

(4) $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = (cP + c')(N - P)$, $P(0) = 0$, 其中 c, c', N 为常数.

(5) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\mu y + c\lambda y^{\alpha}$, $y(0) = y_0$, 其中 μ, c, λ, α 为非零常数, $\alpha < 1$.

8. 求解方程:

(1) $x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x - \sqrt{x^2 - y^2}\mathrm{d}x = 0$;

(2) $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$;

(3) $xy'^3 - 2yy'^2 - 16x^2 = 0$;

(4) $x = yy' + ay'^2$;

(5) $y'^2 - 4xyy' + 8y^2 = 0$.

9. 确定 α,β,使方程 $y' = ax^\alpha + by^\beta$ 通过变换 $y = z^n$ 变成齐次方程.

10. 设 M,N 为 m 次齐次函数,$xM + yN \neq 0$,试求 $M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$ 的积分因子.

11. (1) 证明方程 $M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$ 具有形状为 $\mu = \mu(\varphi(x,y))$ 的积分因子的充要条件是

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\left(N\frac{\partial \varphi}{\partial x} - M\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^{-1} = f(\varphi(x,y)),$$

并求出这个积分因子.

(2) 利用上面 (1) 的结果直接写出方程 $M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$ 具有如下形状的积分因子的充要条件:$\mu(x)$, $\mu(y)$, $\mu(x \pm y)$, $\mu(x^2 \pm y^2)$, $\mu(xy)$, $\mu\left(\frac{y}{x}\right)$, $\mu(x^\alpha y^\beta)$.

(3) 求解微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x + y^3}{x^3 + y}$.

*12. 设方程 $xy' + ay = f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = b$ (a,b 为常数,$a \neq 0$). 求方程当 $x \to 0$ 时存在的解.

13. 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是方程 $y' = p(x)y + q(x)$ 的两个解. 试证明:

(1) 若有关系 $y_2 = zy_1$,则 $z = 1 + ce^{-\int \frac{q(x)}{y_1(x)}\mathrm{d}x}$;

(2) 对方程的任一个解 $y(x)$,恒有 $\frac{y(x) - y_1(x)}{y_2(x) - y_1(x)} = c$,其中 c 为某常数.

14. 试求解拉格朗日 - 达朗贝尔方程 $A(y')y + B(y')x =$

$C(y')$.

*15. (1) 证明可通过勒让德(Legendre)变换 $X = p, Y = px - y$ 将解隐方程 $F(x,y,p) = 0$ 变为解方程 $F(P, XP - Y, X) = 0$,这里 $p = \frac{dy}{dx}, P = \frac{dY}{dX}$. 此称为对偶原理.

(2) 证明连续两次勒让德变换,可回复为原方程;

(3) 利用对偶原理求解方程

(a) $(y - xy')x = y$;

(b) $y^2 = y'^2 + (y'x - y)^2$.

*16. 证明(1) 曲线族 $y = \frac{cf_1(x) + f_2(x)}{cf_3(x) + f_4(x)}$ 所满足的方程(其中 $\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{vmatrix} \neq 0$, c 为常数) 是里卡蒂方程.

(2) 两类特殊里卡蒂方程 $y' + by^2 = cx^m$, $xy' - ay + by^2 = cx^n$ 可互相转换.

(3) 当 $\frac{\pm m}{2(m+2)}$ 及 $\frac{n \pm 2a}{2n}$ 为正整数时,(2) 中的两类特殊里卡蒂方程可经有限次变换解出 (提示:如 $y = c + \frac{x^n}{z}$).

§2.3.2 排疑解惑

(1) **微分方程解的丢失** 常微分方程的求解最基本的就是方程本身是变量分离形式或通过变量变换将方程化为变量分离形式 $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$,然后再移项成 $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$. 因变量各自独立,可积分得 $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$. 在这过程中,如有 $y = y^*$ 使得 $g(y^*) = 0$,则 $y = y^*$ 也是原方程的解. 但移项后,因 $g(y)$ 变为分母,可能会丢失解 $y = y^*$. 因此必须补充判断原方程是否存在常数解. 如存在,其解是否包括在已求得的通解中. 这就是在包括变

量变换的求解过程中必须注意会否丢失或增加方程的解.

(2) **通解** 在[书 §1.2.1 -(4)]给出了通解的定义,在书第二章开始讨论方程的积分或求解.但如$y=c$,$y=e^c$均适合$y'=0$且均含任意常数,均满足通解的定义,但只有$y=c$才是通解.一般而言,通解是指通过积分得到的含任意常数的解,因此其任意常数亦称为积分常数.对积分得到的解,既要检查是否是解及其参数范围以及是否独立,还要考虑是否还有遗留的其他特解.对n阶线性微分方程或方程组通过积分求得的n个独立的任意常数的解是包括方程所有解的通解.而对一般常微分方程,通解的含义并不是指所有解、一切解、全部解.

(3) **初等函数、函数积分与初等解法** 通过变量分离、变量变换及积分因子等方法可将微分方程的求解问题化为积分问题.必须考虑函数的可积性问题.初等函数包括代数函数和超越函数,基本初等函数是实变量或复变量的指数函数、对数函数、幂函数、三角函数和反三角函数经过有限次四则运算及有限次复合后所构成的函数类.虽然初等函数的导数仍是初等函数,但初等函数的原函数却不一定是初等函数,如$\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$,$\int\sin x^2\mathrm{d}x$,$\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$,$\int\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$等.初等函数的反函数也不一定是初等函数.因此必须考虑其原函数可表为有限形式的函数类.一般可分有理函数、无理函数、三角反三角函数、指数对数函数、双曲函数等.有时需要灵活地使用积分技巧.本章所提的初等解法就是通过初等函数及其有限次积分的表达式求解微分方程的方法.在第四章中还将介绍虽不能表为有限形式的初等函数但却有重要应用的被称为特殊函数的一类函数,它们往往直接定义为某特殊微分方程的解.

(4) **积分因子** 将一阶微分方程表示成对称形式方程后,若其左端恰好是某二元函数的全微分,则方程可积、有通解.有判断式可检验对称形式方程是否是恰当方程,若是,又如何解(见[§2.1.3 -(1)]).恰当方程相当罕见,但有时可以通过乘以某积

分因子使其变为恰当方程. 积分因子的寻找需要技巧,所幸的是有缺 y 或缺 x 的特殊积分因子的条件可供判断、寻找,求得积分因为后可用公式求通解式. 更常用的是利用积分因子将若干项拼凑成全微分.

(5) **特殊类型的一阶微分方程** 除书中已讨论的类型外尚有:

(a) 达布方程 $[P(x,y)+xR(x,y)]y'=Q(x,y)+yR(x,y)$, P,R,Q 为齐次多项式,且 P,Q 同次. 用 P 最高幂次除之,可化为齐次方程.

(b) 拉格朗日 - 达朗贝尔方程 $y=xf(y')+g(y')$. 参见[§2.3.1 - 14].

(c) $F(x,xy'-y,y')=0$ 可用勒让德变换 $X=y', Y=xy'-y$ 解之,参见[§2.3.1 - 15].

(d) 阿贝尔方程分第一类(头一个)和第二类(后两个)阿贝尔方程

$$y'=\sum_{v=0}^{3}f_v(x)y^v,\ [y+g(x)]y'=\sum_{v=0}^{3}f_v(x)y^v,$$

$$[g_1(x)y+g_0(x)]y'=\sum_{v=0}^{3}f_v(x)y^v.$$

对不同的特殊形式可通过各种变换求解. 参见[文 25 §1.1.4.10 - 11].

(6) **里卡蒂方程不可积性** 里卡蒂方程 $y'=p(x)+q(x)y+r(x)y^2$ 可看成是线性方程的自然推广,虽然当已知一特解时方程可解,但一般不能用初等方法求解. 如对特殊里卡蒂方程 $y'+By^2=Cx^m$, 仅当 $m=-\dfrac{4k}{2k+1}$, 其中 k 为整数时其解能用初等函数表示. 参见[§2.3.1 - 16(2)、(3) 及 §2.4.2 - 16(2)、(3)].

§2.3.3 应用实例

（1）运动速度与位置

（a）当降落伞张开时，一伞兵正以 $v = 55\ \mathrm{ms}^{-1}$ 的速度降落，若空气阻力为 $Wv^2/25$，其中 W 为人与降落伞的总重量. 试求降落伞张开后伞兵的速度.

（b）在矩形水池一角 Oxy 坐标原点处一小孩拉着 10 m 处位于池边 y 轴上的小船，沿池边 x 轴行走. 问小船移至距 x 轴 6 m 时小孩和小船在水池中的位置. 如图 2.1.

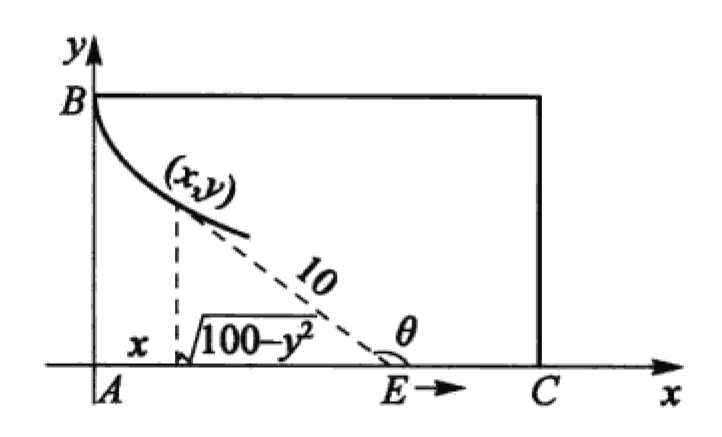


图 2.1　水池中船的移动

解　（a）系统方程为 $\dfrac{W}{g}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = W - \dfrac{Wv^2}{25}, v(0) = 55$. 有 $\dfrac{\mathrm{d}v}{v^2 - 25} = -\dfrac{g}{25}\mathrm{d}t$. 于是 $-\dfrac{g}{25}\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}v}{v^2 - 25} = \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{v-5} - \dfrac{1}{v+5}\right)\mathrm{d}v, \dfrac{v-5}{v+5} = ce^{-\frac{10g}{25}t}$. 代入初值条件得 $c = \dfrac{5}{6}$. 即解为 $\dfrac{v-5}{v+5} = \dfrac{5}{6}\mathrm{e}^{-\frac{10g}{25}t}$,

$$v = 5 \times \frac{6 + 5\mathrm{e}^{-\frac{10g}{25}t}}{6 - 5\mathrm{e}^{-\frac{10g}{25}t}} \approx 5 \times \frac{6 + 5\mathrm{e}^{-4t}}{6 - 5\mathrm{e}^{-4t}}.$$

（b）设小船位于 (x,y) 处，此时小孩应位于 $(x + \sqrt{100 - y^2}, 0)$. 设绳子的斜角为 θ，则有方程 $\tan\theta = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{-y}{\sqrt{100 - y^2}}, y(0) = 10$. 即 $\mathrm{d}x = -\dfrac{\sqrt{100 - y^2}}{y}\mathrm{d}y$，积分得 $x = -\sqrt{100 - y^2} +$

$10\ln\dfrac{10+\sqrt{100-y^2}}{y}+c$. 代入初值条件有 $c=0$. 故解为 $x=-\sqrt{100-y^2}+10\ln\dfrac{10+\sqrt{100-y^2}}{y}$. 当小船移至距 x 轴 6 m 时 $y=6$, 小船位于 $x=-8+10\ln 3\approx 3$ m 的(3,6)处, 小孩在 x 轴距原点 $10\ln 3\approx 11$ m 处.

(2) **物体冷却过程**　在 24 ℃ 空气中的某物体 10 min 内从 150 ℃ 降到 100 ℃, 试求物体降温规律及 20 min 后的温度.

解　物体降温遵从热力学的牛顿冷却定律: 物体温度 $u=u(t)$ 变化速度与物体和所在介质温度差成正比, 即

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-k(u-u_a),$$

其中 $k>0$ 为比例常数(冷却系数、传热系数), u_a 为介质温度. 上式为一阶常微分方程, 可变量分离成 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u-u_a}=-k\mathrm{d}t$, 再两边积分, 得 $\ln(u-u_a)=-kt+\tilde{c}$, 其中 $\tilde{c}$ 为任意常数. 于是有 $u=u_a+\mathrm{e}^{-kt+\tilde{c}}\equiv u_a+c\mathrm{e}^{-kt}$. 将初始条件 $u(0)=u_0$ 代入, 最后得 $u(t)=u_a+(u_0-u_a)\mathrm{e}^{-kt}$. 再利用给定条件 $t=10, u_0=150, u_1=100, u_a=24$, 由上式可计算得 $k=\dfrac{1}{10}\ln\dfrac{63}{38}\approx 0.051$. 即得该物体降温规律为

$$u(t)=24+126\mathrm{e}^{-0.051t}.$$

而 20 min 后的物体温度为 $u_1=u(20)=24+126\mathrm{e}^{-0.051\times 20}\approx 70$ ℃. 如图 2.2.

(3) **气体混合**　一车间体积为 10 800 m^3, 开始时空气中含有 0.12% 的 CO_2(二氧化碳), 为了保证工人的健康, 用一台风量为 1 500 $\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ 的鼓风机鼓入含有 0.04% CO_2 的新鲜空气, 假设通入的空气与原有空气混合均匀后以相同的风量排出. 问鼓风机开动 10 min 后, 车间中含有 CO_2 的百分比降低到多少?

解　设 t 时刻车间中含 $x\%$ 的 CO_2. 在 $t+\Delta t$ 时刻中 CO_2 的改

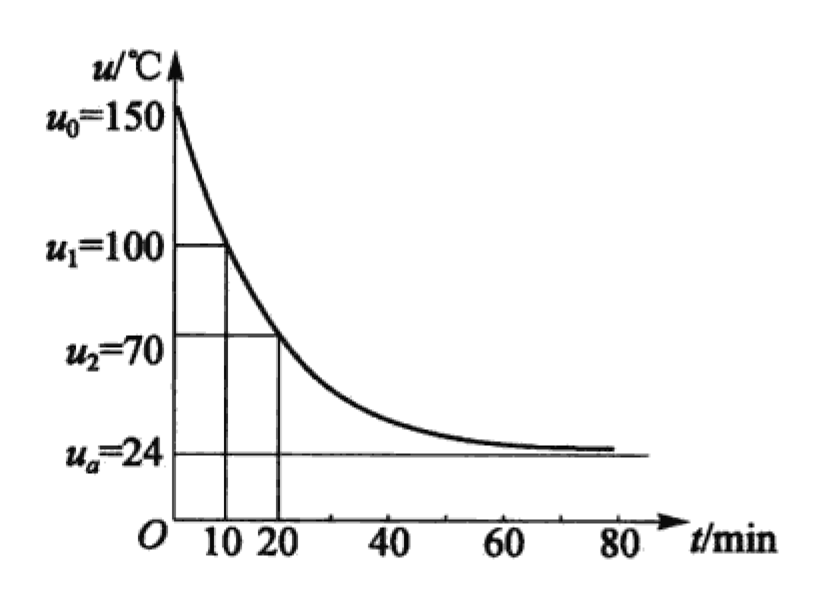


图 2.2　物体降温

变量为鼓入量和排出量之差 $1\,500(0.04-x)\mathrm{d}t$,而车间内 CO_2 的改变量为 $10\,800[x(t+\Delta t)-x(t)]$. 两者应相同,即

$$10\,800[x(t+\Delta t)-x(t)]=1\,500(0.04-x)\Delta t.$$

从而

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=\frac{1\,500}{10\,800}(0.04-x)=\frac{5}{36}(0.04-x).$$

当 $\Delta t\to 0$ 时方程变为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{5}{36}(0.04-x).$$

求得 CO_2 百分比变化的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{5}{36}(0.04-x),$$

初值条件为 $x(0)=0.12$.

可分离变量积分方程:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x-0.04}=-\frac{5}{36}\mathrm{d}t,\int_{0.12}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{x-0.04}=-\int_{0}^{t}\frac{5}{36}\mathrm{d}t,$$

$$\ln\frac{x-0.04}{0.12-0.04}=-\frac{5}{36}t.$$

解为

$$\frac{x-0.04}{0.08}=\mathrm{e}^{-\frac{5}{36}t},x=0.04+0.08\mathrm{e}^{-\frac{5}{36}t}.$$

10 min 后 $x = 0.04 + 0.08e^{-\frac{5}{36}\times 10} \approx 0.06$. 即 CO_2 的百分比降低到 0.06.

(4) **容器中水流出量** 开口面积为 B cm² 的装水容器,当水面高于开口处 h cm 时单位时间从开口处流出的水量为 $0.62B\sqrt{2gh}$,其中 $g = 980$ cm/s² 为重力加速度(见[§7.3.3 - (3)]). 现有直径为 1 m 高为 4 m 的圆筒容器,在底部开有直径 1 cm 的孔,如图 2.3. 问水多少时间流完及多少时间流出水量的一半.

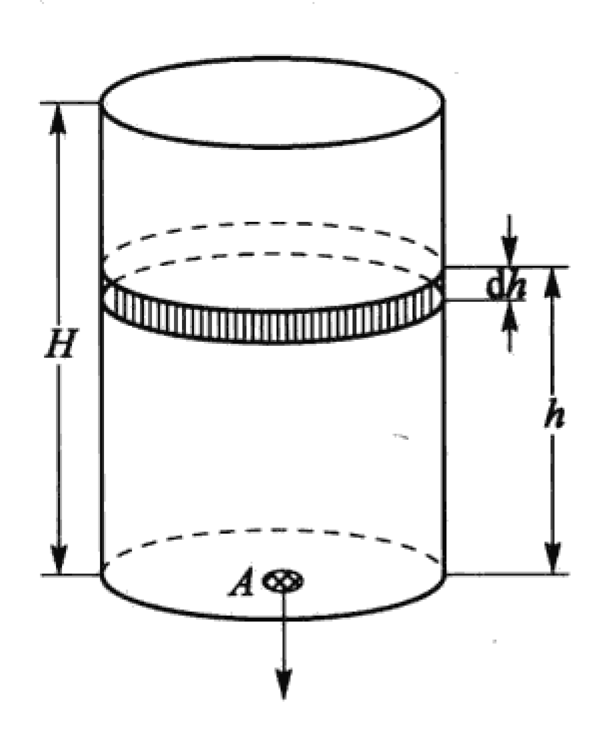


图 2.3 容器中水流出量

解 开口面积为 $B = \pi r^2 = \frac{\pi}{4}$(cm²),根据圆筒形水面高为 h cm 的流出水量变化公式,可得微分方程

$$\frac{d}{dt}\left(\pi \times \frac{100^2}{4}h\right) = -0.62 \times \frac{\pi}{4} \times \sqrt{2 \times g \times h}.$$

即

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{0.62}{100^2} \times \sqrt{2 \times g \times h} = -2A\sqrt{h},$$

$$A = \frac{0.62}{100^2} \times \sqrt{\frac{g}{2}} \approx 1.37 \times 10^{-3}.$$

积分之

$$\frac{dh}{2\sqrt{h}} = -A dt, \int \frac{dh}{2\sqrt{h}} = -A\int dt + C, \quad \sqrt{h} = -At + C.$$

由 $t = 0$ 时，$h = 400$，得 $C = \sqrt{400} = 20$. 于是最后得解

$$\sqrt{h} = -At + 20.$$

当水流完 $h = 0$ 的时间应为

$$t = \frac{20}{A} \approx 1.46 \times 10^4 (s).$$

而水流出水量的一半 $h = 200$ 的时间应为

$$t = \frac{1}{A}(\sqrt{400} - \sqrt{200}) \approx 4.28 \times 10^3 (s).$$

（5）**放射性衰变**　放射性是原子的一种特性，一种物质的放射性与现存的物质的原子数成正比. 如 $N(t)$ 表示 t 时刻的原子数，则有

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t), N(t_0) = N_0.$$

λ 为物质的衰变常数. 一般用物质的半衰期（物质衰变至一半的时间）来衡量物质的衰变速度. 上式有解

$$-\lambda(t - t_0) = \ln\frac{N}{N_0}, N(t) = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

对半衰期有 $\frac{N}{N_0} = \frac{1}{2}$，于是

$$(t - t_0) = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693\ 1}{\lambda}, \lambda = \frac{0.693\ 1}{t - t_0}.$$

铅-210 的半衰期为 22 年，镭-226 的半衰期为 1 600 年. 利用物质的放射性衰变可以测定物质的存在年代. 如图 2.4.

已知有镭-226 存量为 500 g 时，问经过 250 年后镭-226 存量是多少？

解　由前面放射性物质的衰变速度与该时刻物质量成正比及镭-226 的半衰期为 1 600 年可得镭-226 的衰变常数 $\lambda = \frac{0.693\ 1}{1\ 600}$

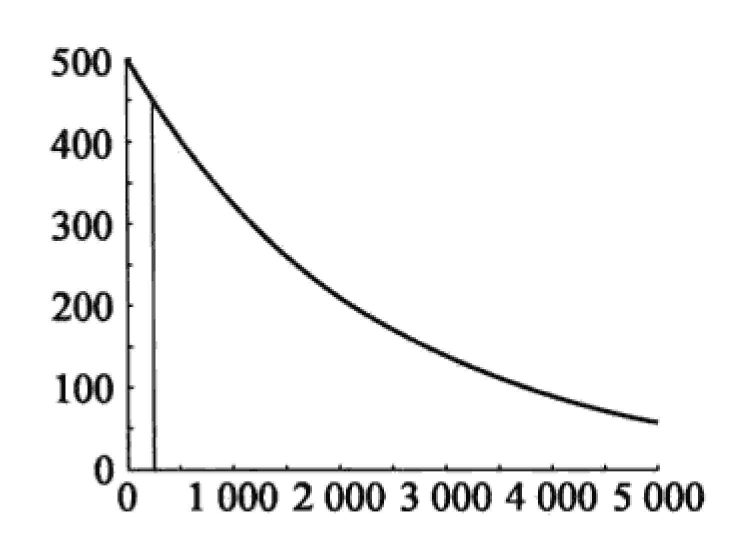


图 2.4　放射性衰变

$= 4.332 \times 10^{-4}$,利用前面求得的解有

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)} = 500e^{-4.332\times10^{-4}\times250} = 500e^{-0.1083} \approx 449.$$

即经过 250 年后镭 -226 存量是 449 g.

(6) **群体增长**　数学生物学家 G. F. Gause 对属于原生动物门的草履虫做了一个群体增长实验. 把五只草履虫放入盛有 0.5 cm^3 的培养基的试管中,六天中每天计算草履虫的数量. 发现当数量不大时,以每天 230.9% 的速度增长,第四天达到 375 只的最高水平,虫体占满了整个试管.

利用人口增长的 logistic 模型模拟草履虫群体的数量增长:

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{N_m}\right)N, N(t_0) = N_0, N(t) \geqslant 0$$

有解(见[书 §1.1 例 3] 和[书 §2.1 例 3])

$$N = \frac{N_m}{1 + \left(\frac{N_m}{N_0} - 1\right)e^{-r(t-t_0)}}.$$

因 $r = 2.309, N_m = 375$,可求得

$$N = \frac{375}{1 + 74e^{-2.309t}}$$

这与实际数据非常一致,见图 2.5([文 10 §5]).

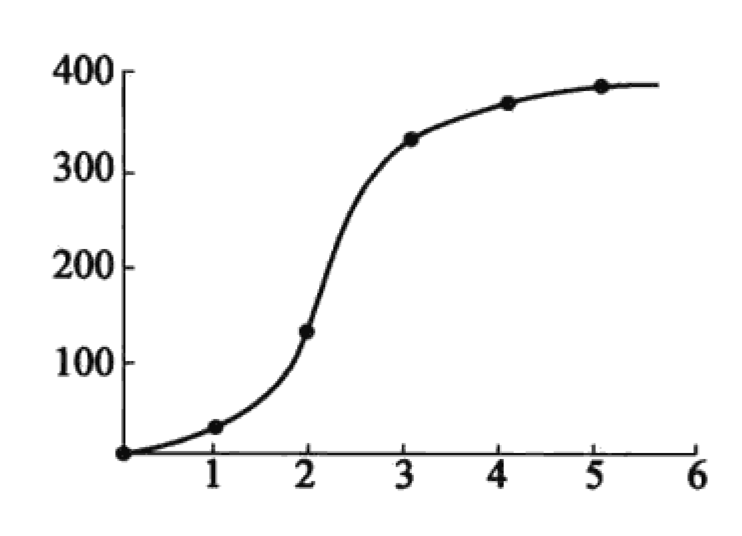


图 2.5　草履虫数量

§2.3.4　历史与人物

（1）**简史（一阶微分方程）**　一阶常微分方程与微积分的开创同时出现，因此，微积分的创立者牛顿和莱布尼茨均对其初等解法作出过贡献．牛顿完全解出了二体问题的微分方程和正交轨线问题．莱布尼茨探索变量变换方法，解出了很多简单的微分方程．伯努利兄弟和里卡蒂讨论特殊微分方程解法．约翰·伯努利曾为解决了悬链线问题而其哥哥詹姆斯没有成功而沾沾自喜．詹姆斯·伯努利则推导出跟踪曲线方程并提出伯努利方程．克莱罗和欧拉研究了恰当方程和积分因子方法．拉格朗日也解出了一些特殊的方程．刘维尔证明了仅特殊类型的里卡蒂方程可化为伯努利方程求解．求解一阶方程的所有初等方法到 1740 年都已清楚了．

（2）**莱布尼茨**（G. W. Leibnitz，1646—1716）　德国百科全书式的天才．莱比锡某大学教授之子，他一面从事政治外交活动，一面对各种科学、技术有创造性的贡献．他的遗稿分类整理为神学、哲学、数学、自然科学、历史和技术等 41 个项目．1672—1676 年在巴黎时（与牛顿同时独立地）发现微积分学的基本定理，引入巧妙的记号如 d，$\int$ 等建立了微积分学的基础．同时也对一阶常微分方程的求解进行过研究．并曾构思符号逻辑和计算机．1700 年在他

的影响下创立柏林科学院.

(3) **伯努利(Bernoulli)家族** 17、18世纪瑞士的伯努利家族出了8位数学家,其中3位是杰出数学家.詹姆斯·伯努利(1654—1705)初学神学,后转数学,为巴塞尔大学教授.研究特殊曲线,发明极坐标,引入 $\tan x$ 的幂级数展式的伯努利数,提出了概率论的大数定理(伯努利定理).他的弟弟约翰·伯努利(1667—1748)初学医,后亦转数学.开始为荷兰某大学教授,后亦为巴塞尔大学教授.他用微积分解决了几何学、微分方程和力学的很多问题.1696年他曾提出速降线问题向全欧洲挑战,后为牛顿、莱布尼茨及伯努利兄弟所解决.他的儿子丹尼尔·伯努利(1700—1782)初亦学医,后为彼得堡的数学教授,1733年回巴塞尔,先后任植物学、解剖学与物理学教授.在物理学、概率论和微分方程方面多有贡献.著有名著《流体动力学》.曾获法兰西科学院的10项奖.被认为是第一位真正的数学物理学家.

(4) **里卡蒂**(C. J. F. Riccati,1676—1754) 意大利学者,写过数学、物理和哲学著作.曾被邀去彼得堡任科学院院长,但未赴任.他仅讨论过里卡蒂方程的一些特例,但未给出解法.这些特例后被伯努利家族一些成员成功解决.刘维尔证明一般的里卡蒂方程不能用有限项的初等函数解出.

(5) **利比**(W. F. Libby) 化学家.放射性碳测定年代法的发明者,1950年他和助手已搞出一套利用放射性碳测定时期的方法,对几千年至5万年前的时代,其方法相当准确.其方法的依据就是放射性元素衰变的常微分方程.利比因这工作获1960年诺贝尔化学奖.

历史人物尚有:牛顿([§1.3.4-(2)]),欧拉([§1.3.4-(3)]),克莱罗([§3.3.4-(5)]),拉格朗日([§5.3.4-(2)]),刘维尔([§8.3.4-(4)]).

§2.4　习题与习题解答

§2.4.1　测试练习解答

1. (1) 分离变量$\frac{dy}{y}=\frac{(1+2x)dx}{x^2}$.

(2) 可改写为分离变量方程$xy'=xy+x-y-1=(x-1)\cdot(y+1)$.

(3) 改写为$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}+\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}=0$,可用变换$u=\frac{y}{x}$化为变量分离方程.

(4) 化为$\frac{1}{3}\frac{dy^3}{dx}=\frac{y^6-2x^2}{2xy^3+x^2}$,令$z=y^3$,可变为$x,z$的齐次方程$\frac{dz}{dx}=\frac{3z^2-6x^2}{2xz+x^2}$.

(5) 化为$xdy+ydx+x^2y^4dx=d(xy)+(xy)^4x^{-2}dx=0$.

2. (1) $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0$,方程为恰当方程.

(2) $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=-\sin x\sin y+\sin x\sin y=0$,方程为恰当方程.

(3) $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2x-(-2x)=4x\neq 0$,方程不是恰当的. 但$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=-\frac{2}{y}$仅含$y$,有积分因子$\mu=e^{-\int\frac{2}{y}dy}=y^{-2}$.

(4) $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=-\sin 2y-\sin 2y=-2\sin 2y\neq 0$,方程不是恰当的. 但$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=-\frac{2}{x}$仅含$x$,有积分因子$\mu=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=x^{-2}$.

(5) $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2(x+y)\neq 0$方程不是恰当的. 但$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=2$,存在仅含 x 的积分因子 $\mu=\mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{2x}$.

(6) $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=3x^2\ln y-3x^2\neq 0$, 方程不是恰当的. 但 $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\frac{1-\ln y}{y\ln y}$, 仅含 y, 有积分因子 $\mu=\mathrm{e}^{\int\frac{1-\ln y}{y\ln y}\mathrm{d}y}=\mathrm{e}^{\int\left(\frac{1}{\ln y}-1\right)\mathrm{d}(\ln y)}=\frac{\ln y}{y}$.

(7) $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2x^2y\neq 0$, 方程不是恰当的. 但$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=-\frac{1}{2y}$, 仅含 y,有积分因子 $\mu=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{2y}\mathrm{d}y}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln y}=y^{-\frac{1}{2}}$.

(8) 方程化为$(-x^2+y^2)\mathrm{d}x-2xy\mathrm{d}y=0$. $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=-\frac{2}{x}$,有积分因子 $\mu=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}=x^{-2}$.

3. (1) 方程缺 y, 可令 $y'=p=tx$. 亦可直接分解为$(y'-4x)(y'+2x)=0$.

(2) 方程缺 x,可取参数 $y'=p$,并对 y 求导.

(3) 令 $p=y'$ 解出 $y=f(x,y')=xp-x^4p^2$, 可利用 $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$,化为$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$的方程解之.

(4) 令 $p=y'$,方程化为 $p^2-yp+\mathrm{e}^x=0$,方程关于 y 可解 $y=p+\frac{\mathrm{e}^x}{p}$,两边对 x 求导再解之.

(5) 可解出 $x=f(y,y')$,令 $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{p}$,化为$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$的

方程解之.

(6) 方程化为 $yx^2y'^2-2x(y^2-1)y'+y(y^2-1)=0$,将方程视为 y' 的二次多项式方程,有解

$$y'=\frac{1}{2yx^2}[2x(y^2-1)\pm 2x(1-y^2)^{\frac{1}{2}}]$$

$$=\frac{y}{x}+\frac{1}{xy}[-1\pm(1-y^2)^{\frac{1}{2}}].$$

上微分方程为变量分离方程

$$\frac{y\mathrm{d}y}{(y^2-1)\pm(1-y^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

4. (1) 方程为非齐次线性微分方程 $P=-\tan x, Q=\sec x$. 可用通解式解之.

(2) 以 y 为自变量,x 为因变量. 方程变为非齐次线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{2x}{y}+y^3$.

(3) 此为拉格朗日方程. 令 $p=y'$,方程为 $y=2xp-4p^3$. 对 x 求导,有

$$y'=p=2p+(2x-12p^2)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}=12p-\frac{2}{p}x$$

为 x 的非齐次线性方程.

(4) 化为 $y'+\frac{2}{3x}y=\frac{4}{3}xy^4$,是伯努利方程,$n=4\neq 0,1$. 可取 $z=y^{1-4}=y^{-3}$,化为非齐次线性方程.

(5) $y'=-y+xy^{\frac{3}{2}}$ 为伯努利方程,$n=\frac{3}{2}\neq 0,1$. 令 $z=y^{-\frac{1}{2}}$ 可化为非齐次线性方程.

(6) 化为里卡蒂方程 $y'=\frac{y^2}{x}-\left(\frac{2x+1}{x}\right)y+x+2$,易观察得一特解 $y=x$. 可取变换 $y=z+x$ 化为伯努利方程解之.

§2.4.2 补充习题解答

1. (1) $y=0$ 为方程的解. $y\neq 0$ 时分离变量 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{(1+2x)\mathrm{d}x}{x^2}$ $=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x$. 积分得 $\ln|y|=-x^{-1}+2\ln|x|+\tilde{c}$, $\frac{y}{x^2}=ce^{-\frac{1}{x}}$, $y=cx^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$,其中 c 为任意常数(含 $y=0$).

(2) $y=-1$ 为方程的解. $y\neq -1$ 时改写为分离变量方程 $xy'=xy+x-y-1=(x-1)(y+1)$, $\frac{\mathrm{d}y}{y+1}=\frac{x-1}{x}\mathrm{d}x$,积分得 $\ln|y+1|=x-\ln|x|+\tilde{c}$, $x(y+1)=ce^x$,其中 c 为任意常数(含 $y=-1$).

(3) 方程要求 $|y|\leqslant|x|$,改写为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{y}{x}+\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}=0$, 取变换 $u=\frac{y}{x}$, $u'=-\frac{y}{x^2}+\frac{y'}{x}=-\frac{1}{x}\sqrt{1-u^2}$. 得 $\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$, 得 $\arcsin u=-\ln|x|+\tilde{c}$, $x=ce^{-\arcsin u}$, 解为 $x=ce^{-\arcsin\frac{y}{x}}$ $(|y|<|x|)$,或 $y=x\sin(c-\ln|x|)$,其中 c 为任意常数. 还有解 $y=x$.

(4) 化为 $\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}y^3}{\mathrm{d}x}=\frac{y^6-2x^2}{2xy^3+x^2}$,令 $z=y^3$,可变为 x,z 的齐次方程 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{3z^2-6x^2}{2xz+x^2}$. 再令 $z=xu$,有

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-u+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-u+\frac{3u^2-6}{2u+1}=\frac{u^2-u-6}{2u+1},$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{(2u+1)\mathrm{d}u}{(u+2)(u-3)}=\left(\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{u-3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{u+2}\right)\mathrm{d}u,$$

积分得

$$7\ln|u-3|+3\ln|u+2|=5\ln|x|+\tilde{c},$$

$$(u-3)^7(u+2)^3=cx^5,(z-3x)^7(z+2x)^3=cx^{15}.$$

最后通解为$(y^3-3x)^7(y^3+2x)^3=cx^{15}$,其中$c$为任意常数.本题尚有特解$u=3,u=-2$.即$y^3=3x,y^3=-2x$,它们对应于通解中的$c=0$.

(5) 化为$x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x+x^2y^4\mathrm{d}x=\mathrm{d}(xy)+(xy)^4x^{-2}\mathrm{d}x=0$,为变量分离方程.即

$$\frac{\mathrm{d}(xy)}{(xy)^4}=-x^{-2}\mathrm{d}x,\ -\frac{1}{3}(xy)^{-3}=x^{-1}+c,3(cx+1)x^2y^3=-1,$$

其中c为任意常数.还有解$y=0$.

2. (1) $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0$,方程为恰当方程.直接使用公式

$$\int\frac{y}{x}\partial x+\int\left(y^3+\ln x-\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{y}{x}\partial x\right)\mathrm{d}y$$

$$=y\ln x+\int y^3\mathrm{d}y=y\ln x+\frac{1}{4}y^4=\tilde{c},$$

通解为$4y\ln x+y^4=c$,其中c为任意常数.

(2) $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=-\sin x\sin y+\sin x\sin y=0$,方程为恰当方程.方程变为

$$-\cos y\mathrm{d}(\cos x)-\cos x\mathrm{d}(\cos y)=-\mathrm{d}(\cos x\cos y)=2\sin y\mathrm{d}\sin y.$$

积分得通解$\cos x\cos y+\sin^2 y=c$,其中c为任意常数.

或直接使用公式

$$\int(\sin x\cos y)\partial x+\int\left[\cos x\sin y-2\sin y\cos y-\frac{\partial}{\partial y}\int(\sin x\cos y)\partial x\right]\mathrm{d}y$$

$$=-\cos x\cos y-\int 2\sin y\cos y\mathrm{d}y$$

$$=-\cos x\cos y-\sin^2 y=-c.$$

(3) **解 1**　因$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=-\dfrac{2}{y}$仅含 y,有积分因子$\mu=e^{-\int\frac{2}{y}dy}=y^{-2}$. 即

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=-2xy^{-2},\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}=-2xy^{-2}.$$

现求 u,使它同时满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy^{-1},\frac{\partial u}{\partial y}=1-x^2y^{-2},$$

由第一式对 x 积分得 $u=x^2y^{-1}+\varphi(y)$,于是

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-x^2y^{-2}+\frac{d\varphi(y)}{dy}=1-x^2y^{-2},\frac{d\varphi(y)}{dy}=1,\varphi(y)=y,$$

求得 $u=x^2y^{-1}+y$. 即通解为 $x^2y^{-1}+y=c$,其中 c 为任意常数. 还有解 $y=0$.

解 2　知有积分因子$\mu=e^{-\int\frac{2}{y}dy}=y^{-2}$后可直接应用恰当方程通解式(见[§2.4.2 - 5])

$$\int\mu M\partial x+\int\left(\mu N-\frac{\partial}{\partial y}\int\mu M\partial x\right)dy$$

$$=x^2y^{-1}+\int(1-x^2y^{-2}+x^2y^{-2})dy=x^2y^{-1}+y=c.$$

还有解 $y=0$.

解 3　直接求全微分式

$$\begin{aligned}2xydx+(y^2-x^2)dy&=ydx^2-x^2dy+y^2dy\\&=y^2d\left(\frac{x^2}{y}\right)+y^2dy=0.\end{aligned}$$

于是$d\left(\dfrac{x^2}{y}\right)+dy=0,\dfrac{x^2}{y}+y=c$,其中 c 为任意常数. 还有解$y=0$.

(4) **解 1**　$\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}=-\sin 2y-\sin 2y=-2\sin 2y\neq 0$,方程不是恰当的. 但$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=-\dfrac{2}{x}$仅含 x,有积分因子$\mu=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=$

x^{-2}. 应用恰当方程通解式

$$\int \mu M \partial x + \int \left[\mu N - \frac{\partial}{\partial y}\int \mu M \partial x\right] dy$$

$$= x + x^{-1}\sin^2 y + \int (x^{-1}\sin 2y - x^{-1}2\sin y\cos y)\, dy$$

$$= x + x^{-1}\sin^2 y = c.$$

求得通解 $x^2 + \sin^2 y = cx$，其中 c 为任意常数.

解 2　直接求全微分式

$$(x^2 - \sin^2 y)\,dx + x\sin 2y\,dy = x^2 dx - \sin^2 y\,dx + x\,d(\sin^2 y)$$

$$= x^2 dx + x^2 d\left(\frac{\sin^2 y}{x}\right) = 0.$$

于是 $dx + d\left(\frac{\sin^2 y}{x}\right) = 0, x + \frac{\sin^2 y}{x} = c, x^2 + \sin^2 y = cx$，其中 c 为任意常数.

(5) $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2(x + y) \neq 0$ 方程不是恰当的. 但 $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = 2$，存在仅含 x 的积分因子 $\mu = e^{\int 2dx} = e^{2x}$. 于是有解

$$\int \mu M \partial x + \int \left(\mu N - \frac{\partial}{\partial y}\int \mu M \partial x\right) dy$$

$$= \int e^{2x}(y + 2xy + y^2)\,\partial x$$

$$+ \int \left[(e^{2x}(x + y) - \frac{\partial}{\partial y}\int e^{2x}(y + 2xy + y^2)\,\partial x\right] dy$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}(y^2 + 2xy)$$

$$+ \int [(e^{2x}(x + y) - e^{2x}(y + x)]\, dy$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}(y^2 + 2xy) = \tilde{c}.$$

方程的通解为 $\frac{1}{2}y^2 e^{2x} + xye^{2x} = c$，其中 c 为任意常数.

(6) $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=3x^2\ln y+3x^2-6x^2\neq 0$,方程不是恰当的,但 $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\frac{1-\ln y}{y\ln y}$ 仅含 y,有积分因子 $\mu=e^{\int\frac{1-\ln y}{y\ln y}dy}=e^{-\int\left(1-\frac{1}{\ln y}\right)d(\ln y)}=\frac{\ln y}{y}$,于是

$$\int\mu M\partial x+\int\left(\mu N-\frac{\partial}{\partial y}\int\mu M\partial x\right)dy$$

$$=\int\frac{\ln y}{y}\cdot 3x^2y\ln y\partial x+\int\left[\frac{\ln y}{y}(2x^3+2y^3+3y^3\ln y)-\frac{\partial}{\partial y}(x^3\ln^2 y)\right]dy$$

$$=x^3\ln^2 y+\int[2y^2\ln y+3y^2\ln^2 y]dy=x^3\ln^2 y+y^3\ln^2 y=c.$$

方程的通解为 $(x^3+y^3)\ln^2 y=c$,其中 c 为任意常数(含特解 $y=1$).

(7) $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2x^2y\neq 0$,方程不是恰当的,但 $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=-\frac{1}{2y}$,仅含 y,有积分因子 $\mu=e^{-\int\frac{1}{2y}dy}=e^{-\frac{1}{2}\ln y}=y^{-\frac{1}{2}}$. 由

$$4x^2y^{\frac{3}{2}}dx-(y^{-\frac{1}{2}}-2x^3y^{\frac{1}{2}})dy=d\left(\frac{4}{3}x^3y^{\frac{3}{2}}\right)-y^{-\frac{1}{2}}dy=0,$$

存在积分 $\frac{4}{3}x^3y^{\frac{3}{2}}-2y^{\frac{1}{2}}=\tilde{c}$, $4x^3y^{\frac{3}{2}}-6y^{\frac{1}{2}}=c$,其中 c 为任意常数(含特解 $y=0$).

(8) 方程化为 $(-x^2+y^2)dx-2xydy=0$. $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=-\frac{2}{x}$,有积分因子 $\mu=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=x^{-2}$. 用 x^{-2} 乘全式用公式或组合可得解

$-\mathrm{d}x+\dfrac{y^2\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y^2}{x^2}=0$，$-x-\dfrac{y^2}{x}=-c$ 或 $x^2+y^2=cx$.

3. (1) 方程缺 y. 令 $y'=p=tx$,得 $t^2-2t-8=0$,$t=4$,$t=-2$. 分别解得 $y'=4x$,$y=2x^2+c$ 及 $y'=-2x$,$y=-x^2+c$,其中 c 为任意常数. 它们均为方程的解.

亦可直接分解为 $(y'-4x)(y'+2x)=0$. 分别就 $y'-4x=0$, $y'+2x=0$ 解得

$$y=2x^2+c;y=-x^2+c,$$

其中 c 为任意常数.

(2) 方程缺 x,可令 $y'=p$,方程化为 $y=p^2+2p^3$,$y'=p=2p(1+3p)p'$. 有解 $p=0$,$y=\tilde{c}$ 及 $2(1+3p)\mathrm{d}p=\mathrm{d}x$,$x=2p+3p^2+c$. 验证 $\tilde{c}=0$. 解为 $y=0$ 及

$$\begin{cases}y=p^2+2p^3,\\x=2p+3p^2+c.\end{cases}$$

其中 p 为参数,c 为任意常数.

(3) 令 $p=y'$,可解出 $y=f(x,y')=xp-x^4p^2$,因 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$. 有

$$p=p-4x^3p^2+(x-2x^4p)p',$$

即

$$(x-2x^4p)\mathrm{d}p=4x^3p^2\mathrm{d}x,(1-2x^3p)\mathrm{d}p=4x^2p^2\mathrm{d}x.$$

由 2(7) 知可积分,求得 $4x^3p^{\frac{3}{2}}-6p^{\frac{1}{2}}=c$ 方程的通解为

$$\begin{cases}y=xp-x^4p^2,\\4x^3p^{\frac{3}{2}}-6p^{\frac{1}{2}}=c.\end{cases}$$

其中 p 为参数,c 为任意常数.

(4) 令 $p=y'$ 方程化为 $p^2-yp+\mathrm{e}^x=0$,方程关于 y 可解 $y=p+\dfrac{\mathrm{e}^x}{p}$. 两边对 x 求导再解之.

$$p = \frac{e^x}{p} + \left(1 - \frac{e^x}{p^2}\right)\frac{dp}{dx},$$

$$(e^x p - p^3)dx + (p^2 - e^x)dp = (p^2 - e^x)(dp - pdx) = 0.$$

有解 $p = \pm e^{\frac{x}{2}}, y' = \pm e^{\frac{x}{2}}, y = \pm 2e^{\frac{x}{2}} + \tilde{c}$ 及 $\frac{dp}{p} = dx, p = ce^x, y' = ce^x, y = ce^x + \bar{c}$. 代入验证得 $\tilde{c} = 0, \bar{c} = \frac{1}{c}$. 最后解为 $y = \pm 2e^{\frac{x}{2}}$ 及 $cy = c^2e^x + 1$,其中 c 为任意常数.

(5) 可解出 $x = f(x, y')$,令 $y' = \frac{dy}{dx} = p, \frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$. 因 $x = f = \frac{y - y^2p^2}{3p}$ 有

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy} \\ &= \frac{1 - 2yp^2}{3p} + \frac{-6y^2p^2 - 3(y - y^2p^2)}{9p^2}\frac{dp}{dy},\end{aligned}$$

即

$$\frac{1 - 2yp^2}{3p} - \frac{y^2p^2 + y}{3p^2}\frac{dp}{dy} = \frac{1}{p},$$

$$\frac{y^2p^2 + y}{3p^2}\frac{dp}{dy} = \frac{1 - 2yp^2}{3p} - \frac{1}{p} = \frac{-2(1 + yp^2)}{3p},$$

可分解为

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{2p}{y} \text{ 及 } 1 + yp^2 = 0.$$

第一式有解 $py^2 = c$,将 $p = cy^{-2}$ 代入原式得 $c^2 + 3xc - y^3 = 0$,其中 c 为任意常数. 此为方程的通解. 方程还有解 $y = 0$.

第二式代入原式可简化为 $-y + 3xp - y = 0, p = \frac{2y}{3x}$. 再代入第二式最后得 $4y^3 + 9x^2 = 0$. 此为奇解.

(6) 由[§2.4.1 - 3(6)],方程化为变量分离方程

$$\frac{y\mathrm{d}y}{(y^2-1)\pm(1-y^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

令 $u=(1-y^2)^{\frac{1}{2}}$，$\mathrm{d}u=-(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}y\mathrm{d}y=-u^{-1}y\mathrm{d}y$，上式化为

$$\frac{-u\mathrm{d}u}{-u^2\pm u}=\frac{\mathrm{d}u}{u\mp 1}=\frac{\mathrm{d}x}{x},u\mp 1=cx,(1-y^2)=(cx\pm 1)^2.$$

方程通解为 $y^2+(cx\pm 1)^2=1$ 及 $y=\pm 1$，其中 c 为任意常数. 还有解 $y=0$，含于通解中.

4. (1) 非齐次线性微分方程 $P=-\tan x$，$Q=\sec x$ 有通解

$$y=\mathrm{e}^{-\int\tan x\mathrm{d}x}\left(\int\sec x\mathrm{e}^{\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right)=\cos x\left(\int\frac{\sec x}{\cos x}\mathrm{d}x+c\right)$$

$$=\cos x(\tan x+c)=\sin x+c\cos x.$$

其中 c 为任意常数.

(2) 以 y 为自变量，x 为因变量. 方程变为非齐次线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{2x}{y}+y^3$ 有通解 $x=\mathrm{e}^{\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\left(\int y^3y^{-2}\mathrm{d}y+c\right)=y^2\left(\frac{1}{2}y^2+c\right)=\frac{1}{2}y^4+cy^2$. 即 $x=\frac{1}{2}y^4+cy^2$，其中 c 为任意常数. 此外，还有解 $y=0$.

(3) 此为拉格朗日方程. 令 $p=y'$，方程为 $y=2xp-4p^3$，对 x 求导，有

$$y'=p=2p+(2x-12p^2)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}=-\frac{2}{p}x+12p,$$

为 x 的非齐次线性方程. 有解

$$x=\mathrm{e}^{\int-\frac{2}{p}\mathrm{d}p}\left(\int 12p\mathrm{e}^{\int\frac{2}{p}\mathrm{d}p}\mathrm{d}p+c\right)=p^{-2}\left(12\int p^3\mathrm{d}p+c\right)$$

$$=cp^{-2}+3p^2.$$

方程解为

$$\begin{cases}y=2xp-4p^3,\\x=cp^{-2}+3p^2.\end{cases}$$

其中 p 为参数，c 为任意常数. 尚有解 $y=0$.

(4) 化为 $y' + \frac{2}{3x}y = \frac{4}{3}xy^4$ 为伯努利方程. 以 y^{-4} 乘方程

$$y^{-4}y' + \frac{2}{3x}y^{-3} = \frac{4}{3}x,$$

取 $z = y^{1-4} = y^{-3}$,则化为非齐次方程 $z' = -3y^{-4}y' = \frac{2}{x}z - 4x$,有

$$z = e^{\int \frac{2}{x}dx}\left(-\int 4xx^{-2}dx + c\right) = (c - 4\ln|x|)x^2.$$

原方程有通解 $y = (c-4\ln|x|)^{-\frac{1}{3}}x^{-\frac{2}{3}}$,其中 c 为任意常数. 还有解 $y = 0$.

(5) $y' = -y + xy^{\frac{3}{2}}$ 为伯努利方程 $n = \frac{3}{2} \neq 0,1$. 令 $z = y^{-\frac{1}{2}}$,

方程化为非齐次线性方程 $z' = -\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}y' = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}x$ 有通解

$$z = e^{\int \frac{1}{2}dx}\left(-\int \frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}dx + c\right) = e^{\frac{1}{2}x}\left(c + xe^{-\frac{1}{2}x} + 2e^{-\frac{1}{2}x}\right)$$

$$= ce^{\frac{1}{2}x} + x + 2.$$

得 $y^{-\frac{1}{2}} = ce^{\frac{1}{2}x} + x + 2, y = (ce^{\frac{1}{2}x} + x + 2)^{-2}$,其中 c 为任意常数. 还有解 $y = 0$.

(6) 化为里卡蒂方程 $y' = \frac{y^2}{x} - \left(\frac{2x+1}{x}\right)y + x + 2$,易观察得一特解 $y = x$. 可取变换 $y = z + x$,方程化为伯努利方程

$$z' = y' - 1 = \frac{(z+x)^2}{x} - \left(\frac{2x+1}{x}\right)(z+x) + x + 1 = \frac{z^2}{x} - \frac{z}{x}.$$

以 z^{-2} 乘方程

$$z^{-2}z' = -\frac{1}{xz} + \frac{1}{x},$$

当 $z \neq 0$ 时取 $u = z^{1-2} = z^{-1}$,则化为非齐次方程 $u' = -z^{-2}z' = \frac{1}{xz} - \frac{1}{x} = \frac{u}{x} - \frac{1}{x}$. 有通解

$$u = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(-\int \frac{1}{x}x^{-1}dx + c\right) = x\left(\frac{1}{x} + c\right) = 1 + cx.$$

于是 $y - x = z = u^{-1} = (1 + cx)^{-1}$,即原方程有通解 $(y - x)(1 + cx) = 1$,其中 c 为任意常数. 对 u 尚有 $z = 0$,即 $y = x$ 未考虑,代入原方程知其为解,即原方程尚有解 $y = x$.

5. 对称形式的一阶微分方程 $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ 有只与 y 有关的积分因子的充要条件是

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}}{-M} = \varphi(y).$$

有积分因子 $\mu = e^{\int \varphi(y)dy}$. 于是 $e^{\int \varphi(y)dy}M(x,y)dx + e^{\int \varphi(y)dy}N(x,y)dy = 0$, $\frac{\partial(e^{\int \varphi(y)dy}M)}{\partial x} = \frac{\partial(e^{\int \varphi(y)dy}N)}{\partial y}$. 得通解式

$$\int e^{\int \varphi(y)dy}M(x,y)\partial x + \int \left[e^{\int \varphi(y)dy}N - \frac{\partial}{\partial y}\int e^{\int \varphi(y)dy}M(x,y)\partial x\right]dy = c,$$

其中 $\int(*)\partial x$ 积分号内的积分是偏积分,视 y 为参数,仅对 x 积分.

6. (1) 取变量变换 $y = ux$, $dy = udx + xdu$. 因 $Mdx + Ndy = 0$ 是 n 次齐次的, 可变为 $x^n\left[M_1\left(\frac{y}{x}\right)dx + N_1\left(\frac{y}{x}\right)dy\right] = 0$, 即 $M_1(u)dx + N_1(u)(udx + xdu) = 0$ 或 $(M_1(u) + uN_1(u))dx + xN_1(u)du = 0$,得变量可分离方程 $\frac{dx}{x} = \frac{-N_1(u)du}{M_1(u) + uN_1(u)}$.

(2) 取变量变换 $y = \frac{u}{x}$, $dy = -\frac{u}{x^2}dx + \frac{du}{x}$. 方程变为 $\frac{u}{x}f(u)dx + g(u)\left(du - \frac{u}{x}dx\right) = 0$, 即 $\frac{u}{x}[f(u) - g(u)]dx + g(u)du = 0$,

$\frac{dx}{x} = -\frac{g(u)du}{u[f(u) - g(u)]}$. 此为变量可分离方程.

7. (1) 令 $z = x + y + 1$, $\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{(z-2)^2}{z^2} =$

$\frac{2(z^2-2z+2)}{z^2}$,即

$$\frac{z^2\mathrm{d}z}{z^2-2z+2}=\left(1+\frac{2z-2}{z^2-2z+2}\right)\mathrm{d}z=2\mathrm{d}x,$$

积分得 $z+\ln|z^2-2z+2|=2x+\tilde{c}, z^2-2z+2=ce^{2x-z}$. 即解为

$$(x+y+1)^2-2(x+y+1)+2=ce^{2x-(x+y+1)},$$

$$(x+y)^2+1=ce^{x-y-1},$$

其中 $c>1$ 为任意常数.

(2) 令 $z=x+y$,则由 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,方程变为 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1+\sin z$.

分离变量得 $\frac{\mathrm{d}z}{1+\sin z}=\mathrm{d}x$. 将其左端分子分母同乘 $1-\sin z$,化为易于积分形式

$$\frac{\mathrm{d}z}{1+\sin z}=\frac{(1-\sin z)\mathrm{d}z}{1-\sin^2 z}=\frac{(1-\sin z)\mathrm{d}z}{\cos^2 z}$$

$$=(\sec^2 z-\sec z\tan z)\mathrm{d}z=\mathrm{d}x.$$

两端积分得 $\tan z-\sec z=x-c$. 化简得 $-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{z}{2}\right)=x-c$.

原方程的积分为 $x+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x+y}{2}\right)=c$,其中 c 为积分常数.

(3) 令 $u=xy$,有 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=x+y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{u}{y}+y(u+u^3)=\left(y+\frac{1}{y}\right)u+yu^3$,此为伯努利方程. 令 $z=u^{-2}$,化为线性方程 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=-2u^{-3}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=-2\left(y+\frac{1}{y}\right)z-2y$. 有解

$$z=\mathrm{e}^{\int -2\left(y+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y}\left(-2\int \mathrm{e}^{y^2+2\ln|y|}y\mathrm{d}y+c\right)=y^{-2}\mathrm{e}^{-y^2}\left(-2\int \mathrm{e}^{y^2}y^3\mathrm{d}y+c\right)$$

$$=y^{-2}\mathrm{e}^{-y^2}[-(y^2-1)\mathrm{e}^{y^2}+c]=cy^{-2}\mathrm{e}^{-y^2}-1+y^{-2}.$$

即 $z=u^{-2}=(xy)^{-2}=cy^{-2}\mathrm{e}^{-y^2}-1+y^{-2}$,通解为 $cx^2\mathrm{e}^{-y^2}-x^2y^2+x^2=1$,其中 c 为任意常数

(4) 分离变量再化为分部分式,

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}P}{(cP + c')(N - P)} = \frac{1}{cN + c'}\left(\frac{c}{cP + c'} + \frac{1}{N - P}\right)\mathrm{d}P.$$

积分得

$$\frac{1}{cN + c'}[\ln(cP + c') - \ln(N - P)] = t + \tilde{C}, \frac{cP + c'}{N - P} = \mathrm{e}^{(cN+c')(t+\tilde{C})}.$$

尚有由 $cP + c' = 0$ 或 $N = P$ 产生的特解 $P = \tilde{\tilde{C}}$, $\tilde{\tilde{C}}$ 为任意常数.

利用初值条件 $P(0) = 0$ 确定积分常数 $\tilde{C} = \frac{1}{(cN + c')}\ln\left|\frac{c'}{N}\right|$,

即解为

$$\frac{cP + c'}{N - P} = \frac{c'}{N}\mathrm{e}^{(cN+c')t}, P = \frac{Nc'[\mathrm{e}^{(cN+c')t} - 1]}{cN + c'\mathrm{e}^{(cN+c')t}},$$

其中要求 $cN + c' \neq 0$($N = 0$ 含于解中). 当 $cN + c' = 0$ 时解为 $P = 0$.

(5) 方程为伯努利方程 $n = \alpha < 1$. 令 $z = y^{1-\alpha}$,方程化为非齐次线性方程 $z' = -(1 - \alpha)\mu z + c\lambda(1 - \alpha)$ 有通解

$$z = \mathrm{e}^{-\int(1-\alpha)\mu\mathrm{d}t}\left[\int c\lambda(1 - \alpha)\mathrm{e}^{(1-\alpha)\mu t}\mathrm{d}t + \tilde{K}\right] = \frac{c\lambda}{\mu}[1 + \tilde{K}\mathrm{e}^{-(1-\alpha)\mu t}].$$

即 $y = \left[\frac{c\lambda}{\mu}(1 + \tilde{K}\mathrm{e}^{-(1-\alpha)\mu t})\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$. 其中 $\tilde{K}$ 为任意常数. 当 $y(0) = y_0$ 时有

$$y_0 = \left[\frac{c\lambda}{\mu}(1 + \tilde{K})\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tilde{K} = \frac{\mu}{c\lambda}y_0^{1-\alpha} - 1,$$

$$y = \left\{\frac{c\lambda}{\mu}\left[1 - \left(1 - \frac{\mu}{c\lambda}y_0^{1-\alpha}\right)\mathrm{e}^{-(1-\alpha)\mu t}\right]\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

其中要求 $\alpha < 1, \mu, c, \lambda \neq 0$.

8. (1) 方程为一次齐次方程,令 $y = ux$, $\mathrm{d}y = u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u$. 方程可变为

$$x\mathrm{d}u - \sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}x = 0, \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

$$\arcsin u = \ln|x| + \tilde{c}, \mathrm{e}^{\arcsin u} = cx.$$

方程的解为 $\mathrm{e}^{\arcsin\frac{y}{x}} = cx$,其中 c 为任意常数. 尚有解 $y = x$.

(2) 令 $p = y'$,方程可解出 y,$y = \frac{xp}{2} + \frac{2x}{p}$,对 x 取导数有

$$p = \frac{p}{2} + \frac{2}{p} + x\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{p^2}\right)p',$$

$$-\frac{p}{2} + \frac{2}{p} + \left(\frac{p}{2} - \frac{2}{p}\right)\cdot\frac{x}{p}p' = 0,$$

$$\left(\frac{p}{2} - \frac{2}{p}\right)\cdot\left(\frac{xp'}{p} - 1\right) = 0.$$

有解 $\frac{p}{2} - \frac{2}{p} = 0$,$p = \pm 2$ 及 $\frac{xp'}{p} - 1 = 0$,$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$,$p = 2cx$ 代入原方程得 $y = \pm 2x$ 及 $y = cx^2 + \frac{1}{c}$,后者即 $c(y - cx^2) = 1$,其中 c 为任意常数.

(3) 令 $p = y'$,方程可解出 y,$y = \frac{xp}{2} - \frac{8x^2}{p^2}$,对 x 取导数有

$$p = \frac{p}{2} - \frac{16x}{p^2} + \left(\frac{x}{2} + \frac{16x^2}{p^3}\right)p', \left(\frac{1}{2} + \frac{16x}{p^3}\right)(xp' - p) = 0,$$

由 $xp' - p = 0$,$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$,$p = 2cx$,得 $y = \frac{xp}{2} - \frac{8x^2}{p^2} = cx^2 - \frac{8x^2}{4c^2x^2} = cx^2 - \frac{2}{c^2}$,即得积分式 $c^3x^2 - c^2y - 2 = 0$,其中 c 为任意常数. 由 $\frac{1}{2} + \frac{16x}{p^3} = 0$,得 $y' = p = -(32x)^{\frac{1}{3}}$,$y = -\frac{3}{4}\cdot 32^{\frac{1}{3}}x^{\frac{4}{3}}$,亦为方程的解(特解).

(4) 令 $p = y'$,方程化为 $x = yp + ap^2$,$y = \frac{x}{p} - ap$. 对 x 微分

之，$p=\frac{1}{p}-\frac{x}{p^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-a\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$. 将 p 视为独立变量，在 $p(1-p^2)\neq 0$ 情形有 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}=\frac{x}{p(1-p^2)}+\frac{ap}{1-p^2}$. 此为线性方程，当 $p^2<1$ 时，解为 $x=\frac{cp}{\sqrt{1-p^2}}-\frac{ap\arcsin p}{\sqrt{1-p^2}}$；当 $p^2>1$ 时，解为 $x=\frac{cp}{\sqrt{p^2-1}}+\frac{ap\ln\left|p+\sqrt{p^2-1}\right|}{\sqrt{p^2-1}}$. 在 $p(1-p^2)=0$ 情形有 $y=c$ 和 $y=\pm x+c$，仅 $y=\pm x\pm a$ 为解. 得方程以 p 为参数的解

$$\begin{cases} x=\dfrac{cp}{\sqrt{1-p^2}}-\dfrac{ap\arcsin p}{\sqrt{1-p^2}}(p^2<1); \\ x=\dfrac{cp}{\sqrt{p^2-1}}+\dfrac{ap\ln\left|p+\sqrt{p^2-1}\right|}{\sqrt{p^2-1}}(p^2>1). \end{cases}$$

及 $y=\pm x\pm a$.

(5) 令 $p=y'$，化为 $p^2-4xyp+8y^2=0$，以 p 的二次方程解出 p，有 $p=2xy\pm\sqrt{4x^2y^2-8y^2}=2xy\pm 2y\sqrt{x^2-2}$，即有 $y'=(2x\pm 2\sqrt{x^2-2})y$. 可解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=(2x\pm 2\sqrt{x^2-2})\mathrm{d}x,$$

$$\ln|y|=\int(2x\pm 2\sqrt{x^2-2})\mathrm{d}x$$

$$=x^2\pm x\sqrt{x^2-2}-2\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|+\tilde{c},$$

$$y=\frac{c\mathrm{e}^{x^2\pm x\sqrt{x^2-2}}}{(x+\sqrt{x^2-2})^2},$$

其中 c 为任意常数.

9. 变换 $y=z^n$ 后方程变成 $nz^{n-1}z'=ax^\alpha+bz^{\beta n}$，按齐次函数定义，各项次数相同，即有 $n-1=\alpha=\beta n$. 于是可求得

$$n=\alpha+1,\alpha=\beta n=\beta(\alpha+1),\alpha-\beta=\alpha\beta,\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}=1,$$

即 α,β 必须满足关系式$\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}=1$.

10. 令 $y=ux,\mathrm{d}y=u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u$,方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 可化为 $x^mM(1,u)\mathrm{d}x+x^mN(1,u)(u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u)=0$,即

$$x^m[M(1,u)+N(1,u)u]\mathrm{d}x+x^{m+1}N(1,u)\mathrm{d}u=0.$$

方程有积分因子 $\mu(x,u)=x^{-(m+1)}[M(1,u)+N(1,u)u]^{-1}$. 因此,原方程有积分因子

$$\mu(x,y)=[xM(x,y)+yN(x,y)]^{-1}=\frac{1}{xM+yN}.$$

11. (1) 由积分因子的充要条件 $N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$,将 $\mu=\mu(\varphi(x,y))$ 代入可得

$$\left(N\frac{\partial\varphi}{\partial x}-M\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\varphi}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu,$$

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\left(N\frac{\partial\varphi}{\partial x}-M\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^{-1}\mathrm{d}\varphi.$$

因 μ 为 φ 的函数,故必有函数 $f(\varphi)$ 满足

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\left(N\frac{\partial\varphi}{\partial x}-M\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^{-1}=f(\varphi(x,y)),$$

且其积分因子为 $\mu=\mathrm{e}^{\int f(\varphi)\mathrm{d}\varphi}$.

(2) 直接将 $\varphi=x,y,x\pm y,x^2\pm y^2,xy,\frac{y}{x},x^\alpha y^\beta$ 代入求 $f(\varphi)$,易计算出其积分因子

$$f(x)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N};f(y)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M};$$

$$f(x\pm y)=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)(N\mp M)^{-1};$$

$$f(x^2 \pm y^2) = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)(Nx \mp My)^{-1};$$

$$f(xy) = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)(Ny - Mx)^{-1};$$

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\left(\frac{M}{x} + \frac{Ny}{x^2}\right)^{-1};$$

$$f(x^\alpha y^\beta) = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\left(\frac{\alpha N}{x} - \frac{\beta M}{y}\right)^{-1}.$$

（3）方程化为$(x + y^3)\mathrm{d}x + (x^3 + y)\mathrm{d}y = 0$. 令$\varphi = x^2 + y^2$,有$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\left(N\frac{\partial \varphi}{\partial x} - M\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^{-1} = (3y^2 - 3x^2)(2x^4 - 2y^4)^{-1} = -\frac{3}{2}(x^2 + y^2)^{-1} = -\frac{3}{2}\varphi^{-1}$. 知方程可积,且其积分因子为$\mu = \mathrm{e}^{-\int \frac{3}{2}\varphi^{-1}\mathrm{d}\varphi} = (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$.

解 1 应用全微分公式有

$$u = \int \mu M \partial x + \int\left(\mu N - \frac{\partial}{\partial y}\int \mu M \partial x\right)\mathrm{d}y = \frac{xy - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

即方程有积分式$u = c$,即$xy - 1 = c\sqrt{x^2 + y^2}$或$(xy - 1)^2 = c^2(x^2 + y^2)$,其中$c$为任意常数.

解 2 方程乘以积分因子,有

$$\frac{x + y^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x + \frac{x^3 + y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(y^3 + yx^2 - yx^2)\mathrm{d}x + (x^3 + xy^2 - xy^2)\mathrm{d}y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\mathrm{d}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{(y^2 + x^2)y\mathrm{d}x + (x^2 + y^2)x\mathrm{d}y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{yx^2\mathrm{d}x + xy^2\mathrm{d}y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\mathrm{d}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\mathrm{d}(xy)}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{xy\mathrm{d}(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\mathrm{d}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} + \mathrm{d}\left[\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}\right] = 0,$$

得全积分式$\frac{xy-1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}=c, xy-1=c\sqrt{x^2+y^2}$，其中 c 为任意常数.

12. 方程可化为线性方程 $y'=-\frac{a}{x}y+\frac{f(x)}{x}$. 有通解

$$y(x)=e^{-\int_0^x \frac{a}{x}dx}\left[\int_0^x \frac{f(s)}{s}e^{\int_0^s \frac{a}{x}dx}ds+c\right]$$

$$=x^{-a}\left(\int_0^x f(s)s^{a-1}ds+c\right).$$

为求$\lim\limits_{x\to 0}y(x)$，当 $a<0$ 时，对任意 c 即所有的解可利用洛必达法则有

$$\lim_{x\to 0}y(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(s)s^{a-1}ds+c}{x^a}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)x^{a-1}}{ax^{a-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{a}=\frac{b}{a}.$$

当 $a>0$ 时，由于 $c\neq 0$ 时有$\lim\limits_{x\to 0}cx^{-a}=\infty$，故仅有一个有界解($c=0$)：

$$y=x^{-a}\int_0^x f(s)s^{a-1}ds.$$

利用洛必达法则求 $c=0$ 时的$\lim\limits_{x\to 0}y(x)$：

$$\lim_{x\to 0}y(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(s)s^{a-1}ds}{x^a}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)x^{a-1}}{ax^{a-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{a}=\frac{b}{a}.$$

即 $a\neq 0$ 时均有$\lim\limits_{x\to 0}y(x)=\frac{b}{a}$.

13. 一阶非齐次线性方程有通解

$$y=e^{\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx+c\right],$$

故

$$y_1 = e^{\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx + c_1\right],$$

$$y_2 = e^{\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx + c_2\right].$$

两式相减,有

$$y_2 - y_1 = (c_2 - c_1)e^{\int p(x)dx}, y_2 = y_1 + (c_2 - c_1)e^{\int p(x)dx}.$$

(1) 对 $y_2 = zy_1$,令 $c = -c_1 + c_2$,利用 $y'_1 = p(x)y_1 + q(x)$, $(\ln y_1)' - p(x) = \dfrac{q(x)}{y_1}$,可以证得

$$y_2 = y_1 + ce^{\int p(x)dx} = y_1 z,$$

$$z = 1 + cy_1^{-1}e^{\int p(x)dx} = 1 + ce^{-\int[(\ln y_1)' - p(x)]dx} = 1 + ce^{-\int\frac{q(x)}{y_1(x)}dx}.$$

(2) 对方程的任一个解 $y(x)$ 有

$$y = y_1 + (c - c_1)e^{\int p(x)dx}, y_2 = y_1 + (c_2 - c_1)e^{\int p(x)dx}.$$

即

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{c - c_1}{c_2 - c_1} = \tilde{c}.$$

14. 令 $y' = p$,方程化为 $A(p)y + B(p)x = C(p)$. 设 $A(p) \neq 0$,方程可变为 $y = f(p)x + g(p)$,对 x 微分之 $y' = p = f(p) + [xf'(p) + g'(p)]p'$. 当 $p - f(p) \neq 0$ 时可化为线性方程 $\dfrac{dx}{dp} = \dfrac{f'(p)}{p - f(p)}x + \dfrac{g'(p)}{p - f(p)}$,有解

$$x = e^{\int\frac{f'(p)}{p-f(p)}dp}\left[\int \frac{g'(p)}{p - f(p)}e^{-\int\frac{f'(p)}{p-f(p)}dp}dp + c\right].$$

上式与 $y = f(p)x + g(p)$ 一起构成以 p 为参数的解. 当 $p - f(p) = 0$ 时则有 $p' = 0, p = c$. $y = f(c)x + g(c)$ 为奇解或特解. 若 $A(p) = 0$,方程不含 y,可按参数法解之([书 §2.4.2 - 3]).

15. (1) 由勒让德变换有 $P=\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{\mathrm{d}(px-y)}{\mathrm{d}p}=x+p\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p}$,由 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}$ 可得 $P=x$. 而 $y=px-Y=XP-Y$,从而将解方程 $F(x,y,p)=0$ 变为解方程 $F(P,XP-Y,X)=0$.

(2) 第 2 次勒让德变换记为 $\xi=P,\eta=PX-Y$. 于是 $\xi=x$, $\eta=xp-Y=y$,即 X,Y 变回 x,y. 自然 P 变回 p,方程 $F(P,XP-Y,X)=0$ 变回原方程 $F(x,y,p)=0$.

(3) (a) 勒让德变换 $X=p,Y=px-y$ 将方程变为 $-YP=PX-Y$,除以 PY 可变为 $\frac{1}{P}=\frac{X}{Y}+1$. 即线性方程 $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}Y}=\frac{X}{Y}+1$,得解

$$X=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{Y}\mathrm{d}Y}\left(\int\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{Y}\mathrm{d}Y}\mathrm{d}Y+\tilde{c}\right)=Y(\ln|Y|+\tilde{c}),$$

即 $p=(px-y)(\ln|px-y|+\tilde{c})$. 与原方程消去 p,最后为

$$\frac{y}{x}-\frac{y}{x^2}=-\frac{y}{x}\left(\ln\left|-\frac{y}{x}\right|+\tilde{c}\right),\frac{1}{x}-1=\ln\left|\frac{y}{x}\right|+\tilde{c},$$

$$y=cx\mathrm{e}^{\frac{1}{x}},$$

即方程的解为 $y=cx\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,其中 c 为任意常数.

(b) 通过勒让德变换 $X=p,Y=px-y$,方程变为

$$(PX-Y)^2=X^2+Y^2,X(P^2X-2PY-X)=0,$$

$$X=0,P^2X-2PY-X=0.$$

对 $X=0$,有 $X=p=y'=0,y=c$; 对 $P^2X-2PY-X=0$,有 $PX-2Y=\frac{X}{P}$, 对 X 求导得 $P'X+P-2P=\frac{1}{P}-\frac{XP'}{P^2}$, $XP'\left(1+\frac{1}{P^2}\right)=P\left(1+\frac{1}{P^2}\right),XP'=P,cP=X$,即有 $cx=p$,代入原方程 $y^2=c^2x^2+(cx^2-y)^2,2y=c(1+x^2)$. 得方程解 $y=c$ 和 $2y=c(1+x^2)$,其中 c 为任意常数.

16. (1) 解出 c, $c=\frac{f_2-f_4y}{f_3y-f_1}$,对 x 求导

$$(f'_2 - f'_4 y - f_4 y')(f_3 y - f_1) - (f'_3 y + f_3 y' - f'_1)(f_2 - f_4 y) = 0,$$

整理得

$$(f_1 f_4 - f_2 f_3) y' + (f'_1 f_2 - f_1 f'_2) +$$

$$(f'_2 f_3 - f_2 f'_3 + f_1 f'_4 - f'_1 f_4) y + (f'_3 f_4 - f_3 f'_4) y^2 = 0.$$

此为里卡蒂方程.

(2) 方程(A): $y' + by^2 = cx^m$ 令 $y = \frac{u}{x}$,可化为 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u + bu^2 = cx^{m-2}$,此为方程(B): $xy' - ay + by^2 = cx^n$ 形式. 反之,方程(B)可通过 $x = z^{\frac{1}{a}}$, $y = uz$,则化为 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} + \frac{b}{a}u^2 = \frac{c}{a}z^{\frac{n}{a}-2}$,此为方程(A)形式.

(3) 在(2)中当(A)式中 $\frac{\pm m}{2(m+2)}$ 或(B)式中 $\frac{n \pm 2a}{2n}$ 为零或正整数时方程可解. 实际上当为零时方程(A)为变量分离方程,方程(B)则直接可解为 $y = \sqrt{\frac{c}{b}}\mathrm{e}^{\mp ax}$. 因(A),(B)可互换,仅证当 $\frac{n - 2a}{2n} = k > 0$, k 为正整数时方程可解. 方法为取变换 $y = \frac{a}{b} + \frac{x^n}{\tilde{y}}$, $y' = \frac{nx^{n-1}}{\tilde{y}} - \frac{x^n}{\tilde{y}^2}\tilde{y}'$,则方程(B)变为

$$\frac{nx^n}{\tilde{y}} - \frac{x^{n+1}}{\tilde{y}^2}\tilde{y}' - \frac{a^2}{b} - a\frac{x^n}{\tilde{y}} + \frac{a^2}{b} + 2a\frac{x^n}{\tilde{y}} + b\frac{x^{2n}}{\tilde{y}^2} = cx^n,$$

$$x\tilde{y}' - (a + n)\tilde{y} + c\tilde{y}^2 = bx^n,$$

此仍为方程(B)形式. 若经 k 次变换,则原方程(B)线性项 y 的系数 a 变为 $a + kn$. 由 k 的假设,有 $a + kn = \frac{n}{2}$,即系数 a 变为 $\frac{n}{2}$, $n = 2a$,即为 $\frac{n - 2a}{2n} = 0$ 情形,方程(B)有解 $y = \sqrt{\frac{c}{b}}\mathrm{e}^{ax}$.

§2.4.3 习题 2.1 及其解答

1. 求下列方程的解

(1) $\frac{dy}{dx}=2xy$,并求满足初值条件 $x=0,y=1$ 的特解.

解 变量分离,$\frac{dy}{y}=2x\,dx$,两边积分 $\ln|y|=x^2+\tilde{c}$,$y=\pm e^{x^2+\tilde{c}}=ce^{x^2}$. 因 $y=0$ 亦为解. 得通解 $y=ce^{x^2}$,c 为任意常数. 满足初值条件时 $1=ce^{0^2}=c$,特解为 $y=e^{x^2}$.

(2) $y^2dx+(x+1)dy=0$,并求满足初值条件 $x=0,y=1$ 的特解.

提示 变量分离,$\frac{dx}{x+1}=-\frac{dy}{y^2}$,通解 $=\frac{1}{\ln|x+1|+c}$,另有解 $y=0$. 满足条件的特解为 $y=\frac{1}{\ln|x+1|+1}$.

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{xy+x^3y}$.

提示 变量分离,$\frac{1}{2}\frac{dy^2}{1+y^2}=\frac{dx}{x(1+x^2)}=\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\frac{dx^2}{1+x^2}$,解为

$$(1+x^2)(1+y^2)=cx^2\quad(c>0).$$

(4) $(1+x)y\,dx+(1-y)x\,dy=0$.

提示 变量分离 $\left(1-\frac{1}{y}\right)dy=\left(\frac{1}{x}+1\right)dx$,解为 $x-y+\ln|xy|=c$ 及 $y=0$.

(5) $(y+x)dy+(x-y)dx=0$.

解 方程化为 $\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{y+x}$,为线性齐次方程. 可作变换 $y=ux$,因 $\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$. 方程变为 $x\frac{du}{dx}+u=\frac{u-1}{u+1}$,即 $x\frac{du}{dx}=-\frac{u^2+1}{u+1}$,变量分离 $\frac{(u+1)du}{u^2+1}=-\frac{dx}{x}$. 积分得 $\frac{1}{2}\ln(u^2+1)+\arctan u=-\ln|x|+c$,$\ln\sqrt{x^2+y^2}+\arctan\frac{y}{x}=c$. 其中 c 为任意常数.

(6) $x\dfrac{dy}{dx}-y+\sqrt{x^2-y^2}=0$.

提示 除以 x,化为$\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}+\mathrm{sgn}(x)\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=0$,是齐次方程. 作变换 $y=ux$,变为 $x\dfrac{du}{dx}+\mathrm{sgn}(x)\sqrt{1-u^2}=0$,变量分离 $\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}=-\mathrm{sgn}(x)\dfrac{dx}{x}$. 积分得 $\arcsin u+\mathrm{sgn}(x)\ln|x|=c$. 原方程解为 $\arcsin\dfrac{y}{x}+\mathrm{sgn}(x)\ln|x|=c$. 另,$u^2=1$ 亦为方程的解,即原方程还有解 $y=\pm x$.

(7) $\tan y dx-\cot x dy=0$.

提示 变量分离. $\tan y\neq 0$ 时 $\cot y dy=\tan x dx$. 解为$\sin y\cos x=c$. $\tan y=0$ 时有解 $y=n\pi, n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

(8) $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{e^{y^2+3x}}{y}=0$.

提示 变量分离 $-e^{-y^2}dy^2=2e^{3x}dx$. 解为 $3e^{-y^2}-2e^{3x}=c$.

(9) $x(\ln x-\ln y)dy-ydx=0$.

提示 化为齐次方程$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}\ln^{-1}\dfrac{y}{x}$. 由变换 $y=ux$ 得 $x\dfrac{du}{dx}=-\dfrac{u+u\ln u}{\ln u}$. 变量分离得 $-\dfrac{dx}{x}=\dfrac{\ln u du}{u(1+\ln u)}=\dfrac{\ln u d(\ln u)}{1+\ln u}=\left(1-\dfrac{1}{1+\ln u}\right)d(\ln u)$,积分得解为 $y=c\left(1+\ln\dfrac{y}{x}\right)$.

(10) $\dfrac{dy}{dx}=e^{x-y}$.

提示 变量分离 $e^y dy=e^x dx$. 解为 $e^y=e^x+c$.

2. 作适当的变量变换求解下列方程:

(1) $\dfrac{dy}{dx}=(x+y)^2$.

解 (1) 令 $u = x + y, \frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} = 1 + u^2, \frac{du}{1 + u^2} = dx$, $\arctan u = x + c$,解为 $\arctan(y + x) = x + c, y = \tan(x + c) - x$,其中 c 为任意常数.

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x + y)^2}$.

提示 同(1).解为 $x = \tan(y + c) - y$.

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}$.

解 右端分子分母线性. 方程组 $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$ 有解 $\begin{cases} x = -\frac{1}{3}, \\ y = \frac{1}{3}, \end{cases}$ 令 $\begin{cases} X = x + \frac{1}{3}, \\ Y = y - \frac{1}{3}, \end{cases}$ 方程化为齐次方程 $\frac{dY}{dX} = \frac{2X - Y}{X - 2Y}$. 令 $u = \frac{Y}{X}$,得 $\frac{dY}{dX} = u + X\frac{du}{dX} = \frac{2 - u}{1 - 2u}, X\frac{du}{dX} = \frac{-2(u^2 - u + 1)}{2u - 1}$, $\frac{d(u^2 - u + 1)}{u^2 - u + 1} = -2\frac{dX}{X}, \ln|u^2 - u + 1| = -2\ln|X| + \tilde{\tilde{c}}$,方程有解 $u^2 - u + 1 = \tilde{c}X^{-2}, Y^2 - XY + X^2 = \tilde{c}$. 原方程解为

$$\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) + \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \tilde{c},$$

即 $y^2 - xy + x^2 - y + x = c$,其中 c 为任意常数.

(4) $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 5}{x - y - 2}$.

提示 通过变换 $u = x - y$ 化为变量分离方程 $\frac{du}{dx} = \frac{-7}{u - 2}$ 或 $\frac{du}{dy} = \frac{-7}{u + 5}$. 解为 $x^2 - 2xy + y^2 + 10x + 4y = c$.

(5) $\frac{dy}{dx} = (x + 1)^2 + (4y + 1)^2 + 8xy + 1$.

提示 化为$\frac{dy}{dx}=(x+4y+1)^2+2$,取变换$u=x+4y+1$得$\frac{du}{dx}=(2u)^2+3^2$. 分离变量及积分得$\frac{1}{6}\arctan\frac{2u}{3}=x+\tilde{c}$,$\frac{2}{3}(x+4y+1)=\tan(6x+c)$.

(6) $\frac{dy}{dx}=\frac{y^6-2x^2}{2xy^5+x^2y^2}$.

提示 令$u=y^3$,化为齐次方程$\frac{du}{dx}=\frac{3u^2-6x^2}{2xu+x^2}$. 再由变换$u=tx$化为变量分离方程$\frac{dx}{x}=\left(\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{t-3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{t+2}\right)dt$. 解为

$$(y^3-3x)^7(y^3+2x)^3=cx^{15}.$$

(7) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x^3+3xy^2+x}{3x^2y+2y^3-y}$.

解 方程可改写为$\frac{d(y^2+1)}{d(x^2-1)}=\frac{2(x^2-1)+3(y^2+1)}{3(x^2-1)+2(y^2+1)}$,取变换$\begin{cases}t=x^2-1,\\s=y^2+1,\end{cases}$化为齐次方程$\frac{ds}{dt}=\frac{2t+3s}{3t+2s}$. 再令$s=wt$,得$t\frac{dw}{dt}=\frac{2-2w^2}{3+2w}$,$\frac{dt}{t}=\frac{3+2w}{2(1-w^2)}dw=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{1-w}+\frac{1}{1+w}\right)dw$,积分得$-\frac{5}{4}\ln|1-w|+\frac{1}{4}\ln|1+w|=\ln|t|+\tilde{c}$,$(1+w)=ct^4(1-w)^5$,即$t+s=c(t-s)^5$,通解为$x^2+y^2=c(x^2-y^2-2)^5$,其中$c$为任意常数.

3. 证明方程$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=f(xy)$经变换$xy=u$可化为变量分离方程,并由此求解下列方程

(1) $y(1+x^2y^2)dx=xdy$; (2) $\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{2+x^2y^2}{2-x^2y^2}$.

解 经变换$xy=u$后,由$\frac{du}{dx}=y+x\frac{dy}{dx}$,方程$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=f(xy)$

化为

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+f(u),\frac{x}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+f(u),$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{u(1+f(u))}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

此为变量分离方程,可两边积分求解.

(1) 此时$f(xy)=1+x^2y^2$,经变换$xy=u$后方程化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}u}{u(2+u^2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}-\frac{u}{2+u^2}\right)\mathrm{d}u,$$

积分得

$$\frac{1}{2}\ln|u|-\frac{1}{4}\ln|2+u^2|=\ln|x|+\tilde{c},u^2=cx^4(2+u^2),$$

原方程的解为$x=0$及

$$y^2=cx^2(2+x^2y^2),$$

其中c为任意常数.

(2) 此时$f(xy)=\dfrac{2+x^2y^2}{2-x^2y^2}$,经变换$xy=u$后方程化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}u}{u\left(1+\dfrac{2+u^2}{2-u^2}\right)}=\frac{(2-u^2)\mathrm{d}u}{4u}=\left(\frac{1}{2u}-\frac{u}{4}\right)\mathrm{d}u,$$

积分得

$$\frac{1}{2}\ln|u|-\frac{1}{8}u^2=\ln|x|+c,\ln u^4-\ln x^8-u^2=c,$$

原方程的解为

$$\ln\frac{y^4}{x^4}-x^2y^2=c,$$

其中c为任意常数.

4. 已知$f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=1(x\neq 0)$,试求函数$f(x)$的一般表达式.

解 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=0$. 且对 $x\neq 0$ 有 $F(x)\neq 0, F'(x)=f(x)$. 由已知条件得 $F(x)F'(x)=1$. 即 $F(x)\mathrm{d}F(x)=\mathrm{d}x, F^2(x)=2x+c$. 利用 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=0$ 有 $c=0$. 故 $F^2(x)=2x, F(x)=\pm\sqrt{2x}, F'(x)=\pm\frac{1}{\sqrt{2x}}(x\neq 0)$，得

$$f(x)=\pm\frac{1}{\sqrt{2x}}\quad(x\neq 0).$$

5. 求具有性质

$$x(t+s)=\frac{x(t)+x(s)}{1-x(t)x(s)}$$

的函数 $x(t)$，已知 $x'(0)$ 存在.

解 关系式中取 $s=0$，得 $x(t)=\frac{x(t)+x(0)}{1-x(0)x(t)}, x(0)[1+x^2(t)]=0$，推得 $x(0)=0$. 于是

$$\begin{aligned}x(t+\Delta t)-x(t)&=\frac{x(t)+x(\Delta t)}{1-x(t)x(\Delta t)}-x(t)\\&=\frac{[1+x^2(t)]x(\Delta t)}{1-x(t)x(\Delta t)}.\end{aligned}$$

因 $x'(0)$ 存在且 $x(0)=0$，有

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1+x^2(t)}{1-x(t)x(\Delta t)}\,\frac{x(\Delta t)-x(0)}{\Delta t}\\&=\frac{1+x^2(t)}{1-x(t)x(0)}x'(0)=x'(0)[1+x^2(t)].\end{aligned}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x'(0)[1+x^2(t)],$$

分离变量，积分得

$$\arctan x(t)=x'(0)t+c.$$

由 $x(0)=0$ 知 $c=0$. 所求的函数为 $x(t)=\tan[x'(0)t]$.

6. 求一曲线，使它的切线介于坐标轴间的部分被切点分成相等的两段.

解 由[书习题1.2 - 8(4)]及[§1.4.3 - 8(4)]知微分方程为 $xy' + y = 0$. 分离变量得 $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$，积分得解 $xy = c$，其中 $c \neq 0$ 为任意常数. 如图 2.6.

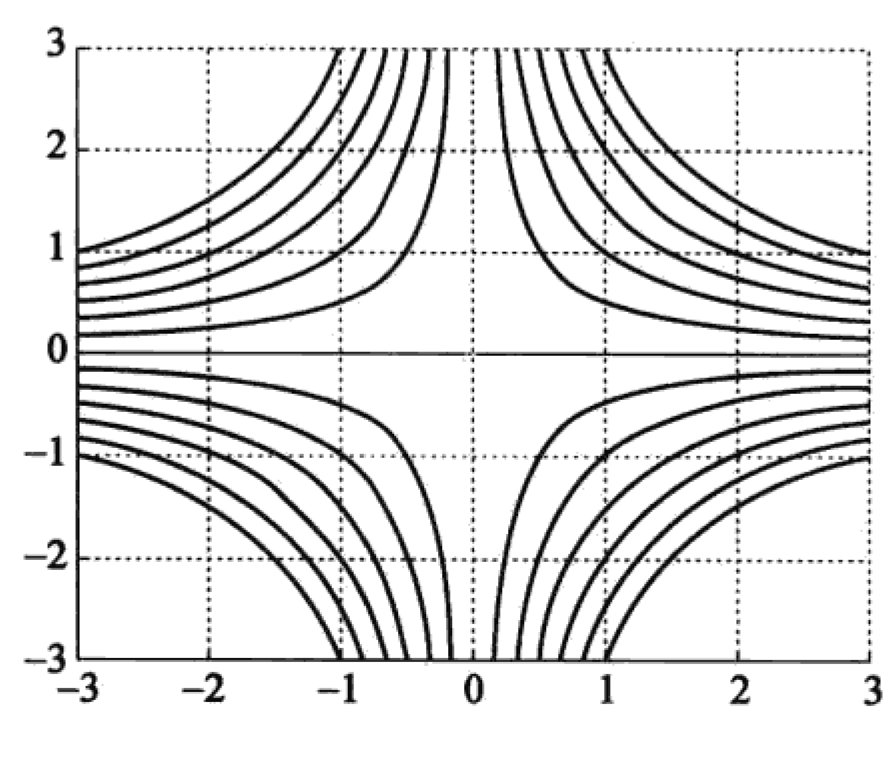


图 2.6　等距曲线

7. 在图 2.7 所示的 RC 电路中，设 $E = 10$ V，$R = 100\ \Omega$，$C = 0.01$ F，而开始时电容 C 上没有电荷. 问

(1) 当开关 S 合上"1"后，经多长时间电容 C 上的电压 $u_C = 5$ V?

(2) 当开关 S 合上"1"后，经相当长时间(如 1 min 后)开关从"1"突然转至"2"，试求 u_C 的变化规律. 问经多长时间 $u_C = 5$ V?

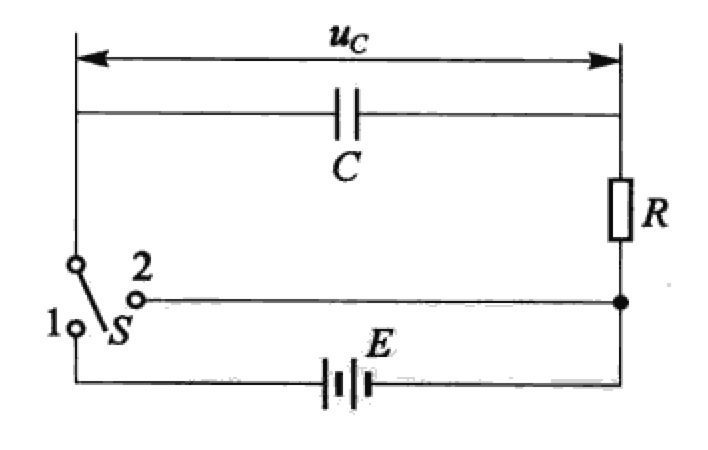


图 2.7　RC 电路



解 (1) 当开关 S 合上"1"时，是电路充电过程. 由[书§2.1.3 例 8]知 $RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E$,

$u_C = E(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$. 将 $E = 10$ V, $R = 100\ \Omega$, $C = 0.01$ F 及 $u_C = 5$ V 代入得 $e^t = 2$, 于是 $t = \ln 2$. 经 $\ln 2$ s 后电容 C 上的电压升为 $u_C = 5$ V.

(2) 此为放电过程,电路方程为 $RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$. 解为 $u_C = ce^{-\frac{1}{RC}t}$. 因开始 $t = 0$ 时 $u_C = E$, 有 $c = E$. 于是 $u_C = Ee^{-\frac{1}{RC}t}$. 将 $E = 10$ V, $R = 100\ \Omega$, $C = 0.01$ F 及 $u_C = 5$ V 代入得 $e^t = 2$, 于是 $t = \ln 2$. 即经 $\ln 2$ s 后电容 C 上的电压降为 $u_C = 5$ V.

8. 求出习题 1.2 第 8 题(1) 所确定的曲线,其中 $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

提示 微分方程 $y' = \frac{x+y}{x-y}$, 是齐次方程. 解为 $\arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + c$.

9. 证明满足习题 1.2 第 8 题(7) 所给条件的曲线是抛物线族.

提示 微分方程 $y' = kx$, 解为 $y = \frac{k}{2}x^2 + c$.

§2.4.4 习题 2.2 及其解答

1. 求下列方程的解:

(1) $\frac{dy}{dx} = y + \sin x$.

解 (1) **解 1** 属非齐次线性方程,对应齐次方程有通解 $\frac{dy}{dx} = y$, $\frac{dy}{y} = dx$, $\ln|y| = x + \tilde{c}$, $y = ce^x$. 再用常数变易法令非齐次方程的解为 $y = c(x)e^x$, 代入方程得([附录 Ⅱ §3.3 - 6(53)])

$$\frac{dc(x)}{dx} = \sin xe^{-x},$$

$$c(x) = \int \sin xe^{-x}dx + \tilde{c} = \frac{1}{2}e^{-x}(-\sin x - \cos x) + \tilde{c}.$$

即方程的通解为

$$y = c(x)e^x = -\frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + \tilde{c}e^x.$$

解 2 方程为非齐次线性方程$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)$，$P(x) = 1$，$Q(x) = \sin x$ 可直接应用公式得

$$y = e^{\int P dx}\left(\int Q e^{-\int P dx}dx + c\right) = e^x\left(\int \sin x e^{-x}dx + c\right)$$

$$= e^x\left[\frac{1}{2}e^{-x}(-\sin x - \cos x) + c\right]$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + ce^x.$$

(2) $\frac{dx}{dt} + 3x = e^{2t}$.

提示 线性方程，$x = e^{-3t}\left(\int e^{2t+3t}dt + c\right) = \frac{1}{5}e^{2t} + ce^{-3t}$.

(3) $\frac{ds}{dt} = -s\cos t + \frac{1}{2}\sin 2t$.

提示 线性方程，

$$s = e^{-\sin t}\left(\int \sin t\cos t e^{\sin t}dt + c\right)$$

$$= e^{-\sin t}\left[\int \sin t e^{\sin t}d(\sin t) + c\right]$$

$$= \sin t - 1 + ce^{-\sin t}.$$

(4) $\frac{dy}{dx} - \frac{n}{x}y = e^x x^n$（$n$ 为常数）.

提示 线性方程，$y = x^n\left(\int e^x dx + c\right) = x^n(e^x + c)$.

(5) $\frac{dy}{dx} + \frac{1-2x}{x^2}y - 1 = 0$.

提示 线性方程，$y = e^{\frac{1}{x}}x^2\left(\int e^{-\frac{1}{x}}x^{-2}dx + c\right) = x^2(1 + ce^{\frac{1}{x}})$.

(6) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^4+y^3}{xy^2}$.

解 化为$\frac{y^2dy}{dx}=\frac{x^4+y^3}{x}$. 令$z=y^3$,则方程变为非齐次线性方程$\frac{dz}{dx}=\frac{3}{x}z+3x^3$. 应用线性方程解式,得

$$z=e^{\int\frac{3}{x}dx}\left(\int 3x^3e^{-3\ln|x|}dx+c\right)=x^3(3x+c).$$

原方程的通解为$y^3=x^3(3x+c)$,其中c为任意常数.

(7) $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$.

提示 线性方程,

$$\begin{aligned}y&=e^{\int\frac{2}{x+1}dx}\left[\int(x+1)^{3-2}dx+c\right]\\&=\frac{1}{2}(x+1)^4+c(x+1)^2.\end{aligned}$$

(8) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^3}$.

提示 视y为自变量,x为因变量,化为线性方程$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}+y^2$,得$x=e^{\int\frac{1}{y}dy}\left(\int y^{2-1}dy+c\right)=\frac{1}{2}y^3+cy$. 还有解$y=0$.

(9) $\frac{dy}{dx}=\frac{ay}{x}+\frac{x+1}{x}$($a$为常数).

提示 线性方程. 当$a=0$时方程$\frac{dy}{dx}=\frac{x+1}{x}$有解$y=x+\ln|x|+c$;当$a=1$时方程$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{x+1}{x}$有解$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\cdot\left(\int\frac{x+1}{x}x^{-1}dx+c\right)=x\ln|x|-1+cx$;当$a\neq 0,1$时方程有解$y=e^{\int\frac{a}{x}dx}\left(\int\frac{x+1}{x}x^{-a}dx+c\right)=\frac{x}{1-a}-\frac{1}{a}+cx^a$.

(10) $x\frac{dy}{dx}+y=x^3$.

提示 线性方程,$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int x^{2+1}dx+c\right)=\frac{1}{4}x^3+\frac{c}{x}$.

(11) $\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$.

提示 伯努利微分方程.取变换 $z=y^{-2}$,方程化为线性方程 $\frac{dz}{dx}=2xz-2x^3$.

$$z=e^{\int 2xdx}\left(c-\int x^2e^{-x^2}dx^2\right)=e^{x^2}[c+(x^2+1)e^{-x^2}]$$
$$=ce^{x^2}+x^2+1.$$

通解 $y^2(ce^{x^2}+x^2+1)=1$.还有解 $y=0$.

(12) $(y\ln x-2)ydx=xdy$.

解 化为伯努利微分方程$\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{x}y+\frac{\ln x}{x}y^2$,取变换 $z=y^{1-n}=y^{-1}$,于是化为线性方程$\frac{dz}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x}z-\frac{\ln x}{x}$.利用积分式[附录 Ⅱ §3.3 - 3(27)],线性方程有解

$$z=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left(-\int\frac{\ln x}{x}x^{-2}dx+\tilde{c}\right)=x^2\left(\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{4x^2}+\tilde{c}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}+\tilde{c}x^2.$$

原方程有通解 $y(cx^2+2\ln x+1)=4$,其中 c 为任意常数.另外,方程还有解 $y=0$.

(13) $2xydy=(2y^2-x)dx$.

提示 化为线性方程$\frac{dy^2}{dx}=\frac{2}{x}y^2-1$,有解

$$y^2=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left(-\int x^{-2}dx+c\right)=x+cx^2.$$

(14) $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y+3x}{x^2}$.

解 令 $z=e^y$，$\frac{dz}{dx}=e^y\frac{dy}{dx}=\frac{3z}{x}+\frac{z^2}{x^2}$ 为伯努利微分方程. 取变换 $u=z^{1-n}=z^{-1}$，再化为线性方程 $\frac{du}{dx}=-z^{-2}\frac{dz}{dx}=-\frac{3}{x}u-\frac{1}{x^2}$. 有解

$$u=e^{-\int\frac{3}{x}dx}\left(\tilde{c}-\int\frac{1}{x^2}x^3dx\right)=x^{-3}\left(\tilde{c}-\frac{1}{2}x^2\right),$$

即 $z\left(\tilde{c}x^{-3}-\frac{1}{2}x^{-1}\right)=1$. 通解为 $e^y(c-x^2)=2x^3$，其中 c 为任意常数.

(15) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{xy+x^3y^3}$.

提示 化为 $\frac{dx}{dy}=yx+y^3x^3$，仿(11). 解为

$$x^2(ce^{-y^2}-y^2+1)=1.$$

(16) $y=e^x+\int_0^x y(t)dt$.

提示 两边求导得线性方程 $y'=e^x+y$，解为 $y=e^{\int 1dx}\left(\int e^xe^{-x}dx+c\right)=e^x(x+c)$. 因 $x=0$ 时 $y=1$，得 $c=1$.

2. 设函数 $\varphi(t)$ 于 $-\infty<t<+\infty$ 上连续，$\varphi'(0)$ 存在且满足关系式

$$\varphi(t+s)=\varphi(t)\varphi(s),$$

试求此函数.

解 $s=0$ 时，$\varphi(t)=\varphi(t)\varphi(0)$，$\varphi(0)=1$. 当 $\Delta t\neq 0$ 时有

$$\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}=-\frac{\varphi(t)[1-\varphi(\Delta t)]}{\Delta t}$$
$$=-\frac{\varphi(t)[\varphi(0)-\varphi(0+\Delta t)]}{\Delta t},$$

即

$$\varphi'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \varphi(t) \frac{\varphi(0 + \Delta t) - \varphi(0)}{\Delta t}$$

$$= \varphi(t)\varphi'(0).$$

积分得$\frac{d\varphi(t)}{\varphi(t)} = \varphi'(0)dt, \varphi(t) = ce^{\varphi'(0)t}$. 当$t = 0$时得$c = \varphi(0) = 1$. 即$\varphi(t) = e^{\varphi'(0)t}$.

3. 如图 2.8 所示的 RL 电路,试求:

(1) 当开关 S_1 合上 10 s 后,电感 L 上的电流;

(2) S_1 合上 10 s 后再将 S_2 合上,求 S_2 合上 20 s 后电感 L 上的电流.

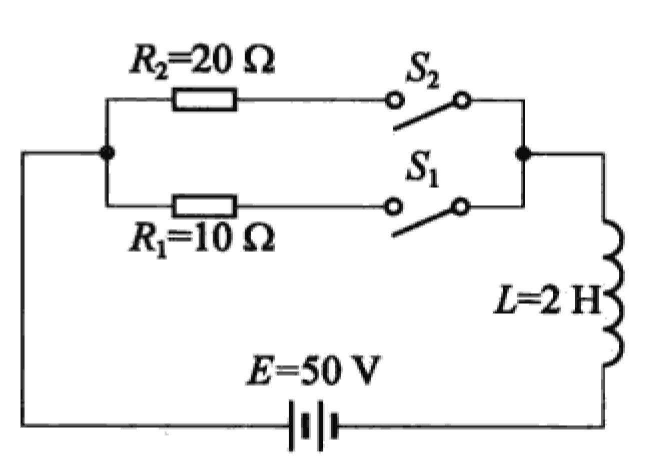


图 2.8 RL 电路

解 (1) 设图 2.8 的电路上电流为 $I(t)$,当开关 S_1 合上时电路方程为

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R_1}{L}I = \frac{E}{L}, \text{即} \frac{dI}{dt} = -5I + 25.$$

有解 $I(t) = 5 - ce^{-5t}$,其中 c 为任意常数. 因刚合上时 $I(0) = 0$ 得 $c = 5$,解为 $I(t) = 5(1 - e^{-5t})$. S_1 合上 10 s 后

$$I(t) = 5(1 - e^{-50}) \approx 5 \text{ A}.$$

(2) S_1 合上 10 s 后再将 S_2 合上,令$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{3}{20}$,此时电路方程变为$\frac{dI}{dt} = -\frac{10}{3}I + 25$. 方程的解为 $I(t) = 7.5 + ce^{-\frac{10}{3}t}$. 因开始时 $I(0) = 5$,得解 $I(t) = 7.5 - 2.5e^{-\frac{10}{3}t}$. S_2 合上 20 s 后有$I(t) = 7.5 - 2.5e^{-66.6} \approx 7.5$ A.

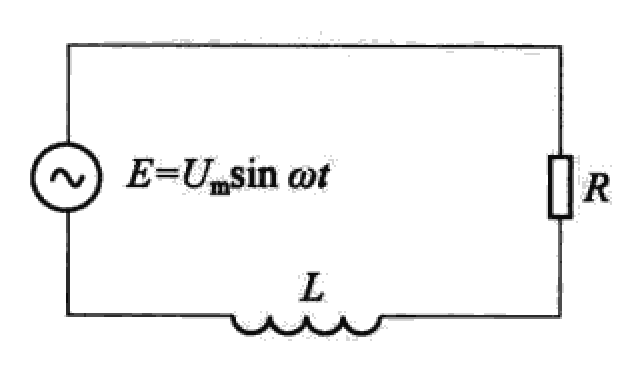


图 2.9 RL 电路

4. 试求图 2.9 所示的 RL 电路电感上电流 $I(t)$ 的变化规律,并解释其

物理意义,设 $t=0$ 时,$I=0$.

解 方程为 $RI+L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=E=U_m\sin\omega t,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{R}{L}I+\frac{U_m}{L}\sin\omega t.$ 利用积分式

$$\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx),$$

解为

$$\begin{aligned}I(t)&=\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\left(\int\frac{U_m}{L}\sin\omega t\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\mathrm{d}t+c\right)\\&=c\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}+\frac{U_m}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t).\end{aligned}$$

由 $t=0$ 时,$I=0$ 得 $c=\frac{\omega LU_m}{R^2+\omega^2L^2}$. 于是

$$I(t)=\frac{U_m}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t+\omega L\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}).$$

如令 $\sin\varphi=\frac{-\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}},\cos\varphi=\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$,则解可化为

$$I(t)=\frac{U_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}(\cos\varphi\sin\omega t+\sin\varphi\cos\omega t-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\sin\varphi),$$

即

$$I(t)=\frac{U_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}[\sin(\omega t+\varphi)-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\sin\varphi].$$

此解的物理意义是电路上电流分两部分,一部分随时间逐渐衰减最后为零;另一部分则是稳定的、与电动势周期相同但相位相差 φ 角的周期运动.

5. 试证:

(1) 一阶非齐次线性微分方程(2.28)的任两解之差必为相应的齐次线性微分方程(2.3)之解;

(2) 若 $y=y(x)$ 是(2.3)的非零解,而 $y=\tilde{y}(x)$ 是(2.28)的

解,则方程(2.28)的通解可表为 $y = cy(x) + \tilde{y}(x)$,其中 c 为任意常数;

(3) 方程(2.3)的任一解的常数倍或任两解之和(或差)仍为方程(2.3)的解.

证 (1) 设 $\varphi(t), \psi(t)$ 是方程(2.28)的任两解,即有 $\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv P(x)\varphi(x) + Q(t), \frac{d\psi(x)}{dx} \equiv P(x)\psi(x) + Q(t)$. 两式相减得 $\frac{d[\varphi(x) - \psi(x)]}{dx} \equiv P(x)[\varphi(x) - \psi(x)]$. 即 $\varphi(x) - \psi(x)$ 为齐次方程(2.3)之解.

(2) **证 1** 显然

$$\begin{aligned}\frac{d[cy(x) + \tilde{y}(x)]}{dx} &\equiv c\frac{dy(x)}{dx} + \frac{d\tilde{y}(x)}{dx} \\ &\equiv cP(x)y(x) + P(x)\tilde{y}(x) + Q(x) \\ &\equiv P(x)[cy(x) + \tilde{y}(x)] + Q(x).\end{aligned}$$

即 $y = cy(x) + \tilde{y}(x)$ 是(2.28)的解. 且 $\frac{\partial y}{\partial c} = y(x) \neq 0$, c 为任意常数,故 $y = cy(x) + \tilde{y}(x)$ 是方程(2.28)的通解.

证 2 设 $\bar{y}(x)$ 是(2.28)的任一解. 因(2.3)的通解为 $y = ce^{\int P(x)dx}$,而 $y = y(x)$ 是(2.3)的非零解,即有 $\bar{c} \neq 0$ 使得 $y(x) = \bar{c}e^{\int P(x)dx}$. 由(1)知 $\bar{y}(x) - \tilde{y}(x)$ 是(2.3)的解,即有 $\tilde{c}$,使得 $\bar{y}(x) - \tilde{y}(x) = \tilde{c}e^{\int P(x)dx}$. 于是有 $\bar{y}(x) = \frac{\tilde{c}}{\bar{c}}y(x) + \tilde{y}(x)$,即(2.28)的任一解均可表为 $cy(x) + \tilde{y}(x)$ 的形式. 故 $y = cy(x) + \tilde{y}(x)$ 是方程(2.28)的 通解.

(3) 设 $\tilde{y}(x), \bar{y}(x)$ 是(2.3)的任两解,c 为任意常数. 显然

$$\frac{d[c\tilde{y}(x)]}{dx} \equiv P(x)[c\tilde{y}(x)],$$

$$\frac{d[\tilde{y}(x) \pm \bar{y}(x)]}{dx} \equiv P(x)[\tilde{y}(x) \pm \bar{y}(x)].$$

6. 求解习题 1.2 第 8 题(5) 和(6).

提示 (5) $xy' = y - x^2, y' = \frac{y}{x} - x$,

$$y = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(-\int xx^{-1}dx + c\right) = x(c - x).$$

(6) $2xy' = y - x, y' = \frac{y}{2x} - \frac{1}{2}$,

$$y = e^{\int \frac{1}{2x}dx}\left(-\int \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx + c\right) = x^{\frac{1}{2}}\left(c - x^{\frac{1}{2}}\right) = c\sqrt{x} - x.$$

7. 求解下列方程:

(1) $(x^2 - 1)y' - xy + 1 = 0$.

解 化为线性方程 $y' = \frac{xy}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 - 1}$, 利用积分式 $\int (x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}}dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} + c(x^2 > 1)$ 及 $\int (1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + c(x^2 < 1)$, 有解

$$y = e^{\int \frac{x}{x^2 - 1}dx}\left(-\int \frac{1}{x^2 - 1}|x^2 - 1|^{-\frac{1}{2}}dx + c\right)$$

$$= \sqrt{|x^2 - 1|}\left(\frac{x}{\sqrt{|x^2 - 1|}} + c\right) = x + c\sqrt{|x^2 - 1|},$$

而当 $x^2 = 1$ 时 $x = \pm 1$ 有解 $y = \pm 1$. 依上, 方程的通解为 $y = x + c\sqrt{|x^2 - 1|}$, 其中 c 为任意常数.

(2) $x(x^2 - 1)y' - (2x^2 - 1)y + x^3 = 0$.

提示 化为线性方程 $y' = \frac{2x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}y - \frac{x^2}{x^2 - 1}$, 利用积分式

$$\int \frac{2x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 - 1}\right)dx = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2 - 1| + c,$$

有解

$$y = x\sqrt{|x^2-1|}\left(-\int \frac{x^2}{x^2-1}\frac{|x^2-1|^{-\frac{1}{2}}}{x}\mathrm{d}x + c\right)$$

$$= x(1 + c\sqrt{|x^2-1|}).$$

(3) $y'\sin x \cdot \cos x - y - \sin^3 x = 0.$

提示 化为线性方程 $y' = \dfrac{y}{\sin x \cdot \cos x} + \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$,利用积分公式[附录 Ⅱ §3.3 - 5(52)],有解

$$y = \mathrm{e}^{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x}}\left(\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\frac{1}{\tan x}\mathrm{d}x + c\right) = \tan x(-\cos x + c)$$

$$= c\tan x - \sin x \quad \left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right).$$

另外点$(x,y) = \left(k\pi + \dfrac{\pi}{2}, (-1)^{k+1}\right)$也是解,其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

§2.4.5 习题 2.3 及其解答

1. 验证下列方程是恰当微分方程,并求出方程的解:

(1) $(x^2 + y)\mathrm{d}x + (x - 2y)\mathrm{d}y = 0.$

解 1 $M = x^2 + y, N = x - 2y, \dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = 0$ 是恰当方程.

由$\dfrac{\partial u}{\partial x} = M, u = \int (x^2 + y)\partial x + C(y) = \dfrac{1}{3}x^3 + xy + C(y)$ 及$\dfrac{\partial u}{\partial y} = N = x - 2y$ 得

$$x + \frac{\mathrm{d}C(y)}{\mathrm{d}y} = x - 2y, \frac{\mathrm{d}C(y)}{\mathrm{d}y} = -2y, C(y) = -\int 2y\mathrm{d}y = -y^2.$$

于是 $u = \dfrac{1}{3}x^3 + xy + C(y) = \dfrac{1}{3}x^3 + xy - y^2$. 方程的通解为$\dfrac{1}{3}x^3 + xy - y^2 = c$,其中 c 为任意常数.

解 2 直接应用积分公式

$$\int M(x,y)\partial x + \int\left[N - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x\right]\mathrm{d}y = c.$$

由$\int M(x,y)\partial x = \int (x^2 + y)\partial x = \frac{1}{3}x^3 + xy$得通解式为

$$\frac{1}{3}x^3 + xy + \int\left[(x - 2y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{3}x^3 + xy\right)\right]\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + xy - \int 2y\mathrm{d}y = \frac{1}{3}x^3 + xy - y^2 = c.$$

解 3 组合成全微分式:$x^2\mathrm{d}x + (y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) - 2y\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\mathrm{d}x^3 + \mathrm{d}(xy) - \mathrm{d}y^2 = 0$,即$\frac{1}{3}x^3 + xy - y^2 = c.$

(2) $(y - 3x^2)\mathrm{d}x - (4y - x)\mathrm{d}y = 0.$

提示 $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$,是恰当方程.组合成全微分式,通解为$xy - x^3 - 2y^2 = c.$

(3) $\left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x + \left[\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}\right]\mathrm{d}y = 0.$

提示 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2xy}{(x-y)^3}$,是恰当方程.方程改写为$\frac{y^2\mathrm{d}x - x^2\mathrm{d}y}{(x-y)^2} + \frac{\mathrm{d}y}{y} - \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0$,通解为$\ln\left|\frac{y}{x}\right| - \frac{xy}{x-y} = c.$

(4) $2(3xy^2 + 2x^3)\mathrm{d}x + 3(2x^2y + y^2)\mathrm{d}y = 0.$

提示 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy$,是恰当方程.组合成全微分式,通解为$3x^2y^2 + x^4 + y^3 = c.$

(5) $\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + 1\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y = 0.$

提示 $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$,是恰当方程.可组合成$\sin\frac{y}{x}$,$\cos\frac{x}{y}$等

的全微分式，通解为 $\sin\dfrac{y}{x}-\cos\dfrac{x}{y}+x-\dfrac{1}{y}=c.$

2. 求下列方程的解：

(1) $2x(ye^{x^2}-1)dx+e^{x^2}dy=0.$

解 1　线性方程 $\dfrac{dy}{dx}=-2xy+2xe^{-x^2}$，对应齐次方程有

$$\frac{dy}{dx}=-2xy,\frac{dy}{y}=-2xdx,\ln|y|=-x^2+\tilde{c},y=ce^{-x^2}.$$

用常数变易法，令 $y=c(x)e^{-x^2}$，代入原方程得 $\dfrac{dc(x)}{dx}=2x,c(x)=x^2+\tilde{c}$. 于是通解为

$$y=c(x)e^{-x^2}=(x^2+\tilde{c})e^{-x^2}.$$

其中 $\tilde{c}$ 为任意常数.

解 2　线性方程 $\dfrac{dy}{dx}=-2xy+2xe^{-x^2}$，直接应用线性方程通解公式，通解为

$$y=e^{-\int 2xdx}\left(\int 2xe^{-x^2}e^{x^2}dx+c\right)=e^{-x^2}(x^2+c).$$

其中 c 为任意常数.

解 3　组合成全微分形式

$$ye^{x^2}dx^2+e^{x^2}dy-2xdx=yde^{x^2}+e^{x^2}dy-dx^2=0,$$

$$ye^{x^2}-x^2=c,y=e^{-x^2}(x^2+c).$$

(2) $(e^x+3y^2)dx+2xydy=0.$

解 1　化为线性方程 $\dfrac{dy^2}{dx}=-\dfrac{3}{x}y^2-\dfrac{e^x}{x}$. 有

$$y^2=e^{-\int 3x^{-1}dx}\left(c-\int x^{-1}e^xx^3dx\right)=x^{-3}[c-(x^2-2x+2)e^x],$$

通解为 $x^3y^2+(x^2-2x+2)e^x=c$，还有 $x=0$.

解 2　$\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}=4y\neq 0$，不是恰当方程. 但 $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\dfrac{2}{x}$ 仅

与 x 有关,有仅含 x 的积分因子 $\mu = e^{\int \frac{2}{x}dx} = x^2$. 于是有 $\frac{\partial u}{\partial y} = \mu N = 2x^3y$, $u = x^3y^2 + \varphi(x)$. 利用 $\frac{\partial u}{\partial x} = \mu M$ 和积分式[附录 Ⅱ §3.3-3(21)]可解得 $\varphi'(x) = x^2e^x$, $\varphi(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$, 于是 $u = x^3y^2 + \varphi(x) = x^3y^2 + (x^2 - 2x + 2)e^x$, 方程的积分式为 $x^3y^2 + (x^2 - 2x + 2)e^x = c$, 还有 $x = 0$.

注 因同时有 $\frac{\partial u}{\partial x} = \mu M$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \mu N$, 选 $\frac{\partial u}{\partial y} = \mu N$ 较容易求积分.

解3 由解2知方程有仅含 x 的积分因子 $\mu = x^2$ 后,直接利用积分公式得

$$\int \mu N \partial y + \int \left(\mu M - \frac{\partial}{\partial x}\int \mu N \partial y\right)dx = c,$$

$$\int (2x^3y)\partial y + \int [x^2(e^x + 3y^2) - 3x^2y^2]dx = x^3y^2 + \int x^2e^x dx = c,$$

即

$$x^3y^2 + (x^2 - 2x + 2)e^x = c,$$

还有 $x = 0$.

注 含积分因子 μ 的积分式有两种形式:

$$\int \mu M \partial x + \int \left(\mu N - \frac{\partial}{\partial y}\int \mu M \partial x\right)dy = c,$$

和

$$\int \mu N \partial y + \int \left(\mu M - \frac{\partial}{\partial x}\int \mu N \partial y\right)dx = c,$$

可视方便任选一种.

解4 方程乘积分因子 $\mu = x^2$ 后组合成全微分形式,化为

$$x^2(e^x + 3y^2)dx + 2x^3ydy = x^2e^xdx + d(x^3y^2),$$

积分得

$$(x^2 - 2x + 2)e^x + x^3y^2 = c,$$

还有 $x = 0$.

(3) $2xy\mathrm{d}x+(x^2+1)\mathrm{d}y=0$.

提示 线性方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{y}{x^2+1}$;$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0$,是恰当方程;分项组合 $\mathrm{d}x^2y+\mathrm{d}y=0$. 方程的积分式为 $x^2y+y=c$(含特解 $y=0$).

(4) $y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=(x^2+y^2)\mathrm{d}x$.

提示 利用全微分式$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\left(\arctan\frac{x}{y}\right)$. 方程的解为 $\arctan\frac{x}{y}=x+c$ 及 $x=0$.

(5) $y\mathrm{d}x-(x+y^3)\mathrm{d}y=0$.

提示 线性方程$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x}{y}+y^2$;$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=-\frac{2}{y}$,有积分因子 $\mu=y^{-2}$;乘积分因子 $\mu=y^{-2}$ 后利用全微分式$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)$. 方程的积分式为 $2x=y(y^2+c)$. 还有解 $y=0$.

(6) $(y-1-xy)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$.

提示 线性方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x-1}{x}y+\frac{1}{x}$;$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=-1$,有积分因子 $\mu=\mathrm{e}^{-x}$;乘积分因子 $\mu=\mathrm{e}^{-x}$ 后分项组合得积分式 $xy\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}=c$. 通解为 $y=\frac{1}{x}(c\mathrm{e}^{x}-1)$ 及 $x=0$.

(7) $(y-x^2)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$.

提示 线性方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}-x$;$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=-\frac{2}{x}$,有积分因子 $\mu=x^{-2}$;乘积分因子 $\mu=x^{-2}$ 后利用全微分式$\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2}=\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)$. 方程的积分式 $y+x^2=cx$. 通解为 $y=cx-x^2$ 及 $x=0$.

(8) $(x+2y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0.$

提示 线性方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{2y}{x}-1$；$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{1}{x}$，有积分因子$\mu=x$. 方程的积分式为$x^3+3x^2y=c$. 还有解$x=0$.

(9) $[x\cos(x+y)+\sin(x+y)]\mathrm{d}x+x\cos(x+y)\mathrm{d}y=0.$

提示 恰当方程. 令$z=x+y$. 化为x,z的方程. 通解为$x\sin(x+y)=c, x=0$.

(10) $(y\cos x-x\sin x)\mathrm{d}x+(y\sin x+x\cos x)\mathrm{d}y=0.$

提示 $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=1$，有积分因子$\mu=\mathrm{e}^y$. 直接应用积分公式

$$\int\mu M\partial x+\int\left(\mu N-\frac{\partial}{\partial y}\int\mu M\partial x\right)\mathrm{d}y=c$$

及积分式[附录 Ⅱ §3.3 - 5(44)]，得方程的积分式为

$$\mathrm{e}^y(y-1)\sin x+\mathrm{e}^y x\cos x=c \text{ 及 } x=0.$$

(11) $x(4y\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y)+y^3(3y\mathrm{d}x+5x\mathrm{d}y)=0.$

解 1 M,N为多项式，设积分因子形式为$\mu=x^my^n$，于是方程乘积分因子后变为

$$(4x^{m+1}y^{n+1}+3x^my^{n+4})\mathrm{d}x+(2x^{m+2}y^n+5x^{m+1}y^{n+3})\mathrm{d}y=0.$$

恰当方程充要条件为

$$4(n+1)x^{m+1}y^n+3(n+4)x^my^{n+3}$$
$$=2(m+2)x^{m+1}y^n+5(m+1)x^my^{n+3}.$$

对比系数项得$4n-2m=0, 3n-5m+7=0$，有解$n=1, m=2$. 即积分因子为$\mu=x^2y$. 方程乘积分因子后为

$$4x^3y^2\mathrm{d}x+3x^2y^5\mathrm{d}x+2x^4y\mathrm{d}y+5x^3y^4\mathrm{d}y=\mathrm{d}(x^4y^2)+\mathrm{d}(x^3y^5)=0.$$

求得方程的积分式为

$$x^4y^2+x^3y^5=c \text{ 和 } x=0, y=0.$$

解 2 应用[书习题2.3 - 7]：$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=7y^3=(2x^2+5xy^3)$

$\frac{2}{x}-(4xy+3y^4)\frac{1}{y}$,取$f(x)=\frac{2}{x}$,$g(y)=\frac{1}{y}$,得积分因子为$\mu=e^{\int\frac{2}{x}dx+\int\frac{1}{y}dy}=x^2y$. 利用积分公式

$$\int\mu M\partial x+\int\left(\mu N-\frac{\partial}{\partial y}\int\mu M\partial x\right)dy=c,$$

有

$$x^4y^2+x^3y^5+\int[2x^4y+5x^3y^4-(2x^4y+5x^3y^4)]dx=c,$$

即方程的积分式为$x^4y^2+x^3y^5=c$. 还有$x=0,y=0$也是解.

3. 试导出方程$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$分别具有形为$\mu(x+y)$和$\mu(xy)$的积分因子的充要条件.

解 μ为积分因子的充要条件为$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$. 即

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=N\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\frac{\partial N}{\partial x}.$$

对$\mu(x+y)$,令$u=x+y$. 有

$$M\mu'+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=N\mu'+\mu\frac{\partial N}{\partial x},$$

即

$$\frac{\mu'}{\mu}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\cdot(N-M)^{-1},$$

即当且仅当$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\cdot(N-M)^{-1}=f(x+y)$时有积分因子$\mu=e^{\int f(u)u}=e^{\int f(x+y)d(x+y)}$.

对$\mu(xy)$,令$v=xy$. 有

$$xM\mu'+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=yN\mu'+\mu\frac{\partial N}{\partial x},$$

即

$$(xM-yN)\mu'+\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu=0,$$

即当且仅当$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\cdot(yN-xM)^{-1}=g(xy)$时有积分因子$\mu=$
$e^{\int g(v)v}=e^{\int g(xy)d(xy)}$.

4. 设$f(x,y)$及$\frac{\partial f}{\partial y}$连续,试证方程$dy-f(x,y)dx=0$为线性微分方程的充要条件是它有仅依赖于$x$的积分因子.

证　充分性. 设方程为线性微分方程$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$可化为

$$dy-f(x,y)dx=0, f(x,y)=P(x)y+Q(x)=-M, N=1.$$

因$\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=-P(x)$,有仅依赖于$x$的积分因子$\mu=e^{-\int P(x)dx}$.

必要性. 设方程$dy-f(x,y)dx=0$有仅依赖于x的积分因子$\mu=\mu(x)$. 即$\mu(x)dy-\mu(x)f(x,y)dx=0$是恰当方程,即

$$\frac{\partial\mu(x)}{\partial x}=-\frac{\partial(\mu(x)f(x,y))}{\partial y}=-\mu(x)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

可化为

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-\frac{1}{\mu(x)}\frac{\partial\mu(x)}{\partial x}.$$

方程右端仅含x,可设$-\frac{1}{\mu(x)}\frac{\partial\mu(x)}{\partial x}=P(x)$于是有$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=P(x)$,积分得

$$f(x,y)=\int P(x)\partial y+Q(x)=P(x)y+Q(x).$$

即

$$dy-f(x,y)dx=dy-[P(x)y+Q(x)]dx=0,$$

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x).$$

方程为线性微分方程.

5. 试证齐次微分方程$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$当$xM+$

$yN \neq 0$ 时有积分因子 $\mu = \frac{1}{xM + yN}$.

证 由齐次微分方程的性质有 $M(x,ux) = x^m M(1,u)$，$N(x,ux) = x^m N(1,u)$，其中 m 为其常数. 方程乘积分因子 $\mu = \frac{1}{xM + yN}(xM + yN \neq 0)$ 后变为

$$\frac{M}{xM + yN}\mathrm{d}x + \frac{N}{xM + yN}\mathrm{d}y = 0.$$

当令 $y = ux$ 时有 $\mathrm{d}y = u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u$ 于是

$$\frac{M(x,ux) + uN(x,ux)}{xM(x,ux) + yN(x,ux)}\mathrm{d}x + \frac{xN(x,ux)}{xM(x,ux) + yN(x,ux)}\mathrm{d}u = 0,$$

即

$$\frac{1}{x}\mathrm{d}x + \frac{N(1,u)}{M(1,u) + uN(1,u)}\mathrm{d}u = 0.$$

此为恰当方程，有解

$$x = ce^{-\int \frac{N(1,u)}{M(1,u) + uN(1,u)}\mathrm{d}u}.$$

这证明了 $\mu = \frac{1}{xM + yN}(xM + yN \neq 0)$ 是使方程变为恰当方程的积分因子.

6. 设函数 $f(u)$，$g(u)$ 连续、可微，且 $f(u) \neq g(u)$. 试证方程

$$yf(xy)\mathrm{d}x + xg(xy)\mathrm{d}y = 0$$

有积分因子 $\mu = \{xy[f(xy) - g(xy)]\}^{-1}$.

证 将 $\mu = \{xy[f(xy) - g(xy)]\}^{-1}$ 乘方程得

$$\frac{yf(xy)}{xy[f(xy) - g(xy)]}\mathrm{d}x + \frac{xg(xy)}{xy[f(xy) - g(xy)]}\mathrm{d}y = 0.$$

令 $u = xy$，$\mathrm{d}u = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$，上式化为

$$\frac{yf(u)}{u[f(u) - g(u)]}\mathrm{d}x + \frac{xg(u)}{u[f(u) - g(u)]}\left(\frac{\mathrm{d}u}{x} - \frac{y\mathrm{d}x}{x}\right) = 0.$$

化简得

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{g(u)}{u[f(u) - g(u)]}\mathrm{d}u = 0,$$

是恰当方程,有积分式

$$\ln|x| + \int \frac{g(u)}{u[f(u) - g(u)]}\mathrm{d}u = c.$$

这证明了 $\mu = \{xy[f(xy) - g(xy)]\}^{-1}$ 是使方程变为恰当方程的积分因子.

7. 假设方程(2.42)中的函数 $M(x,y),N(x,y)$ 满足关系

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = Nf(x) - Mg(y),$$

其中 $f(x),g(y)$ 分别是 x,y 的连续函数,试证方程(2.42)有积分因子 $\mu = \exp\left[\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(y)\mathrm{d}y\right]$.

证 将 $\mu = \exp\left[\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(y)\mathrm{d}y\right]$ 乘方程得

$$\mathrm{e}^{\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(y)\mathrm{d}y}M\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(y)\mathrm{d}y}N\mathrm{d}y = 0.$$

由条件可得

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} - \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} = \mu\left(gM + \frac{\partial M}{\partial y} - fN - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \equiv 0.$$

因 $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$,由积分因子的定义知 $\mu = \exp\left[\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(y)\mathrm{d}y\right]$ 为积分因子.

8. 求出伯努利微分方程的积分因子.

解 伯努利微分方程为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y + Q(x)y^n, n \neq 0,1$. 利用变换 $z = y^{1-n}, \mathrm{d}z = (1-n)y^{-n}\mathrm{d}y$ 可化为线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (1-n)P(x)z + (1-n)Q(x).$$

由第4题知,上面线性方程有积分因子 $\mu = \mathrm{e}^{-\int(1-n)P(x)\mathrm{d}x}$. 因此,原方程有积分因子 $\mu = y^{-n}\mathrm{e}^{-\int(1-n)P(x)\mathrm{d}x}$.

实际上,对称形式的伯努利微分方程

$$\left[P(x)y+Q(x)y^n\right]\mathrm{d}x-\mathrm{d}y=0.$$

乘上积分因子 $\mu=y^{-n}\mathrm{e}^{-\int(1-n)P(x)\mathrm{d}x}$ 后变为

$$[P(x)y+Q(x)y^n]y^{-n}\mathrm{e}^{-\int(1-n)P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x-y^{-n}\mathrm{e}^{-\int(1-n)P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}y=0.$$

取变换 $z=y^{1-n},\mathrm{d}z=(1-n)y^{-n}\mathrm{d}y$ 可化为

$$[P(x)z+Q(x)]\mathrm{e}^{-\int(1-n)P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x-\frac{1}{1-n}\mathrm{e}^{-\int(1-n)P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}z=0,$$

于是

$$\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}=P(x)\mathrm{e}^{-\int(1-n)P(x)\mathrm{d}x}-P(x)\mathrm{e}^{-\int(1-n)P(x)\mathrm{d}x}=0.$$

方程为恰当方程.

9. 设 $\mu(x,y)$ 是方程(2.42)的积分因子,从而求得可微函数 $U(x,y)$. 使得 $\mathrm{d}U=\mu(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y)$. 试证 $\tilde{\mu}(x,y)$ 也是方程(2.42)的积分因子的充要条件是 $\tilde{\mu}(x,y)=\mu\varphi(U)$,其中 $\varphi(t)$ 是 t 的可微函数.

证 充分性. 当有 $\mathrm{d}U=\mu(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y)$ 及 $\tilde{\mu}(x,y)=\mu\varphi(U)$ 时,对方程(2.42)有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\tilde{\mu}M)}{\partial y}-\frac{\partial(\tilde{\mu}N)}{\partial x}\\
&=\tilde{\mu}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)+\left(M\frac{\partial\tilde{\mu}}{\partial y}-N\frac{\partial\tilde{\mu}}{\partial x}\right)\\
&=\mu\varphi(U)\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)+M\frac{\partial\mu}{\partial y}\varphi(U)+\mu^2M\varphi'(U)N-\\
&\quad N\frac{\partial\mu}{\partial x}\varphi(U)-\mu^2N\varphi'(U)M\\
&=\varphi(U)\left[\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}-\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}\right]+\mu^2\varphi'(U)(MN-NM)\equiv 0,
\end{aligned}$$

即 $\tilde{\mu}(x,y)$ 也是方程(2.42)的积分因子.

必要性. 设 $\tilde{\mu}(x,y)$ 也是方程(2.42)的积分因子. 于是同时有

$$\mu(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y)=\mathrm{d}U,\tilde{\mu}(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y)=\mathrm{d}V,$$

即

$$\mu M = \frac{\partial U}{\partial x}, \mu N = \frac{\partial U}{\partial y}, \tilde{\mu} M = \frac{\partial V}{\partial x}, \tilde{\mu} N = \frac{\partial V}{\partial y},$$

因此

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu M & \mu N \\ \tilde{\mu} M & \tilde{\mu} N \end{vmatrix} \equiv 0.$$

函数 $U(x,y)$, $V(x,y)$ 的雅可比行列式恒等于零，且 $\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} = \mu^2 MN \neq 0$. 因此函数 $U(x,y)$, $V(x,y)$ 彼此相关，可表示为 $V(x,y) = \psi(U(x,y))$. 于是

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y) &= \mathrm{d}V = \mathrm{d}\psi(U) = \psi'(U)\mathrm{d}U \\ &= \psi'(U)\mu(M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y), \end{aligned}$$

即有关系式 $\tilde{\mu} = \mu\psi'(U)$. 记 $\varphi(U) = \psi'(U)$，有 $\tilde{\mu} = \mu\varphi(U)$.

10. 设 $\mu_1(x,y)$, $\mu_2(x,y)$ 是方程(2.42)的两个积分因子，且 $\frac{\mu_1}{\mu_2} \neq$ 常数，求证 $\frac{\mu_1}{\mu_2} = c$（任意常数）是方程(2.42)的通解.

证 按积分因子定义有 $\mu_2(M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y) = \mathrm{d}U = 0$. 得积分式 $U(x,y) = c$，其中 c 为任意常数. 且由第 9 题知有 $\mu_1 = \mu_2\varphi(U)$，可得 $\frac{\mu_1}{\mu_2} = \varphi(U)$. 即 $\frac{\mu_1}{\mu_2} = c$（任意常数）等价于 $\varphi(U) = c$（任意常数）. 于是

$$0 \equiv \mathrm{d}\varphi(U) \equiv \varphi'(U)\mathrm{d}U \equiv \varphi'(U)\mu_2(M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y).$$

因 $\mu_2 \neq 0$, $\varphi(U)$ 不恒为常数，即 $\varphi'(U) \neq 0$. 故 $M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y \equiv 0$，即由 $\varphi(U) = c$（任意常数）确定的解 $y = y(x)$ 是方程的解. 这说明了 $\frac{\mu_1}{\mu_2} = c$（任意常数）是方程的通解.

11. 假设第 5 题中微分方程还是恰当的，试证它的通解可表为 $xM(x,y) + yN(x,y) = c$（任意常数）.

证 由第 5 题假设方程 $M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = 0$ 有积分因子 $\mu_2 = \frac{1}{xM + yN}$. 而现又设方程还是恰当的,即又有积分因子 $\mu_1 = 1$. 由第 10 题知 $\frac{\mu_1}{\mu_2} = c$(任意常数)是方程的通解. 代入即得 $xM(x,y) + yN(x,y) = c$ 是方程的通解(任意常数).

§2.4.6 习题 2.4 及其解答

求解下列方程:

(1) $xy'^3 = 1 + y'$.

解 1 可解出 x;不显含 y. 解出 x. 令 $y' = p$,得

$$x = \frac{1+p}{p^3}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{p} = \frac{p^3 - 3p^2(1+p)}{p^6}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \frac{-3-2p}{p^4}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y},$$

$$\mathrm{d}y = \frac{-3-2p}{p^3}\mathrm{d}p, y = \frac{3}{2p^2} + \frac{2}{p} + c.$$

解为

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{p^3} + \dfrac{1}{p^2}, \\ y = \dfrac{3}{2p^2} + \dfrac{2}{p} + c, \end{cases}$$

其中 p 为参数,c 为任意常数.

解 2 不显含 y. 记 $y' = \frac{1}{t}$,则方程化为 $xt^{-3} = 1 + t^{-1}$,$x = t^3 + t^2$ 及

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{t} = t^{-1}\mathrm{d}(t^3 + t^2) = (3t+2)\mathrm{d}t,$$

$$y = \frac{3}{2}t^2 + 2t + c.$$

解为

$$\begin{cases} x = t^3 + t^2, \\ y = \dfrac{3}{2}t^2 + 2t + c, \end{cases}$$

其中 t 为参数，c 为任意常数.

(2) $y'^3 - x^3(1 - y') = 0$.

方程不显含 y. 记 $y' = tx$，则方程化为 $t^3 - (1 - tx) = 0, x = t^{-1} - t^2$. 又有

$$\begin{aligned} dy &= tx dx = t(t^{-1} - t^2) d(t^{-1} - t^2) \\ &= (1 - t^3)(-t^{-2} - 2t) dt \\ &= (-t^{-2} - t + 2t^4) dt. \end{aligned}$$

积分得

$$y = t^{-1} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{5}t^5 + c.$$

解为

$$\begin{cases} x = t^{-1} - t^2, \\ y = t^{-1} - \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{2}{5}t^5 + c, \end{cases}$$

其中 t 为参数，c 为任意常数.

(3) $y = y'^2 e^{y'}$.

提示 已解出 y；不显含 x. 令 $y' = p$，有 $y = p^2 e^p$ 及 $dx = \frac{1}{p} dy = (p + 2) e^p dp$. 解为 $y = p^2 e^p, x = (p + 1) e^p + c$. 另外有解 $y = 0$.

(4) $y(1 + y'^2) = 2a$ （a 为常数）.

解 1 方程可解出 y；不显含 x. 令 $y' = p$，有 $y = \frac{2a}{1 + p^2}$. 又 $p = y' = -\frac{4app'}{(1 + p^2)^2}$，即 $p = 0$ 及 $dx = -\frac{4a}{(1 + p^2)^2} dp$. 由 $p = 0$ 得解 $y = 2a$，后式可利用积分公式

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x,$$

得 $x = -\frac{2ap}{1+p^2} - 2a\arctan p + c$. 于是方程有解

$$\begin{cases} x = -\frac{2ap}{1+p^2} - 2a\arctan p + c, \\ y = \frac{2a}{1+p^2} \end{cases}$$

和 $y = 2a$，其中 p 为参数，c 为任意常数.

解 2 令 $y' = \tan \varphi$，有 $y = 2a\cos^2\varphi$. 且有 $\mathrm{d}y = -4a\sin \varphi\cos \varphi\mathrm{d}\varphi$，即 $\sin \varphi = 0$，$\varphi = 0$ 及 $\mathrm{d}x = \frac{1}{y'}\mathrm{d}y = -4a\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi$，$x = -a\sin 2\varphi - 2a\sin \varphi + c$. 当 $\varphi = 0$ 时还有解 $y = 2a$. 于是方程的解为

$$\begin{cases} x = -a\sin 2\varphi - 2a\sin \varphi + c, \\ y = 2a\cos^2\varphi, \end{cases}$$

和 $y = 2a$，其中 φ 为参数，c 为任意常数.

注 上式是利用积分公式[附录 Ⅱ §3.3 - 5(43)]. 亦可将 $\mathrm{d}x = -4a\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi$ 化为 $\mathrm{d}x = -4a\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi = -2a(1+\cos 2\varphi)\mathrm{d}\varphi$，此时积分得 $x = -a(2\varphi + \sin 2\varphi) + c$.

(5) $x^2 + y'^2 = 1$.

提示 1 方程不显含 y. 令 $y' = \cos t$，则方程化为 $x = \sin t$ 及 $\mathrm{d}y = \cos^2 t\mathrm{d}t$，即 $\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$. 方程有解 $x = \sin t$，$y = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + c$.

提示 2 方程可解出 x. 令 $y' = p$，得 $x = \pm\sqrt{1-p^2}$ 及 $\mathrm{d}y = \frac{\mp p^2}{\sqrt{1-p^2}}\mathrm{d}p$. 方程有解

$$x=\pm\sqrt{1-p^2},y=\pm\frac{p}{2}\sqrt{1-p^2}\mp\frac{1}{2}\arcsin p+c.$$

(6) $y^2(y'-1)=(2-y')^2$.

提示　方程不显含 x. 令 $2-y'=ty$,则方程化为 $y=t^{-1}-t$. 于是 $y'=2-ty=1+t^2$, $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{y'}=-t^{-2}\mathrm{d}t$, $x=t^{-1}+c$. 方程的解为 $x=t^{-1}+c$, $y=t^{-1}-t$. 消去 t 得 $y=x-c-\frac{1}{x-c}$.

§2.4.7　习题 2.5 及其解答

1. 求下列方程的解:

(1) $y\sin x+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cos x=1$.

解 1　化为线性方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y\tan x+\frac{1}{\cos x}$. 方程的解为

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{-\int\tan x\mathrm{d}x}\left(\int\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x+c\right)=\cos x(\tan x+c)\\&=\sin x+c\cos x,\end{aligned}$$

其中 c 为任意常数.

解 2　化为对称形式 $(y\sin x-1)\mathrm{d}x+\cos x\mathrm{d}y=0$. 因 $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=2\tan x$,有仅含 x 的积分因子 $\mu=\mathrm{e}^{\int 2\tan x\mathrm{d}x}=\cos^{-2}x$. 用积分因子乘方程得

$$\begin{aligned}&(y\sin x-1)\cos^{-2}x\mathrm{d}x+\cos^{-1}x\mathrm{d}y\\&=y\mathrm{d}\cos^{-1}x+\cos^{-1}x\mathrm{d}y-\cos^{-2}x\mathrm{d}x\\&=\mathrm{d}(y\cos^{-1}x)-\cos^{-2}x\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

利用积分公式 $\int\frac{1}{\cos^2x}\mathrm{d}x=\frac{\sin x}{\cos x}+c$,得解

$$y\cos^{-1}x-\sin x\cos^{-1}x=c,\quad y=\sin x+c\cos x,$$

其中 c 为任意常数.

(2) $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = x^2 y\mathrm{d}y$.

提示 1 化为$\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2} = y\mathrm{d}y$,即 $-\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right) = y\mathrm{d}y$. 解为

$$\frac{y}{x} + \frac{1}{2}y^2 = c.$$

提示 2 $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = -\dfrac{2}{x}$,有积分因子 $\mu = \mathrm{e}^{-\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x} = x^{-2}$.

(3) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4\mathrm{e}^{-y}\sin x - 1$.

提示 化为$\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^y}{\mathrm{d}x} = 4\sin x - \mathrm{e}^y$. 令 $z = \mathrm{e}^y$ 得线性方程. 解为

$$\mathrm{e}^y = z = \mathrm{e}^{-x}\left(\int 4\sin x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x + c\right)$$
$$= 2(\sin x - \cos x) + c\mathrm{e}^{-x}.$$

(4) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x - \sqrt{xy}}$.

解 化为伯努利方程$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = y^{-1}x - y^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$,$n = \frac{1}{2} \neq 0,1$. 令 $z = x^{\frac{1}{2}}$,化为线性方程$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{2y}z - \frac{1}{2\sqrt{y}}$. 有解

$$z = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{2y}\mathrm{d}y}\left(-\int \frac{1}{2\sqrt{y}}y^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y + c\right) = y^{\frac{1}{2}}\left(c - \frac{1}{2}\ln|y|\right),$$

即

$$x = y\left(c - \frac{1}{2}\ln|y|\right)^2,$$

其中 c 为任意常数. 此外方程尚有解 $y = 0$.

(5) $(xy\mathrm{e}^{\frac{x}{y}} + y^2)\mathrm{d}x - x^2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y = 0$.

提示 令 $z = \frac{x}{y}$. 有$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,$x\mathrm{d}z = z\mathrm{d}x - z^2\mathrm{d}y$,方程

化为

$$(ze^z+1)dx - z^2e^z dy = 0,$$

$$(ze^z+1)dx + e^z(xdz - zdx) = 0, dx + e^z x dz = 0,$$

有$\frac{dx}{x}+e^z dz = 0$. 得 $e^z+\ln|x| = c$,即通解为 $e^{\frac{x}{y}}+\ln|x| = c$. 另外有解 $x=0$ 和 $y=0$.

(6) $(xy+1)ydx - xdy = 0$.

提示 y^{-2} 乘全式化为 $xdx+\frac{ydx-xdy}{y^2}=0$. 解为$\frac{1}{2}x^2+\frac{x}{y}=c$. 另外有解 $x=0$ 和 $y=0$.

(7) $(2x+2y-1)dx+(x+y-2)dy=0$.

解 1 方程为$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+2y-1}{-x-y+2}$,方程组$\begin{cases}2x+2y-1=0,\\-x-y+2=0\end{cases}$的行列式$\begin{vmatrix}2 & 2\\-1 & -1\end{vmatrix}=0$,令 $u=-x-y$. 有$\frac{du}{dx}=-1-\frac{dy}{dx}=-1-\frac{-2u-1}{u+2}=\frac{u-1}{u+2}$,即 $u\neq 1$ 时$\left(1+\frac{3}{u-1}\right)du = dx$. 积分得 $u+3\ln|u-1| = x+\tilde{c}, e^{x+\tilde{c}-u} = |1-u|^3$,通解为$(x+y+1)^3 = ce^{2x+y}$,其中 c 为任意常数. $u=1$,即 $x+y=-1$ 亦为解,它含于通解中.

解 2 令 $u=x+y, du=dx+dy$,方程化为

$$\begin{aligned}(2u-1)dx+(u-2)dy &= (2u-1)dx+(u-2)(du-dx)\\ &= (u+1)dx+(u-2)du = 0.\end{aligned}$$

分离变量后积分之,当 $u\neq -1$ 时有

$$\frac{u-2}{u+1}du = \left(1-\frac{3}{u+1}\right)du = -dx,$$

$$u-3\ln|u+1| = -x+\tilde{c}, e^{u+x-\tilde{c}} = (u+1)^3.$$

方程的通解为$(x+y+1)^3 = ce^{2x+y}$,其中 c 为任意常数. $u=-1$ 即 $x+y=-1$ 亦为解,它含于通解中.

(8) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}$.

提示 方程为伯努利方程，$n=2\neq 0,1$. 方程乘 y^{-2} 并令 $z=y^{-1}$ 后化为 $\frac{dz}{dx}=-\frac{z}{x}-\frac{1}{x^3}$. 得 $z=e^{-\int\frac{dx}{x}}\left(-\int\frac{1}{x^3}x dx+c\right)=x^{-1}(x^{-1}+c)$. 即解为 $\frac{1}{y}=\frac{1}{x^2}+\frac{c}{x}$，还有解 $y=0$.

(9) $\frac{dy}{dx}=3y+x-2$.

提示 方程为线性方程. 解为 $y=e^{\int 3dx}\left[\int(x-2)e^{-3x}dx+c\right]$，即 $y=ce^{3x}-\frac{1}{3}x+\frac{5}{9}$.

(10) $x\frac{dy}{dx}=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

提示 方程可解出 x；不显含 y. 令 $\frac{dy}{dx}=p$，方程变为 $x=\frac{1}{p}+p$. 且有

$\frac{1}{p}=\frac{dx}{dy}=\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dy}, dy=\left(p-\frac{1}{p}\right)dp, y=\frac{1}{2}p^2-\ln|p|+c.$

解为 $x=\frac{1}{p}+p, y=\frac{1}{2}p^2-\ln|p|+c$.

(11) $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y^2+3}$.

提示 方程化为 $(x+1)dx-(ydx+xdy)-(y^2+3)dy=0$. 解为

$$\frac{1}{2}x^2+x-xy-\frac{1}{3}y^3-3y=c.$$

(12) $e^{-y}\left(\frac{dy}{dx}+1\right)=xe^x$.

提示 令 $z=e^{-y}$，$\frac{dz}{dx}=-z\frac{dy}{dx}$. 方程化为线性方程 $\frac{dz}{dx}=z-$

xe^x. 有解

$$z = e^x\left(-\int x\mathrm{d}x + c\right) = e^x\left(c - \frac{1}{2}x^2\right).$$

方程的积分式为 $e^{x+y}\left(c - \frac{1}{2}x^2\right) = 1$，即 $e^{-(x+y)} + \frac{1}{2}x^2 = c$.

(13) $(x^2 + y^2)\mathrm{d}x - 2xy\mathrm{d}y = 0$.

提示 $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = -\dfrac{2}{x}$，有积分因子 $\mu = e^{-\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x} = x^{-2}$. 用 x^{-2} 乘全式，用公式或组合可得解 $\mathrm{d}x + \dfrac{y^2\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y^2}{x^2} = 0$，$x - \dfrac{y^2}{x} = c$ 或 $x(x-c) = y^2$. 还有 $x = 0$.

(14) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y + 1$.

提示 线性方程. 有解

$$y = e^{\int \mathrm{d}x}\left[\int (x+1)e^{-x}\mathrm{d}x + c\right] = e^x(c - xe^{-x} - 2e^{-x})$$
$$= ce^x - x - 2.$$

(15) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$.

提示 令 $z = \dfrac{y}{x}$，得 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{y}{x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x}e^z$，$\ln|x| = -e^{-z} + c$，解为 $\ln|x| + e^{-\frac{y}{x}} = c$.

(16) $(x+1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 1 = 2e^{-y}$.

提示 化为线性方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{x+1}{2e^{-y} - 1}$，有解

$$x = e^{\int \frac{1}{2e^{-y}-1}\mathrm{d}y}\left[\int \frac{1}{2e^{-y} - 1}(2 - e^y)\mathrm{d}y + c\right] = (2 - e^y)^{-1}(e^y + c),$$

即 $x(2 - e^y) = e^y + c$.

(17) $(x - y^2)\mathrm{d}x + y(x+1)\mathrm{d}y = 0$.

提示 化为伯努利方程$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+1}-\frac{x}{(x+1)y}$, $n=-1\neq 0$, 1. 令 $z=y^2$ 后化为线性方程$\frac{dz}{dx}=\frac{2}{x+1}z-\frac{2x}{x+1}$. 有

$$y^2=z=e^{\int\frac{2}{x+1}dx}\left[-\int\frac{2x}{x+1}(x+1)^{-2}dx+c\right]$$

$$=(x+1)^2\left\{-\int\left[\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{2}{(x+1)^3}\right]dx+c\right\},$$

得解 $y^2=2x+1+c(x+1)^2$. 另外有解 $x=-1$.

(18) $4x^2y^2dx+2(x^3y-1)dy=0$.

提示 $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=-\frac{1}{2y}$,有积分因子$\mu=e^{-\int\frac{1}{2y}dy}=y^{-\frac{1}{2}}$. 用$y^{-\frac{1}{2}}$乘全式可得$4x^2y^{\frac{3}{2}}dx+2x^3y^{\frac{1}{2}}dy-2y^{-\frac{1}{2}}dy=d\left(\frac{4}{3}x^3y^{\frac{3}{2}}\right)-2y^{-\frac{1}{2}}dy=0$,有通解$(x^3y-3)y^{\frac{1}{2}}=c$(含特解 $y=0$).

(19) $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2y\frac{dy}{dx}+4x=0$.

提示 可解出 y 或 x. 令$\frac{dy}{dx}=p$,于是

$$y=x\left(\frac{p}{2}+\frac{2}{p}\right),p=\frac{dy}{dx}=\frac{p}{2}+\frac{2}{p}+x\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{p^2}\right)\frac{dp}{dx},$$

$$p\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{p^2}\right)=x\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}.$$

有 $p^2=4$, $p=\pm 2$ 及 $p=x\frac{dp}{dx}$, $p=cx$. 代入上面第一式得解 $y=\pm 2x$ 及 $2cy=c^2x^2+4$.

(20) $y^2\left[1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=1$.

提示 可解出$\frac{dy}{dx}=\frac{\pm\sqrt{y^2-1}}{y}$, $\frac{\pm y dy}{\sqrt{y^2-1}}=dx$, $\pm\sqrt{y^2-1}=$

$x+c, y^2=1+(x+c)^2$. 还有解 $y=\pm 1$.

(21) $(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$.

提示 可令 $z=\frac{x}{y}$, $ydz+zdy=dx$, 得 $(1+e^z)dx+e^z(1-z)dy=0$, 即 $(1+e^z)ydz+(z+e^z)dy=0$. 于是有 $\frac{1+e^z}{z+e^z}dz=\frac{d(z+e^z)}{z+e^z}=-\frac{dy}{y}$, 积分得 $(z+e^z)y=c$, 即通解为 $x+ye^{\frac{x}{y}}=c$.

(22) $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$.

提示 1 $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0$ 为恰当方程. 用公式

$$\int M\partial x+\int\left(N-\frac{\partial}{\partial y}\int M\partial x\right)dy=\frac{x^2}{y^3}+\int\left(\frac{y^2-3x^2}{y^4}+\frac{3x^2}{y^4}\right)dy$$
$$=\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=c,$$

即积分式为 $cy^3=x^2-y^2$.

提示 2 组合积分:

$$\frac{1}{y^3}dx^2+\frac{1}{y^2}dy+x^2d\frac{1}{y^3}=d\frac{x^2}{y^3}+\frac{1}{y^2}dy=0,$$
$$\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=c, x^2-y^2=cy^3.$$

(23) $ydx-(1+x+y^2)dy=0$.

提示 $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=-\frac{2}{y}$, 有积分因子 $\mu=e^{-\int\frac{2}{y}dy}=y^{-2}$. 用 y^{-2} 乘全式再组合可得解: $\frac{ydx-xdy}{y^2}-\left(\frac{1}{y^2}+1\right)dy=d\left(\frac{x}{y}\right)-\left(\frac{1}{y^2}+1\right)dy=0$, $\frac{x}{y}+\frac{1}{y}-y=c$, $x+1=y(y+c)$. 还有解 $y=0$.

(24) $[y - x(x^2 + y^2)]dx - xdy = 0.$

解 用 $x^2 + y^2$ 除全式，化为 $\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} - xdx = d\left(\arctan\frac{x}{y}\right) - xdx = 0$，积分得解 $\arctan\frac{x}{y} - \frac{1}{2}x^2 = c$，其中 c 为任意常数. 另外有解 $x = 0$.

(25) $\frac{dy}{dx} + e^{\frac{dy}{dx}} - x = 0.$

提示 可解出 x；不显含 y. 令 $\frac{dy}{dx} = p$ 有 $x = p + e^p$，$\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = (1 + e^p)\frac{dp}{dy}$，解得 $dy = p(1 + e^p)dp$，$y = \frac{1}{2}p^2 + (p-1)e^p + c$. 解为 $x = p + e^p$，$y = \frac{1}{2}p^2 + (p-1)e^p + c$.

(26) $\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)dy = 0.$

提示 $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = 1$，有仅含 x 的积分因子 $\mu = e^{\int 1dx} = e^x$. 用 e^x 乘全式再组合有

$$2xye^xdx + x^2ye^xdx + x^2e^xdy + \frac{y^3}{3}e^xdx + y^2e^xdy$$

$$= d(yx^2e^x) + d\left(\frac{y^3}{3}e^x\right) = 0.$$

积分得解 $yx^2e^x + \frac{y^3}{3}e^x = c$.

(27) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3y + 4}{4x + 6y + 5}.$

解 可令 $u = 2x + 3y$，有

$$\frac{du}{dx} = 2 + 3\frac{dy}{dx} = 2 + 3\frac{u+4}{2u+5} = \frac{7u+22}{2u+5},$$

$$dx = \left(\frac{2u+5}{7u+22}\right)du = \left[\frac{2}{7} - \frac{9}{7(7u+22)}\right]du.$$

积分得

$$\frac{2}{7}u - \frac{9}{49}\ln|7u + 22| = x + \tilde{c},$$

$$9\ln|7u + 22| = 14u - 49(x + \tilde{c}).$$

解为

$$9\ln|7(2x + 3y) + 22| = 14(2x + 3y) - 49(x + \tilde{c}),$$

即 $9\ln|7(2x + 3y) + 22| = 42y - 21x + c$,其中 c 为任意常数. 另外有解 $7u + 22 = 0$,即 $14x + 21y + 22 = 0$.

(28) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = 2x^2y(y^2 - x^2)$(提示:令 $x^2y = u$).

解 1 将方程变为$\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2} = 2y(y^2 - x^2)\mathrm{d}x$. 由$\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2} = \mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)$,令 $u = \frac{y}{x}$,则方程可化为伯努利方程$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -2x^3u + 2x^3u^3$. 取变换 $z = u^{-2}$,可再化为线性方程$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 4x^3z - 4x^3$. 用非齐次线性方程积分公式解得

$$\begin{aligned} z &= \mathrm{e}^{\int 4x^3\mathrm{d}x}\left(-\int 4x^3\mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}x + c\right) = \mathrm{e}^{x^4}\left(-\int \mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}x^4 + c\right) \\ &= \mathrm{e}^{x^4}(\mathrm{e}^{-x^4} + c). \end{aligned}$$

由 $z = u^{-2} = x^2y^{-2}$,得通解 $x^2 = y^2(1 + c\mathrm{e}^{x^4})$,其中 c 为任意常数. 另外有解 $y = 0$.

解 2 令 $u = x^2y$,$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2xy + x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3xy + 2x^3y^3 - 2x^5y = \frac{3u}{x} + \frac{2u^3}{x^3} - 2x^3u$,方程可化为伯努利方程$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{3}{x} - 2x^3\right)u + \frac{2u^3}{x^3}$, $n = 3 \neq 0,1$. 再取变换 $z = u^{-2}$, 可再化为线性方程$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -2\left(\frac{3}{x} - 2x^3\right)z - \frac{4}{x^3}$. 用非齐次线性方程积分公式解得

$$z = e^{-\int 2\left(\frac{3}{x}-2x^3\right)dx}\left(-\int \frac{4}{x^3}e^{6\ln|x|-x^4}dx + c\right) = x^{-6}e^{x^4}\left(-\int 4x^3e^{-x^4}dx + c\right)$$

$$= x^{-6}e^{x^4}\left(-\int e^{-x^4}dx^4 + c\right) = x^{-6}e^{x^4}(e^{-x^4} + c) = x^{-6}(1 + ce^{x^4}).$$

由 $z = u^{-2} = x^{-4}y^{-2}$，得通解 $x^2 = y^2(1 + ce^{x^4})$，其中 c 为任意常数. 另外有解 $y = 0$.

(29) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^{xy}$.

提示 令 $z = xy$，有 $\frac{dz}{dx} = y + x\frac{dy}{dx} = y - y + xe^{xy} = xe^z$. 积分得 $\frac{1}{2}x^2 = -e^{-z} + c$. 解为 $\frac{1}{2}x^2 + e^{-xy} = c$.

(30) $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 2xy^3 + 2x}{3x^2y^2 - 6y^5 + 3y^2}$.

解 方程化为 $\frac{dy^3}{dx^2} = \frac{3y^2dy}{2xdx} = \frac{2x^2 - y^3 + 1}{x^2 - 2y^3 + 1}$，令 $v = x^2, u = y^3$，变为线性方程 $\frac{du}{dv} = \frac{2v - u + 1}{v - 2u + 1}$. 方程组 $\begin{cases}2v - u + 1 = 0,\\ v - 2u + 1 = 0\end{cases}$ 的解为 $u = \frac{1}{3}, v = -\frac{1}{3}$. 取变换 $U = u - \frac{1}{3}, V = v + \frac{1}{3}$，化为齐次方程 $\frac{dU}{dV} = \frac{2V - U}{V - 2U}$. 再令 $S = \frac{U}{V}$ 得

$$\frac{dS}{dV} = -\frac{U}{V^2} + \frac{1}{V}\frac{dU}{dV} = -\frac{S}{V} + \frac{1}{V}\cdot\frac{2 - S}{1 - 2S} = \frac{2S^2 - 2S + 2}{V(1 - 2S)},$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2S - 1}{S^2 - S + 1}dS = \frac{dV}{V}, (S^2 - S + 1)V^2 = C.$$

代回原来的变量，得解为

$$U^2 - UV + V^2 = C,$$

$$(3y^3 - 1)^2 - (3y^3 - 1)(3x^2 + 1) + (3x^2 + 1)^2 = c,$$

其中 c 为任意常数.

(31) $y^2(xdx + ydy) + x(ydx - xdy) = 0$（提示：令 $x = \rho\cos\theta$，

$y = \rho\sin\theta$).

解 令 $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta, \mathrm{d}x = \cos\theta\mathrm{d}\rho - \rho\sin\theta\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}y = \sin\theta\mathrm{d}\rho + \rho\cos\theta\mathrm{d}\theta$,方程化为

$$\rho^2\sin^2\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho - \rho\cos\theta\cdot\rho^2\mathrm{d}\theta = 0, \sin^2\theta\cdot\mathrm{d}\rho - \cos\theta\cdot\mathrm{d}\theta = 0.$$

有

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}, \rho = -\frac{1}{\sin\theta} + c, \quad \rho\left(1 + \frac{1}{\rho\sin\theta}\right) = c.$$

代回原来的变量,得通解

$$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{y}\right) = c, (x^2 + y^2)(y + 1)^2 = c^2y^2,$$

其中 c 为任意常数. 另外有解 $y = 0, y = -1$,它们含于通解中.

(32) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{1 + xy^3}{1 + x^3y} = 0$(提示:令 $u = x + y, v = xy$).

解 方程可化为

$$\begin{aligned}0 &= (1 + xy^3)\mathrm{d}x + (1 + x^3y)\mathrm{d}y = \mathrm{d}(x + y) + xy(y^2\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y)\\ &= \mathrm{d}(x + y) + xy^2(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y - x\mathrm{d}y) + x^2y(x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x - y\mathrm{d}x)\\ &= \mathrm{d}(x + y) + xy(y + x)\mathrm{d}(xy) - x^2y^2\mathrm{d}(x + y).\end{aligned}$$

令 $u = x + y, v = xy$,则方程变为 $\mathrm{d}u + vu\mathrm{d}v - v^2\mathrm{d}u = 0$. 可变量分离解之

$$(v^2 - 1)\mathrm{d}u = uv\mathrm{d}v, \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{v\mathrm{d}v}{v^2 - 1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}v^2}{v^2 - 1},$$

$$2\ln|u| = \ln|v^2 - 1| + \tilde{c},$$

得 $u^2 = c(v^2 - 1)(c \neq 0)$. 即通解为 $(x + y)^2 = c(x^2y^2 - 1)$,其中 c 为任意常数. 另有 $u(v^2 - 1) = 0$,即 $x + y = 0, x^2y^2 = 1$,经检验亦为方程的解(特解),前者含于通解中.

2. 求一曲线,使其切线在纵轴上之截距等于切点的横坐标.

提示 切线在 x, y 坐标轴上截距分别为 $\overline{X} = x - \dfrac{y}{y'}$ 和 $\overline{Y} = y - xy'$([见习题1.2-8(5)]). 曲线方程为 $x = y - xy'$,解得 $y' =$

$\frac{y}{x}-1, y = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(-\int x^{-1}dx + c\right) = x(c - \ln|x|)$.

3. 摩托艇以 5 m/s 的速度在静水上运动，全速时停止了发动机，过了 20 s 后，艇的速度减至 $v_1 = 3$ m/s. 确定发动机停止 2 min 后艇的速度. 假定水的阻力与艇的运动速度成正比例.

解 艇的运动方程为 $\frac{dv}{dt} = kv$，其中 v 为摩托艇的速度，k 为水的阻力. 解为 $\frac{dv}{v} = k dt$，$\ln|v| = kt + \tilde{c}$，$v = ce^{kt}$. 依题意，开始时 $5 = ce^{0} = c$，即 $v = 5e^{kt}$，20 s 后有 $3 = 5e^{20k}$，$k = \frac{1}{20}\ln\frac{3}{5}$. 即摩托艇的速度为 $v = 5e^{\frac{1}{20}\ln\frac{3}{5}t}$. 2 min 后艇的速度则为 $v = 5e^{\frac{1}{20}\ln\frac{3}{5}\cdot 120} = 5e^{6\ln\frac{3}{5}} = 5\left(\frac{3}{5}\right)^{6} \approx 0.233$ m/s.

4. 一质量为 m 的质点作直线运动，从速度等于零的时刻起，有一个和时间成正比（比例系数为 k_1）的力作用在它上. [illegible] 点又受到介质的阻力，这阻力和速度成正比（比例系数 [illegible]. 求此质点的速度与时间的关系.

解 设质点的运动速度为 $v(t)$，则质量为 m 的质点的运动作用力为 $m\frac{dv}{dt}$. 它受和时间成正比的力和介质的阻力两种力作用. 因此质点作直线运动的运动方程为 $m\frac{dv(t)}{dt} = k_1 t - k_2 v(t)$，[illegible] $k_1 \geqslant 0, k_2 > 0$. 初值条件为 $t = 0$ 时 $v(t) = 0$.

解此线性方程 $\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{k_2}{m}v(t) + \frac{k_1}{m}t$，有解

$$v(t) = e^{-\int \frac{k_2}{m}dt}\left(\int \frac{k_1}{m} t e^{\int \frac{k_2}{m}dt} dt + c\right) = e^{-\frac{k_2}{m}t}\left(\int \frac{k_1}{m} t e^{\frac{k_2}{m}t} dt + c\right)$$

$$= e^{-\frac{k_2}{m}t}\left[\frac{k_1}{k_2^2}(k_2 t - m)e^{\frac{k_2}{m}t} + c\right].$$

由初值条件为 $t=0$ 时 $v(t)=0$,有 $c=\frac{k_1}{k_2^2}m$. 即解为

$$v(t)=\frac{k_1}{k_2^2}(k_2t-m+me^{-\frac{k_2}{m}t})=\frac{k_1}{k_2}\left(t-\frac{m}{k_2}\right)+\frac{mk_1}{k_2^2}e^{-\frac{k_2}{m}t}.$$

5. 证明:如果已知里卡蒂微分方程的一个特解,则可用初等解法求得它的通解. 并求解后面的方程(1) ~ (7).

证 里卡蒂微分方程为$\frac{dy}{dx}=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$,设已知它有一个特解 $\tilde{y}(x)$. 通过变换 $y=z+\tilde{y}$,方程变为伯努利方程

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dx}-\frac{d\tilde{y}}{dx}=P(x)(z^2+2\tilde{y}z)+Q(x)z$$

$$=[2P(x)\tilde{y}+Q(x)]z+P(x)z^2,\quad n=2\neq 0,1.$$

可取变换 $u=z^{-1}$,则再变为线性方程

$$\frac{du}{dx}=-[2P(x)\tilde{y}+Q(x)]u-P(x).$$

有通解

$$u=e^{-\int[2P(x)\tilde{y}+Q(x)]dx}\left[c-\int P(x)e^{\int[2P(x)\tilde{y}+Q(x)]dx}dx\right].$$

即有通解式

$$(y-\tilde{y})e^{-\int[2P(x)\tilde{y}+Q(x)]dx}\left[c-\int P(x)e^{\int[2P(x)\tilde{y}+Q(x)]dx}dx\right]=1.\quad(*)$$

这证明如果已知里卡蒂微分方程的一个特解,则可用初等解法求得它的通解.

(1) $y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x}$.

解 观察得方程有特解 $\tilde{y}=e^x$. 取变换 $y=z+e^x$. 方程化为

$$z'e^{-x}+z^2=0,\ -z^{-2}dz=e^xdx, z^{-1}=e^x+c,$$

$$(y-e^x)(e^x+c)=1.$$

方程的通解为 $y=e^x+\frac{1}{e^x+c}$,其中 c 为任意常数.

(2) $y'+y^2-2y\sin x=\cos x-\sin^2x$.

提示　特解 $\tilde{y} = \sin x$. 取变换 $y = z + \sin x$，方程化为

$$z' + z^2 = 0, z^{-1} = x + c, z(x + c) = 1.$$

通解为 $y = \sin x + \dfrac{1}{x + c}$.

(3) $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$.

提示　特解 $\tilde{y} = -x^{-1}$. 取变换 $y = z - x^{-1}$，方程化为 $z' = -x^{-1}z + z^2$. 令 $u = z^{-1}$，得 $u' = x^{-1}u - 1$，有解 $u = x\left(-\int x^{-1}\mathrm{d}x + c\right) = x(c - \ln|x|)$. 方程的通解为

$$xy = \frac{1}{c - \ln|x|} - 1,$$

或直接用通解式(*)

$$(y + x^{-1})\mathrm{e}^{-\int(-x^{-1})\mathrm{d}x}\left(c - \int x^{-1}\mathrm{d}x\right) = (y + x^{-1})x(c - \ln|x|) = 1.$$

(4) $4x^2(y' - y^2) = 1$.

提示　特解 $\tilde{y} = -\dfrac{1}{2x}$. 取变换 $y = z - \dfrac{1}{2x}$，方程化为 $z' = -x^{-1}z + z^2$. 令 $u = z^{-1}$，得 $u' = x^{-1}u - 1$，有解 $u = x\left(-\int x^{-1}\mathrm{d}x + c\right) = x(c - \ln|x|)$. 方程的通解为

$$\left(y + \frac{1}{2x}\right)x(c - \ln|x|) = 1, 2xy = \frac{2}{c - \ln|x|} - 1,$$

或直接用通解式(*)

$$\left(y + \frac{1}{2x}\right)\mathrm{e}^{-\int(-2\frac{1}{2x})\mathrm{d}x}\left(c - \int x^{-1}\mathrm{d}x\right) = \left(y + \frac{1}{2x}\right)x(c - \ln|x|) = 1.$$

(5) $x^2(y' + y^2) = 2$.

提示　有特解 $\tilde{y} = -x^{-1}$. 方程为 $y' = -y^2 + 2x^{-2}$，取变换 $y = z - x^{-1}$，方程化为 $z' = 2x^{-1}z - z^2$. 令 $u = z^{-1}$，得 $u' = -2x^{-1}u + 1$，有解

$$u = \mathrm{e}^{-\int 2x^{-1}\mathrm{d}x}\left(\int x^2\mathrm{d}x + \tilde{c}\right) = x^{-2}\left(\tilde{c} + \frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{3}x^{-2}(x^3 + c).$$

方程的通解为

$$(y+x^{-1})x^{-2}(x^3+c)=3, xy=\frac{2x^3-c}{x^3+c},$$

或直接用通解式(*)

$$(y+x^{-1})e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left(\tilde{c}+\int x^2dx\right)=(y+x^{-1})x^{-2}\left(\tilde{c}+\frac{x^3}{3}\right)=1,$$

$$xy=\frac{2x^3-c}{x^3+c}.$$

(6) $x^2y'+(xy-2)^2=0$.

提示 有特解 $\tilde{y}=x^{-1}$. 方程为 $y'=-y^2+4x^{-1}y-4x^{-2}$. 直接用通解式(*)

$$(y-x^{-1})e^{-\int[-2x^{-1}+4x^{-1}]dx}\left(\tilde{c}+\int x^2dx\right)=(y-x^{-1})x^{-2}\left(\tilde{c}+\frac{x^3}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{3}(y-x^{-1})x^{-2}(c+x^3)=1.$$

得通解 $xy=\dfrac{4x^3+c}{x^3+c}$.

(7) $y'=(x-1)y^2+(1-2x)y+x$.

提示 有特解 $y=1$. 直接用通解式(*)

$$(y-1)e^{-\int[2(x-1)+(1-2x)]dx}\left[c-\int(x-1)e^{-x}dx\right]$$

$$=(y-1)e^x(c+xe^{-x})=1.$$

通解为 $y=1+\dfrac{1}{ce^x+x}$.

第三章　一阶微分方程的解的存在定理

§3.1　内容提要

§3.1.1　解的存在唯一性定理与逐步逼近法

（1）微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$，$R$：$|x-x_0|\leqslant a$，$|y-y_0|\leqslant b$. 称$f(x,y)$在$R$上关于$y$满足利普希茨条件，若存在常数$L>0$满足

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|,(x,y_1),(x,y_2)\in R.$$

L称为利普希茨常数.

若$f(x,y)$在R上$\frac{\partial f}{\partial y}$存在且连续，则$f(x,y)$在$R$上关于$y$满足利普希茨条件.

存在唯一性定理1　若$f(x,y)$在R上连续且关于y满足利普希茨条件，则方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$在区间$|x-x_0|\leqslant h$上存在唯一解$y=\varphi(x)$，$\varphi(x_0)=y_0$，其中

$$h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right),M=\max_{(x,y)\in R}|f(x,y)|.$$

（2）隐方程$F(x,y,y')=0$.

存在唯一性定理2　若$F(x,y,y')$在(x_0,y_0,y_0')的某邻域中对(x,y,y')连续且存在连续偏导数，同时$F(x_0,y_0,y_0')=0$，

$\frac{\partial}{\partial y'}F(x_0,y_0,y_0')\neq 0$，则方程 $F(x,y,y')=0$ 存在唯一解 $y=\varphi(x)$，$\varphi(x_0)=y_0,\varphi'(x_0)=y'_0$.

（3）**逐步逼近法**　微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$等价于积分方程 $y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y)\mathrm{d}x$ 取 $\varphi(x_0)=y_0$，定义 $\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi_{n-1}(x))\mathrm{d}x$，$n=1,2,\cdots$，可证明$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$，而 $y=\varphi(x)$满足积分方程.

通过逐步逼近法可证明解的存在唯一性. 先证积分方程与微分方程等价（[书§3.1－命题1]）；后用数学归纳法证定义的$\varphi_n(x)$存在且连续（[书§3.1－命题2]）；再证 $\varphi_n(x)$在区间一致收敛（[书§3.1－命题3]）；于是 $\varphi(x)$是积分方程的连续解（[书§3.1－命题4]）；最后，用反证法证解的唯一性（[书§3.1－命题5]）.

（4）**近似计算**　逐步逼近法中第 n 次近似解$\varphi_n(x)$和真解$\varphi(x)$有误差估计式

$$|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\leqslant\frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

可以通过控制 h 和 n 使上面不等式右端误差值足够小，而得到满足误差估计的近似解 $\varphi_n(x)$.

§3.1.2　解的延拓

（1）**局部利普希茨条件**　若函数$f(x,y)$在某区域 G 内每一点有以其为中心的完全含于 G 内的闭矩形 R 存在，在 R 上$f(x,y)$关于 y 满足利普希茨条件，则称$f(x,y)$在 G 内满足局部利普希茨条件.

（2）**延拓定理**　若$f(x,y)$在某有界区域 G 内连续且关于 y 满足局部利普希茨条件，则方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$的通过 G 内任何一点(x_0,y_0)的解 $y=\varphi(x)$可以延拓，直到点$(x,\varphi(x))$任意接近区域 G

的边界.

(3) **饱和解** 方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$的解$y=\varphi(x)$的定义区间为$\alpha<x<\beta$,且当$x\to\alpha^+$或$x\to\beta^-$时$(x,\varphi(x))$趋于G的边界,则称解$y=\varphi(x)$为饱和解.

当G是无界区域时,方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$的解可能无界,α,β亦可以是$-\infty$,$+\infty$.

(4) 若$f(x,y)$在整个平面上定义、连续和有界,且存在关于y的连续偏导数,则方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$的任一解均可延拓到区间$-\infty<x<+\infty$.

§3.1.3 解对初值的连续性和可微性定理

(1) **解对初值的对称性定理** 设方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$的满足初值条件$y(x_0)=y_0$的解是唯一的,记为$y=\varphi(x,x_0,y_0)$,则(x,y)与(x_0,y_0)对称,即有$y_0=\varphi(x_0,x,y)$.

(2) **解对初值的连续依赖定理** 若$f(x,y)$在域G内连续且关于y满足局部利普希茨条件,$(x_0,y_0)\in G$,$y=\varphi(x,x_0,y_0)$是方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$的满足初值条件$y(x_0)=y_0$的解,在区间$a\leqslant x\leqslant b$上有定义($a\leqslant x_0\leqslant b$),则对任意$\varepsilon>0$,有$\delta=\delta(\varepsilon,a,b)$,使得当$(\tilde{x}_0-x_0)^2+(\tilde{y}_0-y_0)^2\leqslant\delta^2$时方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$的满足条件$y(\tilde{x}_0)=\tilde{y}_0$的解$y=\varphi(x,\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)$在区间$a\leqslant x\leqslant b$上也有定义,且

$$|\varphi(x,\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)-\varphi(x,x_0,y_0)|<\varepsilon,a\leqslant x\leqslant b.$$

解对初值的连续性定理 若$f(x,y)$在域G内连续且关于y满足局部利普希茨条件,则方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$的解$y=\varphi(x,x_0,y_0)$作

为 x,x_0,y_0 的函数在它的存在范围内是连续的.

(3) **解对初值的可微性定理** 若 $f(x,y)$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在域 G 内连续,则方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$ 的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 作为 x,x_0,y_0 的函数在它的存在范围内是连续可微的. 且 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}=-f(x_0,y_0)\exp\left[\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}\mathrm{d}x\right]$ 是初值问题 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}z,z(x_0)=-f(x_0,y_0)$ 的解; $\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=\exp\left[\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}\mathrm{d}x\right]$ 是初值问题 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}z,z(x_0)=1$ 的解.

(4) 含参数微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y,\lambda)$,用 G_λ 表示域: $G_\lambda:(x,y)\in G,\alpha<\lambda<\beta$.

若 $f(x,y,\lambda)$ 在域 G_λ 内连续且关于 y 满足局部利普希茨条件,当其利普希茨常数 L 与 λ 无关时称为 G_λ 内一致地关于 y 满足局部利普希茨条件.

含参数方程的解对初值和参数的连续依赖定理 若 $f(x,y,\lambda)$ 在域 G_λ 内连续且在 G_λ 内一致地关于 y 满足局部利普希茨条件, $(x_0,y_0,\lambda_0)\in G_\lambda$, $y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda_0)$ 是方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y,\lambda)$ 的通过点 $(x_0,y_0,\lambda_0)\in G_\lambda$ 的解,在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上有定义 $(a\leqslant x_0\leqslant b)$,则对任意 $\varepsilon>0$,有 $\delta=\delta(\varepsilon,a,b,\alpha,\beta)$,使得当 $(\tilde{x}_0-x_0)^2+(\tilde{y}_0-y_0)^2+(\tilde{\lambda}_0-\lambda_0)^2\leqslant\delta^2$ 时方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y,\lambda)$ 的通过点 $(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0,\tilde{\lambda}_0)\in G_\lambda$ 的解 $y=\varphi(x,\tilde{x}_0,\tilde{y}_0,\tilde{\lambda}_0)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上也有定义,且

$$|\varphi(x,\tilde{x}_0,\tilde{y}_0,\tilde{\lambda}_0)-\varphi(x,x_0,y_0,\lambda_0)|<\varepsilon,a\leqslant x\leqslant b.$$

含参数方程的解对初值的连续性定理 若 $f(x,y,\lambda)$ 在域 G_λ 内连续且在 G_λ 内一致地关于 y 满足局部利普希茨条件,则方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y,\lambda)$ 的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda_0)$ 作为 x,x_0,y_0,λ_0 的函数在

它的存在范围内是连续的.

§3.1.4 奇解

（1）**包络** 对单参数曲线族

$$\Phi(x,y,c)=0,$$

其中 c 是参数，Φ 是 x,y,c 的连续可微函数，曲线族的包络曲线指它本身不在曲线族中，但过包络曲线的每一点有曲线族中的一条曲线在该点与其相切.

c - 判别曲线 曲线族 $\Phi=0$ 的包络存在于下面两个方程

$$\begin{cases}\Phi(x,y,c)=0,\\ \Phi'_c(x,y,c)=0\end{cases}$$

消去 c 而得的曲线中，称为 c - 判别曲线. c - 判别曲线需通过实际检验才能确定是否是曲线族的包络.

（2）**奇解** 奇解是微分方程的解，但其解曲线上每一点处唯一性不成立.

奇解定理 一阶微分方程的通解的包络若存在，则它是奇解. 反之亦然.

隐微分方程 $F\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0$ 的奇解，包含在方程组

$$\begin{cases}F(x,y,p)=0,\\ F'_p(x,y,p)=0\end{cases}$$

消去 p 而得的曲线（称为 p - 判别曲线）中. 需通过实际检验才能确定是否是奇解.

（3）**克莱罗方程** $y=xp+f(p)$，$p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$（$f(p)$ 连续可微）的通解是一直线族 $y=cx+f(c)$. 此直线族的包络为方程的奇解. 可用 c - 判别曲线求其包络（奇解）.

* §3.1.5 数值解

（1）**求微分方程的初值问题**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),y(x_0)=y_0$$

的解 $y=y(x)$，从初值条件 $y(x_0)=y_0$ 出发，按照一定的步长 h，依某种方法逐步计算微分方程解 $y(x)$ 的值 $y_n=y(x_n)$，这里 $x_n=x_0+n\cdot h$. 这样求出的解称为数值解. 用一种方法，其局部截断误差为步长 h 的 $O(h^{p+1})$ 时，称此方法有 p 阶精度.

（2）**欧拉公式**（1 阶精度） $y_{n+1}=y_n+h\cdot f(x_n,y_n),x_n=x_0+n\cdot h$.

改进的欧拉方法（2 阶精度）：

$$\tilde{y}_{n+1}=y_n+h\cdot f(x_n,y_n),$$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},\tilde{y}_{n+1})].$$

（3）***r* 阶（段）龙格－库塔方法** $y_{n+1}=y_n+h\sum_{i=1}^{r}\lambda_i k_i$,

$$k_j=f\left(x_n+d_jh,y_n+h\sum_{s=1}^{j-1}\beta_{js}k_s\right),\quad j=2,\cdots,r.$$

2 阶龙格－库塔公式（2 阶精度）：$r=2,\lambda_1=1-\frac{1}{2d_2},\lambda_2=\frac{1}{2d_2}$, $\beta_{21}=d_2$.

4 阶龙格－库塔公式（4 阶精度）：$r=4$,

$$\begin{cases}y_{i+1}=y_i+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4),\\ k_1=f(x_i,y_i),\\ k_2=f\left(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{h}{2}k_1\right),\\ k_3=f\left(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{h}{2}k_2\right),\\ k_4=f(x_i+h,y_i+hk_3).\end{cases}$$

（4）**相容性** 当 $h\to 0$ 时平均斜率趋近真正斜率. 局部截断误差为 p 阶时称为 p 阶相容.

收敛性　当 $h \to 0$ 时计算公式收敛于精确解.

整体误差　$e_n = |y(x_n) - y_n|$（在整个区间$[x_0, x_n]$）.

p 阶收敛　存在正数 M,其整体误差 $e_n \leqslant Mh^p$.

定理　不计舍入误差时,p 阶相容的方法一定是 p 阶收敛的.

（5）**刚性问题**　微分方程组的初值问题中方程组的解的各分量值存在数量级的差别. 微分方程组线性近似部分之特征值实部的绝对值中最大与最小之比称为刚性比. 刚性比很大的刚性问题,其数值方法与常规数值方法有所不同.

§3.2　学习辅导

§3.2.1　学习要点

（1）掌握一阶微分方程解的存在性、唯一性、延拓定理及其证明.

（2）熟悉逐步逼近法和误差估计式,能运用误差估计式估计误差和确定存在区间.

（3）理解一阶微分方程解对参数和初值的连续性、可微性定理,掌握解对初值的微分公式$\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_0} = -f(x_0, y_0)\exp\left[\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}\mathrm{d}x\right]$,
$\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_0} = \exp\left[\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}\mathrm{d}x\right]$.

（4）理解包络、奇解、c - 判别曲线和 p - 判别曲线,能运用判别曲线方法寻求和判别奇解.

（5）掌握克莱罗方程 $y = xp + f(p)$ 的通解为 $y = cx + f(c)$,并能寻求和判别克莱罗方程的奇解.

*（6）理解求微分方程初值问题的数值解方法,包括欧拉方法和改进的欧拉方法及龙格 - 库塔方法. 能应用龙格 - 库塔方法数值解函数软件求微分方程的初值问题的数值解并画出图形.

§3.2.2 例题选讲

例 1 利用唯一性充分条件,试在 Oxy 平面上找出每一点都有微分方程

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+\sqrt{y^2-x^2}$$

的唯一解的区域.

解 方程可化为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y+\sqrt{y^2-x^2}}{x}$. 于是

$$f(x,y)=\frac{y+\sqrt{y^2-x^2}}{x},\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{1}{x}+\frac{y}{x\sqrt{y^2-x^2}}.$$

在 Oxy 平面上除 $x=0,y^2\leqslant x^2$ 外的任意区域内连续且有界. 根据解的存在唯一性定理,在 Oxy 平面上方程有唯一解的区域为 $x\neq 0,|y|>|x|$.

例 2 试求微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x-y^2,y(0)=0$$

的第一、二次近似解,并按存在唯一解定理讨论在区域 $D=\{-0.5\leqslant x\leqslant 0.5,-1\leqslant y\leqslant 1$ 中的存在区间和误差估计.

解 令 $\varphi_0(x)=y_0=0$,于是

$$\varphi_1(x)=y_0+\int_0^x[x-\varphi_0^2(x)]\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2},$$

$$\varphi_2(x)=y_0+\int_0^x[x-\varphi_1^2(x)]\mathrm{d}x=\int_0^x\left(x-\frac{x^4}{4}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{20}.$$

在区域 D 可取 $M=\max\limits_{(x,y)\in D}|x-y^2|=1.5,a=0.5,b=1,h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right)=0.5$. 利普希茨常数可取 $L=\max\limits_{(x,y)\in D}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=\max\limits_{(x,y)\in D}|2y|=2$. 于是在存在区间 $|x-x_0|\leqslant h=0.5$ 上第 1、2 次近似解的误差为

$$|\varphi_1(x)-\varphi(x)|\leqslant\frac{ML}{2!}h^2=\frac{1.5\times 2}{2}\times 0.5^2=0.375,$$

$$|\varphi_2(x)-\varphi(x)|\leqslant\frac{ML^2}{3!}h^3=\frac{1.5\times 2^2}{6}\times 0.5^3=0.125.$$

例 3 试求微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2,y(x_0)=y_0,x_0\neq 0$$

的解 $y(x,x_0,y_0)$ 对初值偏导数$\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}$,$\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}$的表达式.

解 由解对初值的可微性定理知,对微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$的解 $y(x,x_0,y_0)$,$y(x_0,x_0,y_0)=y_0$,有

$$\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}=-f(x_0,y_0)\exp\left[\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,y(x,x_0,y_0))}{\partial y}\mathrm{d}x\right]$$

及

$$\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}=\exp\left[\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,y(x,x_0,y_0))}{\partial y}\mathrm{d}x\right].$$

对所求微分方程由[§2.2.2 - 例 3]知,有通解 $y=\frac{x^2}{c-x}$,即 $y(x,x_0,y_0)=\frac{x^2}{x_0+x_0^2y_0^{-1}-x}$. 由

$$\begin{aligned}\exp\left[\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,y(x,x_0,y_0))}{\partial y}\mathrm{d}x\right]&=\exp\left[\int_{x_0}^{x}\left[\frac{2}{x}+\frac{2y(x,x_0,y_0)}{x^2}\right]\mathrm{d}x\right]\\&=\exp\left[\int_{x_0}^{x}\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{x_0+x_0^2y_0^{-1}-x}\right)\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{x_0^2x^2}{(x_0y_0+x_0^2-xy_0)^2}\end{aligned}$$

得

$$\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}=\left(-\frac{2y_0}{x_0^2}-\frac{y_0^2}{3x_0^3}\right)\exp\left[\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,y(x,x_0,y_0))}{\partial y}\mathrm{d}x\right]$$

$$= -\frac{y_0(6x_0+y_0)}{3x_0}\frac{x^2}{(x_0y_0+x_0^2-xy_0)^2},$$

$$\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0} = \exp\left[\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,y(x,x_0,y_0))}{\partial y}\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{x_0^2x^2}{(x_0y_0+x_0^2-xy_0)^2}$$

例 4(奇解) 试求微分方程 $2y(y'-1)-xy'^2=0$ 的奇解.

解 令 $p=y'$,将方程及其求导式联立求解:

$$\begin{cases}2y(p-1)-xp^2=0,\\2y-2xp=0.\end{cases}$$

消去 p 得 p - 判别曲线 $y^2-2xy=0$,其解为

$$y=0,\quad y=2x.$$

它们都是方程的解.

为判断它们是不是方程的通积分([§2.2.2 - 例 6])

$$2cxy=(1+cx^2)^2$$

的包络,先求 c - 判别曲线

$$\begin{cases}2cxy=(1+cx^2)^2,\\y=x(1+cx^2).\end{cases}$$

将后式代入前式,解得 $c=\frac{1}{x^2}$,于是 $y=x(1+cx^2)=x(1+1)=2x$,

故直线 $y=2x$ 为方程的包络. 奇解为 $y=2x$. 如图 3.1.

***例 5**(数值解) 试判断微分方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}1\ 000.25\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2\ 000 & 999.75\\1 & -1\end{pmatrix}$$

是否为刚性方程.

解 线性方程的特征方程为

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda+2\ 000 & -999.75\\-1 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^2+2\ 001\lambda+1\ 000.25=0.$$

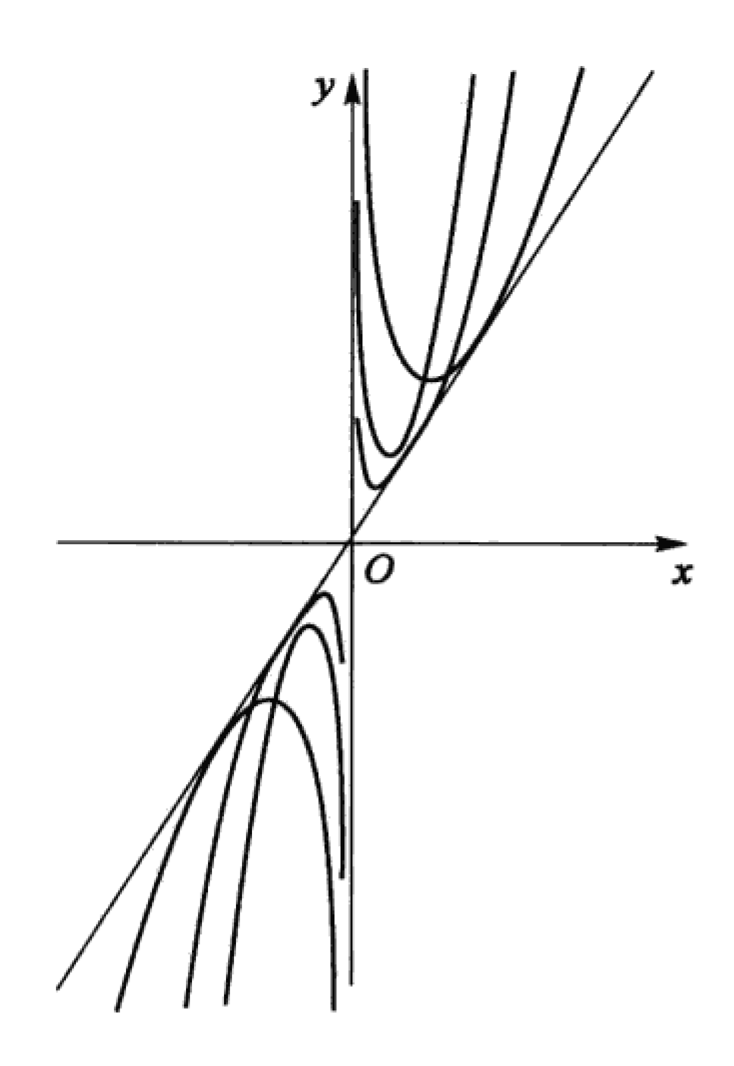


图 3.1　$2y(y'-1)-xy'^2=0$ 的包络

方程有特征值 $\lambda_1=-2\ 000.5,\lambda_2=-0.5$. 其刚性比为

$$\frac{\max\limits_i \operatorname{Re}(-\lambda_i)}{\min\limits_i \operatorname{Re}(-\lambda_i)}=\frac{2\ 000.5}{0.5}=4\ 001.$$

方程是刚性方程.

§3.2.3　测试练习

1. 试判断下列函数在所给区域上是否满足利普希茨条件：

(1) $f(x,y)=y^{\frac{1}{2}}$, (a) $|x|\leqslant 1, 0<c\leqslant y\leqslant d$; (b) $|x|\leqslant 1$, $0<y\leqslant d$.

(2) $f(x,y)=xy^2$, (a) $a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d$; (b) $a\leqslant x\leqslant b$, $-\infty<y<+\infty$.

(3) $f(x,y)=xy$, (a) $a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d$; (b) $a\leqslant x\leqslant b$, $-\infty<y<+\infty$; (c) 全平面.

(4) $y'=\dfrac{x+y}{x-y}, x\neq y.$

2. 试用唯一性充分条件判断下列方程存在唯一解的区域：

(1) $(y-x)y'=y\ln x$；　　(2) $y'=\dfrac{y+2}{x-y}$；

(3) $y'=y+3y^{\frac{1}{3}}$.

3. 试列出下列微分方程初值问题的第 1、2、n 次近似解及第 n 次近似解的误差估计式. 第 n 次近似解不必具体计算.

(1) $y'=1+y^2, y(0)=0$；　(2) $y'=y^2+3x^2-1, y(1)=1$；

(3) $xy'=2x-y, y(1)=2$.

4. 试列出下列微分方程初值问题的解 $y(x,x_0,y_0)$ 对初值偏导数 $\dfrac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}, \dfrac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}$ 的表达式.

(1) $y'=p(x)y^2+q(x)y+r(x), y(x_0)=y_0$；

(2) $y'=\sin(xy), y(0)=0$；

(3) $xy'-x\sin\dfrac{y}{x}-y=0, y(1)=0$.

5.（奇解）试列出求下列微分方程奇解的判别式. 不必具体求解（具体求解见[§3.3.1－8, §3.4.2－8]）.

(1) $xy'^2-2yy'+4x=0$；　(2) $y(y-2xy')^2=2y'$；

(3) $yy'^2+1=0$；　　(4) $xy'^3-2yy'^2-16x^2=0$.

6.（奇解）已知微分方程的解族，试求其方程的包络及奇解. 先列出方程，暂不具体解出（具体求解见[§3.3.1－9, §3.4.2－9]）.

(1) $xy=cy-c^2$；　　(2) $c^3x^2-c^2y-2=0$；

(3) $y=c\left(x-\dfrac{1}{c}\right)^3$；　(4) $y=c(x-c)^2$.

§3.3 补充提高

§3.3.1 补充习题

1. 判断下列方程在什么区域上保证初值问题解的存在唯一：

(1) $y' = x + \cos y$；　　(2) $y' = \sqrt{|y|}$；

(3) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

2. 求初值问题 $y' = y^3 + x\cos x, y(0) = 0$ 的 $o(x^5)$ 的近似解.

3. 已知要求误差等于或小于 0.05，试求 §3.2.3 第 3 题(1)和(2)中微分方程的近似解在 $|x - x_0| \leqslant 1, |y - y_0| \leqslant 1$ 处的逼近次数.

4. 设 $f(x,y)$ 在区域 $R: 0 \leqslant x \leqslant a, |y| \leqslant b$ 上连续且对 y 是非减的，且当 $0 \leqslant x \leqslant a$ 时有 $f(x,0) \geqslant 0$. 试用逐次逼近法证明初值问题 $y' = f(x,y), y(0) = 0$ 的解在 $0 \leqslant x \leqslant h$ 上存在，这里 $h = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right), M = \max\limits_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$.

5. 指出微分方程 $y' = (1 - y^2)e^{xy^2}$ 的每一解的最大存在区间及当 x 趋于区间两端时解的性状.

*6. 求方程 $y' = \sqrt{xy}$ 过原点(0,0)的一切解. 并指出其解中有最大解和最小解，且最大解和最小解之间的区域被方程经过原点的一切解充满.

*7. (1) 试求带参数微分方程 $y' = f(x,y,\lambda)$，其右端 $f(x,y,\lambda)$ 对 x, y, λ 连续可微时解对参数的微分公式.

(2) 求下列方程的解 $y(x, x_0, y_0, \lambda), y(x_0, x_0, y_0, \lambda) = y_0$，当 $x_0 = 0, y_0 = 0$ 时 $\dfrac{\partial}{\partial \lambda} y(x, x_0, y_0, \lambda)$ 在 $\lambda = 0$ 的值.

(a) $y'+\lambda y=1$；　(b) $y'=y\sqrt{1-\lambda^2x^2}$.

8.（奇解）试具体判断§3.2.3第5题中微分方程的奇解.

9.（奇解）试具体判断§3.2.3第6题中微分方程解族的包络及奇解.

*10.（数值解）试用二阶泰勒级数展开法求解初值问题 $y'=x(1+y^2)^{-1}, y(0)=1$.

§3.3.2 排疑解惑

(1) 解的存在与唯一性　微分方程（组）初值问题（柯西问题）$y'=f(x,y), y(x_0)=y_0$ 之解的存在与唯一性是常微分方程基本理论的核心，常见的有几种基本方法：皮卡（E. Picard）逐次逼近法（压缩映象原理）；欧拉折线法（差分法）；巴拿赫（Banach）空间绍德尔（Schauder）不动点方法；柯西优级数法. 第三种方法需用到巴拿赫空间算子的不动点定理，最后一种方法要用到解析函数优级数理论. 利普希茨条件是存在唯一性最常用而广泛的条件. 右端函数仅仅连续也能保证解的存在性，但不足以保证解的唯一性. 还可以利用最大、最小解（上、下解）的概念和方法处理解的存在性. 见[文15 §1].

(2) 佩亚诺（Peano）存在定理与欧拉折线法　一阶微分方程 $y'=f(x,y)$ 右端函数连续时其解存在，这个局部存在性定理称为佩亚诺定理. 最著名的证明方法是欧拉折线法：先对任意小的 $\varepsilon>0$，构造方程的一个 ε 逼近解——欧拉折线，仅在有限个点处导数不连续；然后对任一趋于零的正数序列 ε_m，构造满足一定条件的 ε_m 逼近解 $\varphi_m(x)$，证明 $\{\varphi_m(x)\}$ 的一致有界性和同等连续性，再利用Ascoli - Arzela定理，$\{\varphi_m(x)\}$ 存在子序列 $\{\varphi_{m_k}(x)\}$ 一致收敛于某函数 $\varphi(x)$；最后证明 $\varphi(x)$ 就是满足初值条件的方程的一个解. 因欧拉折线是由方程的微分换成差分而得，欧拉折线法又称差分法. [文18 §2.2]给出了欧拉折线法的收敛性的详细证明.

(3) 压缩映象原理和不动点定理　皮卡逐次逼近法是以压缩

映象原理思想为基础. 压缩映象原理是在度量空间研究泛函方程解的存在唯一性的有效方法. 可以直接应用不动点定理证明常微分方程初值问题解的存在唯一性.

不动点定理 算子 A 将完备度量空间 M 映射于本身, 且存在常数 $a<1$, 对 M 中任意一对元素 (x,y) 成立 $\rho(Ax,Ay)\leqslant a\rho(x,y)$, 其中 $\rho(x,y)$ 为度量空间 M 的距离, 则泛函方程 $Ax=x$ 存在唯一解.

对常微分方程初值问题可定义算子 A 为

$$Ay\equiv y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y(x))\,\mathrm{d}x.$$

若微分方程右端函数 $f(x,y)$ 满足利普希茨条件, 则算子 A 满足不动点定理条件, 微分方程的解存在唯一. 见[文 15 §1.1、§1.2, 文 18 §2.7].

(4) **延拓定理** [书 §3.2]已证明方程初值问题的任一解均可延拓成饱和解, 其延拓定理表明饱和解可任意接近区域 G 的边界. 这也是判别给定解是否为饱和解的方法. 可以将延拓定理写成(仅要求 $f(x,y)$ 连续, 见[文 15 §1.3]):

延拓定理 设 $f(x,y)$ 在区域 G 连续, 则 $y=\varphi(x)$, $\alpha<x<\beta$ 是微分方程 $y'=f(x,y)$ 初值问题的饱和解的充要条件为: 当 $x\to\alpha^+$, $x\to\beta^-$ 时, 有

$$\lim\{[d(M(x),\bar{G}-G)]^{-1}+|M(x)|\}=\infty, \qquad (*)$$

其中 $M(x)=(x,\varphi(x))$, $|M(x)|=[x^2+\varphi^2(x)]^{\frac{1}{2}}$. 若 G 是整个空间, 则 $\bar{G}-G$ 是空集, 上式第一项为零. 对 α,β, 允许 $\alpha=-\infty$, $\beta=+\infty$.

证 必要性. 用反证法. 设 $x\to\beta^-$ 时 $(*)$ 式不成立, 则存在单调增加数列 $\{x_i\}$, $x_i\to\beta$, 使得 $|M(x_i)|$ 小于、$d(M(x_i),\bar{G}-G)$ 大于某正常数. 从而 $\{\varphi(x_i)\}$ 有界, 有收敛子序列 $\{x_{i^*}\}$, $\lim\limits_{i^*\to\infty}\varphi(x_{i^*})=y^*$. 由后一式有 $(\beta,y^*)\in G$. 现证 $\lim\limits_{x\to\beta^-}\varphi(x)=y^*$. 取任意充分小 $\varepsilon>0$, 使 $\bar{R}=\{(x,y)\,\|x-\beta|\leqslant\varepsilon, |y-y^*|\leqslant\varepsilon\}\subset G$,

令 $K=\max\limits_{(x,y)\in\bar{R}}|f(x,y)|$. 并在 $\{x_{i*}\}$ 中取 x_n 满足 $|\varphi(x_n)-y^*|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ 及 $K(\beta-x_n)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. 则当 $x_n\leqslant x<\beta$ 有 $|\varphi(x)-y^*|\leqslant\varepsilon$. 否则在 $x_n\leqslant x<\beta$ 存在 x 使 $|\varphi(x)-y^*|>\varepsilon$, 取 x 的下确界 $\bar{x}$ 则有 $|\varphi(\bar{x})-\varphi(x_n)|\geqslant|\varphi(\bar{x})-y^*|-|\varphi(x_n)-y^*|>\frac{\varepsilon}{2}$, 而 $|\varphi(\bar{x})-\varphi(x_n)|=\left|\int_{x_n}^{\bar{x}}f(x,\varphi(x))\mathrm{d}x\right|\leqslant K(\bar{x}-x_n)<\frac{\varepsilon}{2}$, 矛盾. 由 $\lim\limits_{x\to\beta^-}\varphi(x)=y^*$ 及 $(\beta,y^*)\in G$ 知 $\varphi(x)$ 还可自 β 向右延拓, 与 $\varphi(x)$ 为饱和解矛盾. 对 $x\to\alpha^+$ 可同样证之.

充分性. 反证之. 设 $\varphi(x)$ 不是饱和解, 则 $\varphi(x),\alpha<t<\beta$ 还可向右或向左延拓, 则(*)不成立, 矛盾.

(5) **比较定理和最大解、最小解** 当常微分方程初值问题的解存在但不唯一时, 会引出最大解、最小解的概念. 其根据是比较定理.

第一比较定理 设 $f(x,y),F(x,y)$ 在域 G 连续且有 $f(x,y)<F(x,y)$, 则两方程 $y'=f(x,y),y'=F(x,y)$ 的过同一点 (x_0,y_0) 的解 $y=\varphi(x),y=\Phi(x)$, 在 $x>x_0$ 及其共同存在区间有 $\varphi(x)<\Phi(x)$; 而在 $x<x_0$ 及其共同存在区间有 $\varphi(x)>\Phi(x)$.

取 $z(x)=\Phi(x)-\varphi(x)$, 则有 $z'(x)>0,z(x_0)=0$. 用反证法易证得 $x>x_0$ 且靠近 x_0 时有 $z(x)>0$; 而 $x<x_0$ 且靠近 x_0 时有 $z(x)<0$. 即证得定理.

利用比较定理容易定义最大解和最小解, 并证明存在饱和最大解和饱和最小解. 利用最大解、最小解可以将第一比较定理推广为针对 $f(x,y)\leqslant F(x,y)$ 的第二比较定理. 参看[文 16 §1.4].

(6) **奇解** 奇解是其上每一点均有其他解的解. 判断奇解的方法有直接法、c - 判别曲线法、p - 判别曲线法和混合法. 直接法是直接寻找方程不满足唯一性条件的点集 $y'=f(x,y),f'_y(x,y)=0$; 如果是对隐方程, 则直接法变成 p - 判别曲线法, 由 $f(x,y,p)=$

0, $f'_p(x,y,p)=0$ 消去 p 得 $\varphi(x,y)=0$；c－判别曲线法通过方程的通解再求其包络，由 $g(x,y,c)=0, g'_c(x,y,c)=0$ 消去 c 得 $\psi(x,y)=0$；混合法则混合使用 p－判别曲线法 $\varphi(x,y)=0$ 和 c－判别曲线法 $\psi(x,y)=0$ 的公因式. 前三种方法均要再验证是否是奇解或包含奇解，但混合法除外. $\varphi(x,y)=0, \psi(x,y)=0$ 分别称为 p－判别式，c－判别式. 判别式因子中除奇解外还可能含有满足或不满足方程的切点、节点和尖点三种轨线形状. 见图 3.2. 其中 p－判别式的因式将含包络（奇解）式（1 次）、尖点式（1 次）和切点式（2 次）；c－判别式将含包络（奇解）式（1 次）、尖点式（3 次）和切点式（2 次）. 见[文 7 § 10]. 关于奇解的存在性定理可参考[文19 § 4].

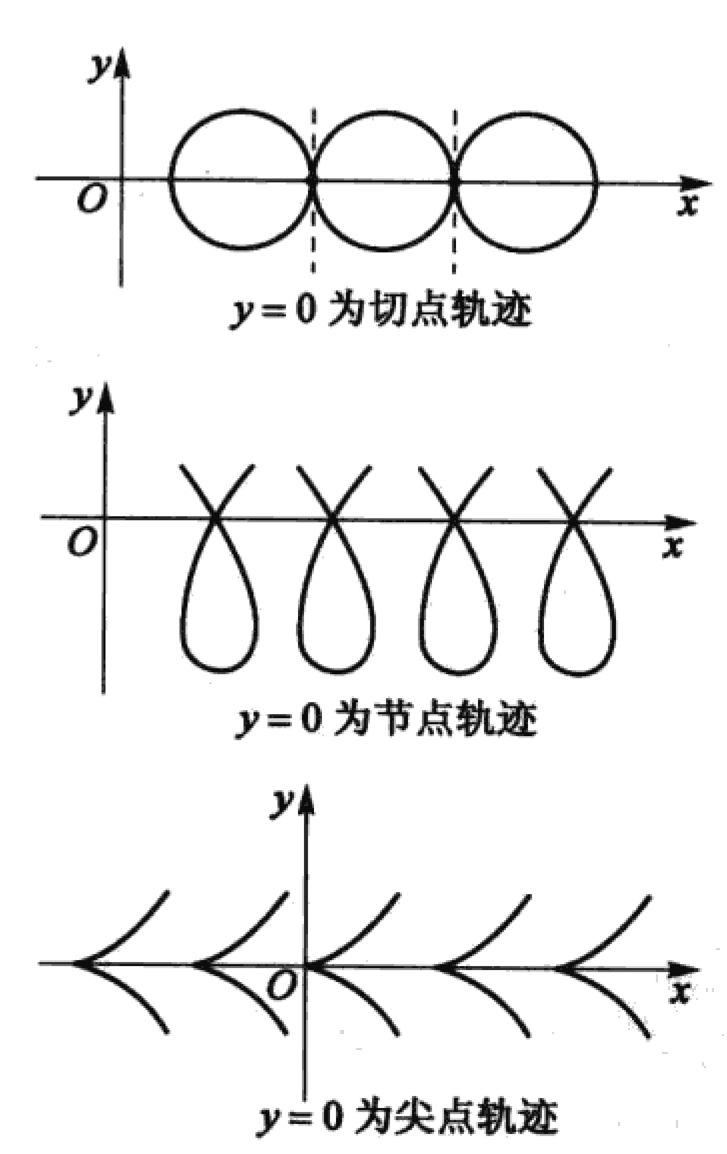


图 3.2　切点、节点和尖点三种轨线

（7）**奇解判别曲线法的等根条件**　对二次多项式 $ap^2+bp+c=0$，由 p－判别法有 $2ap+b=0, p=-\dfrac{b}{2a}$，于是 $b^2-4ac=0$，此为

二次多项式的等根条件. 可直接由此等根条件 $b^2-4ac=0$ 解出可能的奇解. 同理,对 p 的 n 次多项式方程 $f(x,y,p)=0$,可在 $f=0$, $\frac{\partial f}{\partial p}=0$ 中消去 p 得到可能的奇解. 更好的办法是在 $nf-p\frac{\partial f}{\partial p}=0$, $\frac{\partial f}{\partial p}=0$ 中消去 p,从而求出可能的奇解. 见[文 7 § 10].

*(8) **数值解的收敛性** 当不计舍入误差时,若平均斜率函数 $k^*(x,y,h)$ 满足关于 y 的利普希茨条件,则 p 阶相容的方法一定是 p 阶收敛的. 事实上,依相容性的定义有

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+h\cdot k^*(x_n,y_n,h)+h\cdot t(x_n,h),$$

其中 $|t(x,h)|\leqslant Nh^p$. 上式减去[书 § 3.5.2-(3.42)],应用利普希茨常数 $L_k>0$ 及误差 e_n 的定义,得 $e_{n+1}\leqslant(1+hL_k)e_n+Nh^{p+1}$. 易推得([文 24 § 1.1-引理 1.1.1])

$$e_n\leqslant e_0\exp(nhL_k)+Nh^p[\exp(nhL_k)-1]/L_k.$$

由于 $x_n-x_0=nh$, $e_0=y(x_0)-y_0=0$,最后得 $e_n\leqslant Nh^p[\exp((x_n-x_0)L_k)-1]/L_k\equiv Mh^p$. 从而证明了方法是 p 阶收敛的.

如考虑舍入误差的影响,计算出的数值解不是真正的 $\{y_n\}$ 而应是 $\{z_n\}$,这里 $z_{n+1}=z_n+h\cdot k^*(x_n,z_n,h)+\varepsilon_n$,其中 ε_n 表示每计算一步由于各种舍入而产生的误差. 于是包括舍入误差的整体误差 $\tilde{e}_n=|y(x_n)-z_n|$ 的递推式变为 $\tilde{e}_{n+1}\leqslant(1+hL_k)\tilde{e}_n+Nh^{p+1}+\varepsilon$,其中 $\varepsilon=\max\limits_n|\varepsilon_n|$. 整体误差估计式变为 $\tilde{e}_n\leqslant Mh^p+\frac{M}{N}\frac{\varepsilon}{h}$. 这表示缩小步长会减少截断误差,但因步数增加又会扩大舍入误差. 计算时应选取整体误差最小的步长. 数值计算除考虑相容性、收敛性外还要考虑数值算法计算过程的稳定性. 可参看[文 24 § 1.6].

*(9) **刚性常微分方程** 微分方程组 $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})$ 在区间 $I\subset[x_0,T]$ 内称为对特解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(x)$ 是刚性的,若对于 $x\in I$ 有 $\mathrm{Re}(\lambda_i)<0$, $\max\limits_i\ \mathrm{Re}(-\lambda_i)\gg\min\limits_i\ \mathrm{Re}(-\lambda_i)$,这里 λ_i 是方程组的雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}(x)=\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}\right|_{y(x)}$ 在 x 处的局部特征值. 比值 $\frac{\max\limits_i\ \mathrm{Re}(-\lambda_i)}{\min\limits_i\mathrm{Re}(-\lambda_i)}$ 称为局

部刚性比.

数值求解常微分方程时,应选择步长和求解区间. 步长由特征值中绝对值大者决定;求解区间由特征值中绝对值小者决定. 刚性比过大时,步长和求解区间难以统一,不能应用一般的数值方法求解,要考虑特别的解刚性方程的数值方法. 参看[文24 §1.7].

§3.3.3 应用实例

(1) 曲线轨迹

(a) 求曲线族,曲线上切点与 y 轴间切线部分的长度等于 y 截距;

(b) 求过原点的曲线,其上的点平行于 x,y 轴的直线与 x,y 轴围成的矩形由曲线分割成 1:3的两块面积.

解 (a) 如图 3.3, y 截距为 $y-xy'$,切点与 y 轴间切线部分的长度是两点 (x,y), $(0,y-xy')$ 之间长度,即 $x\sqrt{1+y'^2}$,于是得曲线方程 $x\sqrt{1+y'^2}=y-xy'$,即 $x^2=y^2-2xyy'$. 有解 $x^2+y^2=cx$ ([§2.4.2-2(8)]). 其中 c 为任意正常数,其图形为以 $\left(\frac{c}{2},0\right)$ 为圆心, $\frac{c}{2}$ 为半径的一串相互切于原点的上半圆(在第一象限). 任意圆上的任意切线只要不平行 y 轴必满足要求.

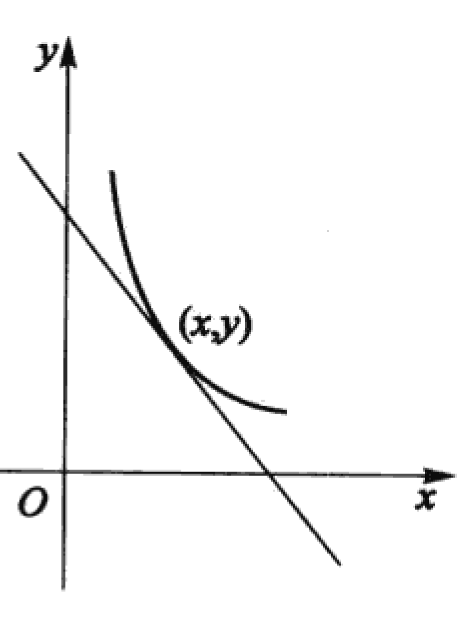


图 3.3 曲线轨迹

(b) 矩形面积 xy,曲线面积 $\int_0^x y\mathrm{d}x$. 方程为

$$3\int_0^x y\mathrm{d}x = xy-\int_0^x y\mathrm{d}x \text{ 或 } 3\left(xy-\int_0^x y\mathrm{d}x\right)=\int_0^x y\mathrm{d}x,$$

对 x 求导得 $3y=y+xy'-y$ 或 $3y+3xy'-3y=y$,即 $xy'=3y$ 或 $3xy'=y$. 解为 $y=cx^3$ 或 $x=cy^3$. 如图 3.4.

(2) 正交曲线

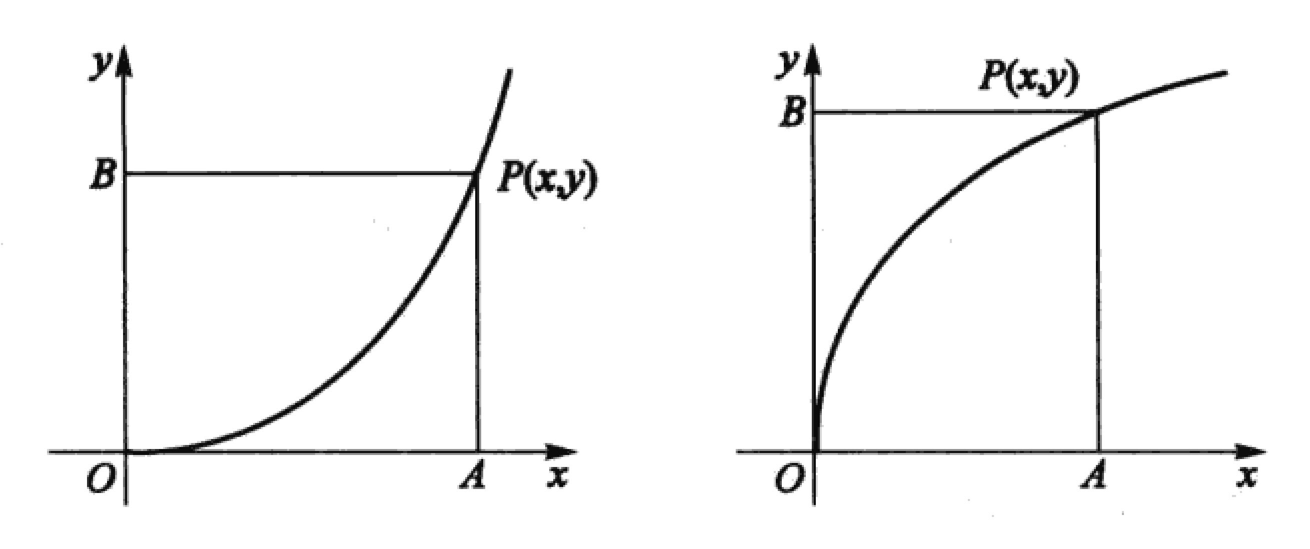


图 3.4　曲线轨迹

(a) 求双曲线族 $xy=c$ 的正交曲线；

(b) 求抛物线形的电力线族 $y=cx^2$ 的等势线(正交曲线)；

(c) 求心脏曲线族 $\rho=c(1+\sin\theta)$ 的正交曲线.

解　(a) 微分双曲线族，得微分方程 $xy'+y=0$. 其正交曲线方程为以 $-\frac{1}{y'}$代替 y'，即 $-\frac{x}{y'}+y=0$，即 $yy'=x$. 解为 $y^2-x^2=c$. 如图 3.5.

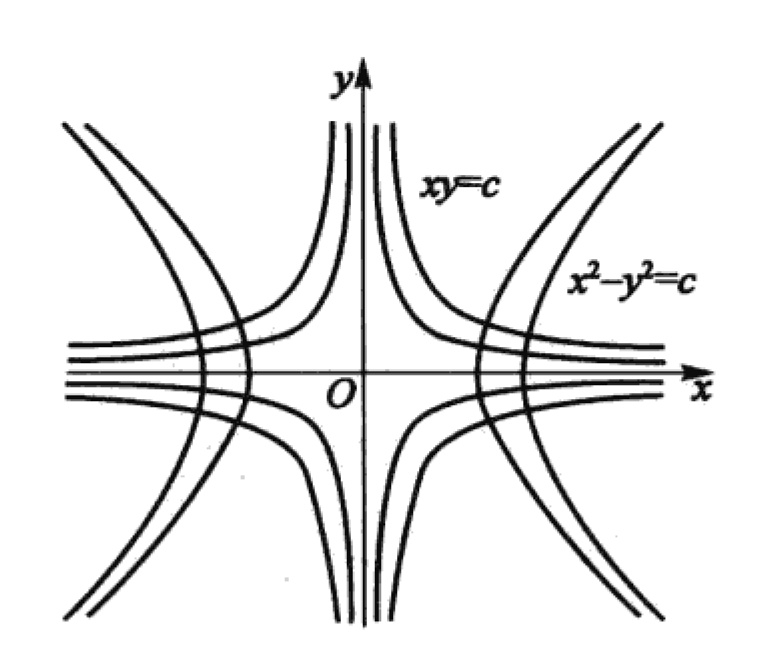


图 3.5　双曲线族 $xy=c$ 的正交曲线

(b) 微分抛物线族，有 $y'=2cx$. 与原方程消去 c，得微分方程 $y'=\frac{2y}{x}$. 以 $-\frac{1}{y'}$代替 y'，可得相应的正交曲线方程 $-\frac{1}{y'}=\frac{2y}{x}$. 有解 $2y\mathrm{d}y+x\mathrm{d}x=0$，$2y^2+x^2=c^2$. 此为一同心椭圆族. 如图 3.6.

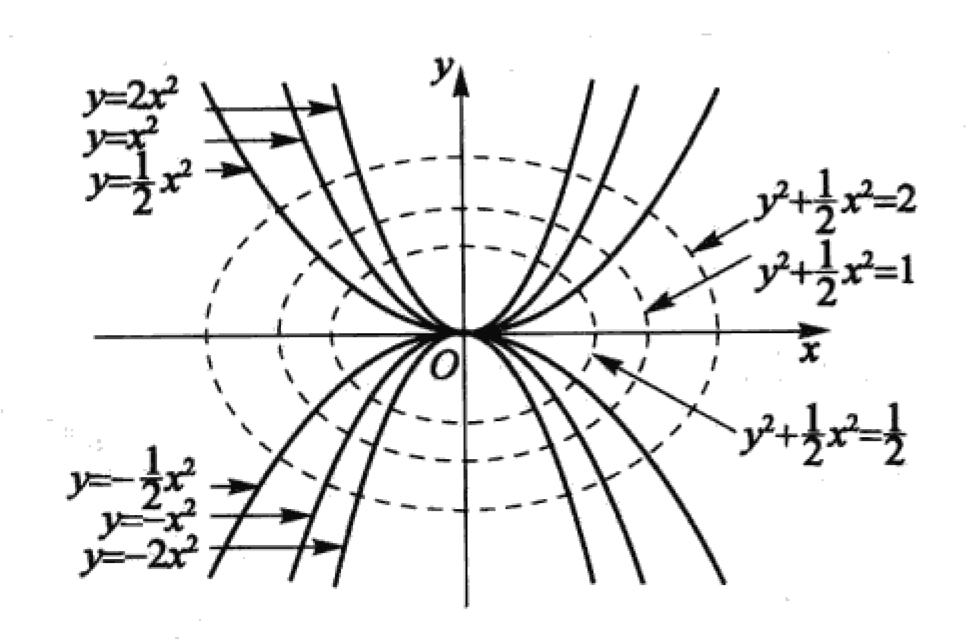


图 3.6　电力线族 $y = cx^2$ 的等势线

（c）对 θ 微分心脏曲线族，得 $\frac{d\rho}{d\theta} = c\cos\theta$，解出 c 后代入方程得心脏曲线微分方程 $\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\rho\cos\theta}{1+\sin\theta}$. 其正交曲线方程为以 $-\rho^2\frac{d\theta}{d\rho}$ 代替 $\frac{d\rho}{d\theta}$，有 $-\rho^2\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{\rho\cos\theta}{1+\sin\theta}$，即 $\frac{d\rho}{\rho} + (\sec\theta + \tan\theta)d\theta = 0$. 可解得 $\ln\rho + \ln(\sec\theta + \tan\theta) - \ln(\cos\theta) = \ln c$ 或 $\rho = \frac{c\cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$，即 $\rho = c(1-\sin\theta)$. 如图 3.7.

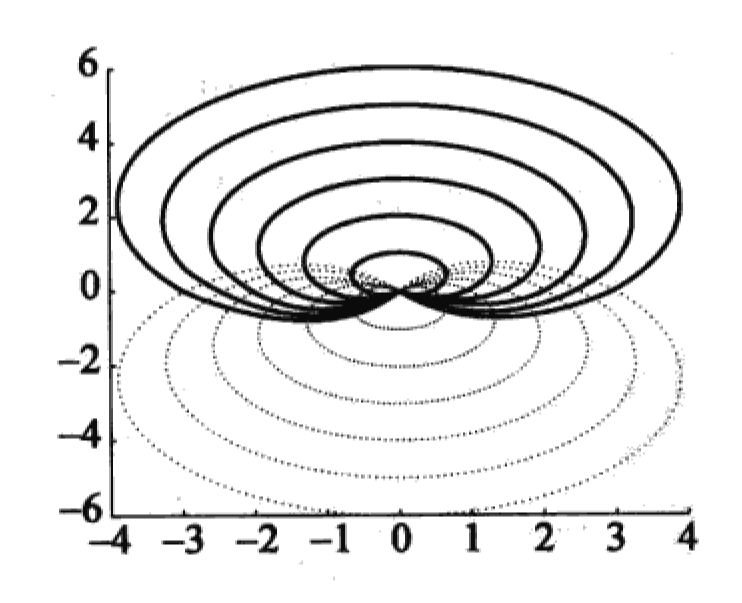


图 3.7　心脏曲线族的正交曲线

（3）**圆筒壁传热**　单层圆筒壁的内、外半径分别为 r_1 =

10 cm, $r_2=20$ cm，传热系数 k，内、外圆筒壁表面温度分别为 $U_1=200$ ℃，$U_2=50$ ℃. 试求与同心圆柱的轴的距离为 $r(r_1\leqslant r\leqslant r_2)$ 处的温度分布函数，距离为 $r_3=15$ cm 时的温度及长度为 $L=20$ m 的管段内每分钟流失的热量.

解 用柱面坐标，如图 3.8. 对 $q=-kA\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}$，$\mathrm{d}n$ 改为 $\mathrm{d}r$，半径为 r、长为 L 的圆柱面表面积为 $A=2\pi rL$，即有

$$q=-2\pi rkL\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r},\ -2\pi kL\mathrm{d}U=q\frac{\mathrm{d}r}{r},$$

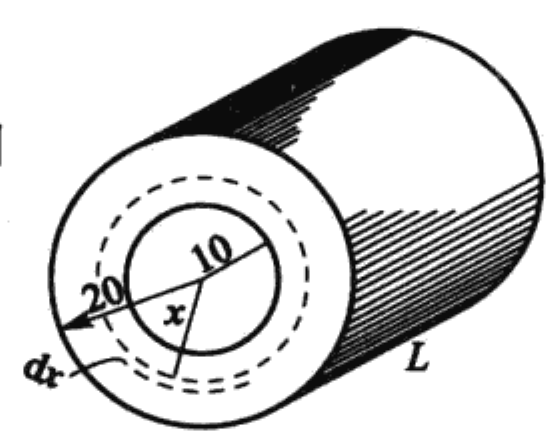


图 3.8 圆柱面坐标

对单层圆筒壁，q 为常数，且满足条件 $U(r_1)=U_1$，$U(r_2)=U_2$. 从 r_1 到 r 积分上式得

$$2\pi kL[U_1-U(r)]=q\ln\frac{r}{r_1}.$$

将 $U(r_2)=U_2$ 代入可求出

$$q=2\pi kL(U_1-U_2)\Big/\ln\frac{r_2}{r_1},$$

即

$$U(r)=U_1-(U_1-U_2)\cdot\ln\frac{r}{r_1}\Big/\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

此即为同心圆柱内的温度分布函数. 而距离为 $r_3=15$ cm 时的温度为

$$U(r_3)=U_1-(U_1-U_2)\cdot\ln\frac{r_3}{r_1}\Big/\ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$=200-150\ln\frac{15}{10}\Big/\ln\frac{20}{10}\approx112\ ℃.$$

将 $k=0.15$，$r=r_2$，$L=20$ m $=2\ 000$ cm 代入算得每分钟流失的热量为

$$q = 2\pi kL(U_1 - U_2)\Big/ \ln \frac{r_2}{r_1} = 2\pi \times 0.15 \times 2\ 000 \times 150\Big/ \ln \frac{20}{10}$$

$$\approx 407\ 912\ \text{cal/s}.$$

*(4) **年代的判断与艺术品防伪** 地壳岩石中含有少量的铀,铀衰变为另一种元素,另一种元素又再衰变为其他元素,直至衰变为不放射的铅-206,形成铀衰变系列.中间包括靠前的镭-226,靠后的铅-210及钋-210([文9§4-图4.1]).见图3.9.

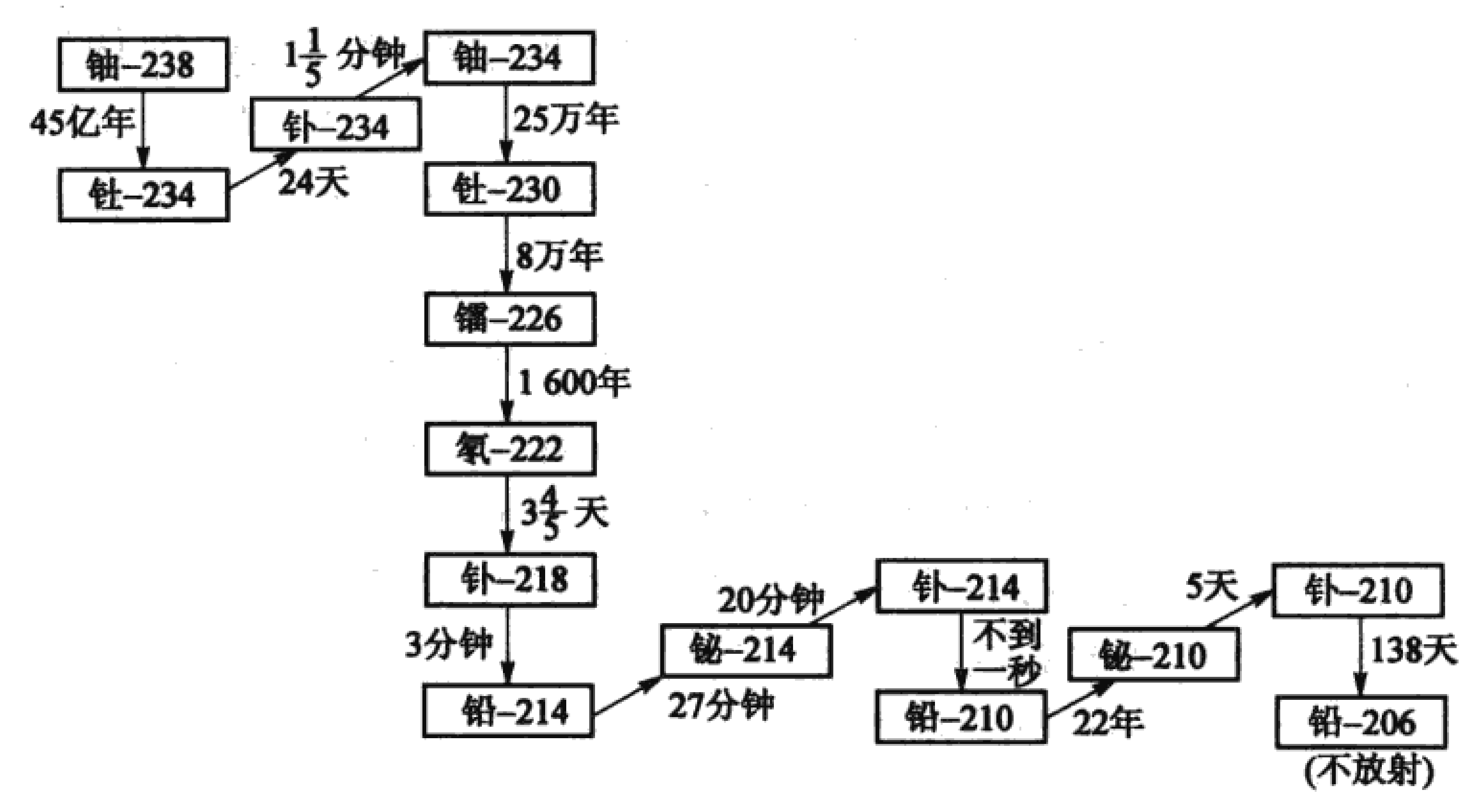


图3.9 铀衰变系列

西方油画颜料白铅中含有少量的放射性元素铅-210和更小量的镭-226,而镭-226通过衰变为铅-210减缓了铅-210的衰变速度.设$y(t)$为t时刻每克白铅中存在铅-210的数量,y_0为最初生产时t_0时刻每克白铅中存在铅-210的数量,$r(t)$为t时刻每克白铅中镭-226衰变为铅-210的数量,λ为铅-210的衰变常数.则有

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y + r(t), y(t_0) = y_0.$$

因只考虑存在300年的西方艺术品的存在年代,而镭-226的半衰期为1 600年,可假设$r(t) = r$为常数.此时,方程的解为

$$y(t)=\frac{r}{\lambda}[1-e^{-\lambda(t-t_0)}]+y_0e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

上式中 λ 已知，$y(t)$，r 容易测量，但还需知道 y_0 才能计算存在时间 $t-t_0$. 我们利用铅-210 开始时与开采的矿石中大量的镭-226处于放射性平衡状态这个事实来确定 y_0. 对岩石样本进行测算，得知生产时每分钟每克白铅中铅-210 的衰变数在 0.18 ~ 140 之间，与铅-210 的真正衰变数 $\lambda=(\ln 2)/22\approx 0.03$ 相差太大. 计算出来的年代较为粗糙，但仍可区别 17 世纪的画和现代的伪造品.

还可用另一方法测算. 设画作存在时间 $t-t_0=300$ 年，则有

$$\lambda y_0=\lambda y(t)e^{300\lambda}-r(e^{300\lambda}-1).$$

首先因若干年后钋-210 的衰变率与铅-210 的衰变率相同，可用较易测得的钋-210 的衰变率代替铅-210 的衰变率，利用上面的半衰期公式对铅-210 有 $\lambda=(\ln 2)/22$，即 $e^{300\lambda}=e^{300\times(\ln 2)/22}\approx 2^{150/11}$.

通过测算，艺术品"Emmaus 的信徒们"中钋-210 和镭-226 的衰变率分别为 8.5 和 0.8. 于是

$$\begin{aligned}\lambda y_0&=\lambda y(t)e^{300\lambda}-r(e^{300\lambda}-1)\\&\approx 8.5\times 2^{150/11}-0.8\times(2^{150/11}-1)=98\ 050.\end{aligned}$$

这个值大得使人无法接受. 因此，这幅画一定是现代的伪造品.

通过类似的分析，发现了一批伪造品及证实了一些真品. 参看[文 9 §4].

*(5) **技术革新的推广速度**　考虑在行业中技术革新的推广，设有 N 个农场的社会中，$P(t)$ 为时刻 t 采用某项革新的农场主的数量. 已采用某项革新的农场主的接触宣传使未采用某项革新的农场主采用. 因此，在时间段 Δt 内，采用某项革新的农场主数 ΔP 与已采用某项革新的农场主数 P 和未采用某项革新的农场主数 $N-P$ 均成正比，比例常数为 c. 于是有关系式

$$\Delta P=cP(N-P)\Delta t,\frac{\Delta P}{\Delta t}=cP(N-P).$$

令 $\Delta t \to 0$ 得

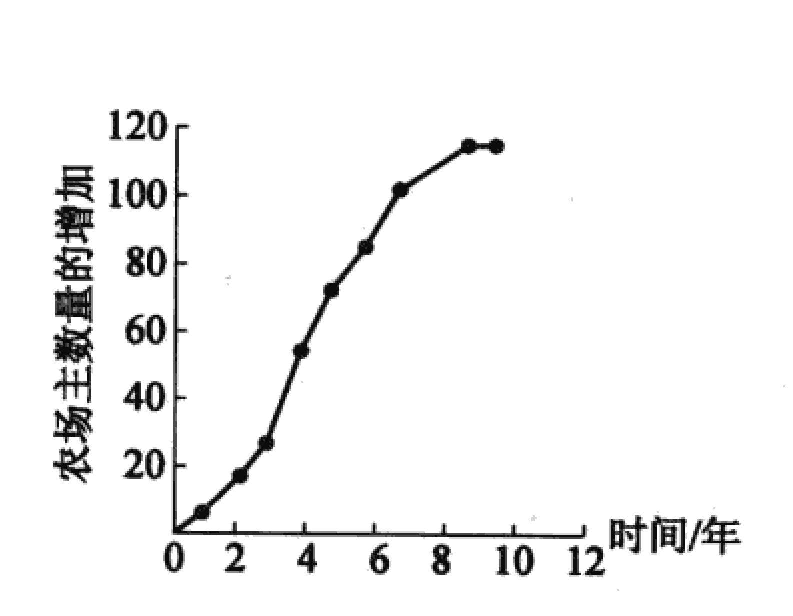
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=cP(N-P),$$

此为 Logistic 模型. 可以测算技术革新的推广速度. 当开始时仅有 1 个农场主采用,初始条件为 $P(0)=1$. logistic 模型的解(见[书§1.1-例3,书§2.1-例3])

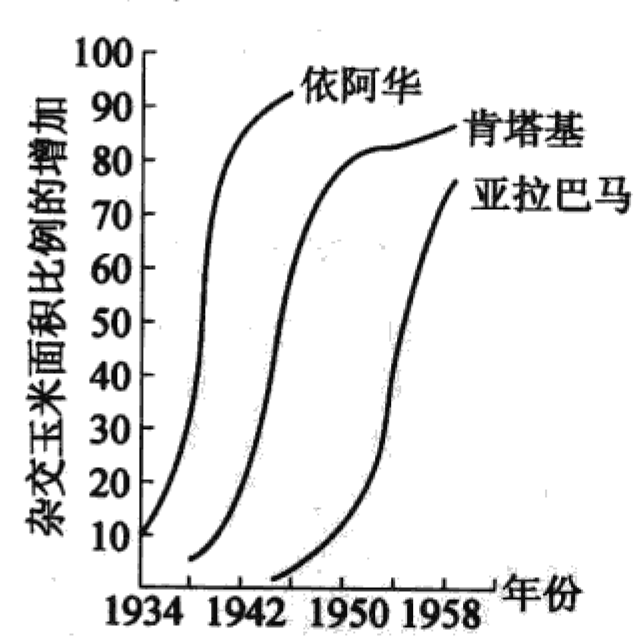
$$P(t)=\frac{Ne^{cNt}}{N-1+e^{cNt}}.$$

比较20世纪50年代两项革新在美国农业社会中推广的数据. 其中图3.10(a)为1944—1955年间美国依阿华州采用除草喷雾器的农场主的累加数字,图3.10(b)是1934—1958年间美国三个州的杂交玉米种植面积占整个玉米种植面积的累加百分比. 模型与数据很吻合. 但开始部分有差异,查其原因,发现不完全是靠已采用某项革新的农场主的接触宣传,大量的报刊、收音机、电视宣传也能促使农场主采用某项革新技术,其比例常数为 c',即在模型中要增加一项,变为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}&=cP(N-P)+c'(N-P)\\&=(cP+c')(N-P),P(0)=0.\end{aligned}$$



(a) 采用除草喷雾器农场主累加数



(b) 三个州的杂交玉米种植面积

图 3.10

其解为([§2.4.2 -7(4)])

$$P=\frac{Nc'[\mathrm{e}^{(cN+c')t}-1]}{cN+c'\mathrm{e}^{(cN+c')t}}.$$

修改后的模型结果与数据非常一致了.

Mansfield 研究了 12 项新技术的使用在烟煤、钢锌、酿造及铁路四种主要行业企业中推广速度问题. 设 n 为某一行业中企业总数. t 时刻该行业已采纳新技术的企业数为 p,在 Δt 时间内,采纳该项技术的企业数 ΔP 与还未采纳的企业数成正比,即 $\Delta p=\lambda(n-p)\Delta t$, $\frac{\Delta p}{\Delta t}=\lambda(n-p)$. 令 $\Delta t\to 0$ 得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\lambda(n-p).$$

比例因子 λ 依赖于投资该项技术的效益 π、投资该项技术占企业总资产的百分比 s 及已采用该项技术企业的百分比,即 $\lambda=f\left(\pi,s,\frac{p}{n}\right)$. 将其展开成前几项的泰勒级数,得

$$\lambda=a_1+a_2\pi+a_3s+a_4\frac{p}{n}+a_5\pi^2+a_6s^2+a_7\pi s+a_8\pi\frac{p}{n}+a_9s\frac{p}{n}+a_{10}\left(\frac{p}{n}\right)^2.$$

经过对大量数据的分析,有 $a_{10}=0$,且 $a_1+a_2\pi+a_3s+a_5\pi^2+a_6s^2+a_7\pi s=0$. 若令 $k=a_4+a_8\pi+a_9s$,则模型变为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\frac{k}{n}p(n-p),$$

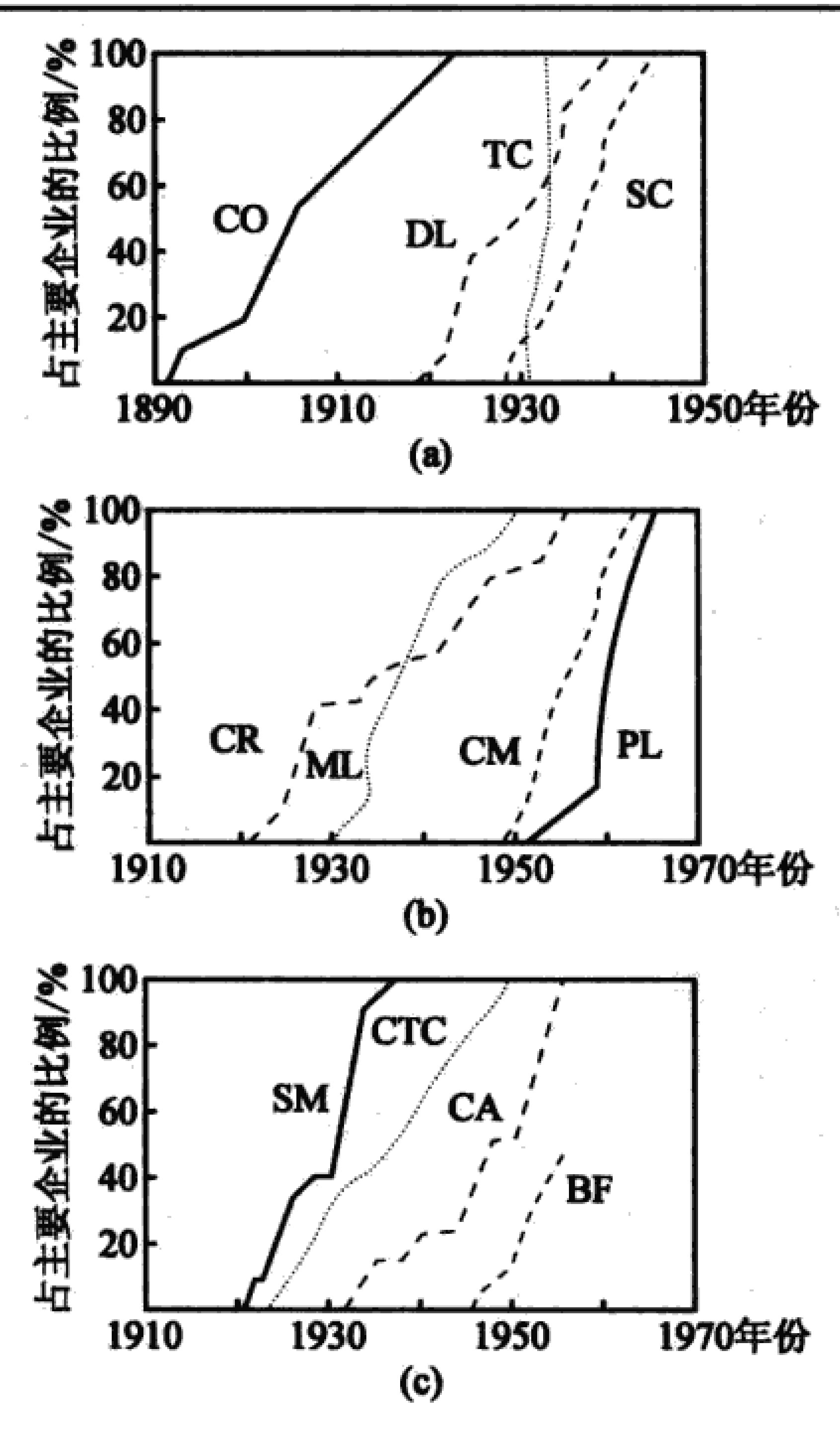
这也是 logistic 模型. 若设开始时仅 1 家企业采纳该项技术 $p(t_0)=1$,则上述模型有解(见[书 §1.1 -例 3,书 §2.1 -例 3])

$$p(t)=\frac{n}{1+(n-1)\mathrm{e}^{-k(t-t_0)}}.$$

对 12 项革新中的每一项均估算出常数 n,t_0,a_4,a_5,a_9,π,s 的值,并用上式进行测算. 其结果相当准确. 见表 3.1. 详细资料可参看[文 9 §6]及所列论文.

表 3.1　12 项技术革新推广速度估算及企业增长百分比

新技术	n	t_0	a_4	a_8	a_9	π	s
内燃机火车头	25	1925	−0.59	0.530	−0.027	1.59	0.015
集中化的交通控制	24	1926	−0.59	0.530	−0.027	1.48	0.024
车厢减速器	25	1924	−0.59	0.530	−0.027	1.35	0.784
连续宽带轧钢机	12	1924	−0.52	0.530	−0.027	1.87	4.908
副产品炼焦炉	12	1894	−0.52	0.530	−0.027	1.47	2.083
连续退火线	9	1936	−0.52	0.530	−0.027	1.25	0.554
短距运行车辆	15	1937	−0.57	0.530	−0.027	1.74	0.013
无轨机械装载机	15	1934	−0.57	0.530	−0.027	1.65	0.019
连续采矿机	17	1947	−0.57	0.530	−0.027	2.00	0.301
罐头	22	1935	−0.29	0.530	−0.027	5.07	0.267
高速装瓶机	16	1951	−0.29	0.530	−0.027	1.20	0.575
货盘装载机	19	1948	−0.29	0.530	−0.027	1.67	0.115



§3.3.4 历史与人物

(1) **简史(解的存在唯一性、奇解、数值解)** 因大量微分方程不能用初等函数方法求解,微分方程的解的存在性、唯一性便成了首先要解决的基本问题. 柯西于1820年首先提出并建立微分方程初值问题及其解的存在和唯一性定理. 后人把微分方程初值问题称为柯西问题. 利普希茨1869年将柯西的定理加以简化并叙述得更明确. 皮卡创立逐次逼近法完善了其证明. 1890年佩亚诺则在更一般(只是连续)的条件下建立了柯西问题解的存在性定理. 佩龙(O. Perron)在更广的条件下作了证明(1915). 关于解的唯一性,还有奥斯古德(W. F. Osgood,1898)、佩龙(1925)等人的工作. 后来,又出现了用上、下解及压缩映象不动点等多种近代方法研究微分方程解的存在和唯一性问题.

奇解问题早在1694年莱布尼茨就已发现,微分方程解族的包络也是方程的解. 克莱罗和欧拉对奇解作了探讨,给出了求奇解的 p-判别曲线法. 拉格朗日则系统研究了奇解和通解的关系,给出了奇解是积分曲线族的包络的几何解释和 c-判别曲线法.

微分方程数值方法是由天文计算的需要和在发现大量微分方程无法求解时出现的,属于数值分析的内容,已有几种方法,能把微分方程的数值解计算到任意精确度. 最早出现的一阶微分方程数值解方法是欧拉提出的,很简单但颇粗糙. 后来才出现用梯形法则改进的欧拉法. 直到19世纪末,才出现现在通用的微分方程数值解的龙格-库塔方法.

(2) **利普希茨**(R. Lipschtz,1832—1903) 波恩大学教授. 除简化柯西提出的微分方程解的存在唯一性理论外,还推广了函数可表示为傅里叶级数的狄利克雷定理,并在变分法、贝塞尔函数等方面作出过贡献.

(3) **皮卡**(E. Picard,1856—1941) 法国杰出数学家. 曾任巴黎大学教授,1917年当选为法国科学院终身秘书. 突出贡献有逐

次逼近法(1890,1893)和复解析函数在本性奇点附近取值的皮卡大定理(1901).

(4) **佩亚诺**(G. Peano,1858—1932) 意大利逻辑学家和数学家,都灵大学教授. 1890 年他作出一个完全充满正方形的平面曲线而震惊数学界. 1886 年他给出常微分方程存在定理的证明,但尚不完善.

(5) **克莱罗**(A. C. Clairaut,1713—1765) 法国数学家、力学家. 16 岁被选入法国科学院. 曾因精确计算哈雷彗星到达近日点日期而获彼得堡科学院奖. 在二重曲率曲线、变分法、单摆振动等时性等方面作过贡献. 1734 年建立了克莱罗微分方程. 还证明了一阶线性微分方程的积分因子的存在性问题.

(6) **龙格**(C. Runge,1856—1927) 德国应用数学家. 曾任哥廷根大学应用数学系教授. 其著名工作是塞曼(Zeeman)效应和丢番图(Diophantine)方程的研究.

(7) **库塔**(M. W. Kutta,1867—1944) 德国应用数学家. 以其在空气动力学中的库塔-茹可夫斯基机翼上升理论方面的贡献留名于世.

与存在、唯一性研究有关的历史人物还有:柯西([§7.3.4-(2)])、刘维尔([§8.3.4-(3)]). 与奇解研究有关的历史人物还有:莱布尼茨([§2.3.4-(2)]),欧拉([§1.3.4-(3)]),拉格朗日([§5.3.4-(2)]).

§3.4 习题与习题解答

§3.4.1 测试练习解答

1. (1) (a) 对 $y_1, y_2: 0 < c \leqslant y_1, y_2 \leqslant d$,当取 $L = \dfrac{1}{2c^{\frac{1}{2}}}$ 时有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| = \left|y_1^{\frac{1}{2}}-y_2^{\frac{1}{2}}\right| = \frac{\left|y_1^{\frac{1}{2}}-y_2^{\frac{1}{2}}\right|}{|y_1-y_2|}|y_1-y_2|$$

$$= \frac{1}{\left|y_1^{\frac{1}{2}}+y_2^{\frac{1}{2}}\right|}|y_1-y_2| \leqslant L|y_1-y_2|,$$

即方程满足利普希茨条件,利普希茨常数为 L.

(b) 对 y_1,y_2:$0<y_1,y_2\leqslant d$,由

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| = \left|y_1^{\frac{1}{2}}-y_2^{\frac{1}{2}}\right| = \frac{\left|y_1^{\frac{1}{2}}-y_2^{\frac{1}{2}}\right|}{|y_1-y_2|}|y_1-y_2|$$

$$= \frac{1}{\left|y_1^{\frac{1}{2}}+y_2^{\frac{1}{2}}\right|}|y_1-y_2|,$$

当 $y_1,y_2\to 0$ 时 $\dfrac{1}{\left|y_1^{\frac{1}{2}}+y_2^{\frac{1}{2}}\right|}\to\infty$. 故方程不满足利普希茨条件. 但满足局部利普希茨条件.

(2) (a) 对 $a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y_1,y_2\leqslant d$,有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| = |xy_1^2-xy_2^2| = |x||y_1+y_2||y_1-y_2|$$
$$\leqslant 2\tilde{b}\tilde{d}|y_1-y_2|,$$

其中 $\tilde{b}=\max(|a|,|b|)$, $\tilde{d}=\max(|c|,|d|)$. 方程满足利普希茨条件,利普希茨常数为 $2\tilde{b}\tilde{d}$.

(b) 对 $a\leqslant x\leqslant b$, $-\infty<y_1,y_2<+\infty$,有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| = |xy_1^2-xy_2^2| = |x||y_1+y_2||y_1-y_2|.$$

因可以 $|x||y_1+y_2|\to\infty$,故方程不满足利普希茨条件. 但满足局部利普希茨条件.

(3) (a) 对 $a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y_1,y_2\leqslant d$,有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| = |xy_1-xy_2| = |x||y_1-y_2| \leqslant \tilde{b}|y_1-y_2|.$$

其中 $\tilde{b}=\max(|a|,|b|)$. 方程满足利普希茨条件,利普希茨常数为 $\tilde{b}$.

(b) 对 $a\leqslant x\leqslant b$, $-\infty\leqslant y_1,y_2\leqslant+\infty$,有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=|xy_1-xy_2|=|x|\,|y_1-y_2|\leqslant\tilde{b}|y_1-y_2|.$$

方程满足利普希茨条件,利普希茨常数为 $\tilde{b}$.

(c) 对全平面,即 $-\infty<x,y_1,y_2<+\infty$,有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=|xy_1-xy_2|=|x|\,|y_1-y_2|.$$

因可以 $x\to\pm\infty$,故方程不满足利普希茨条件. 但满足局部利普希茨条件.

(4) 因

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=\left|\frac{x+y_1}{x-y_1}-\frac{x+y_2}{x-y_2}\right|=\left|\frac{2x(y_1-y_2)}{(x-y_1)(x-y_2)}\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{2x}{(x-y_1)(x-y_2)}\right|\,|y_1-y_2|,$$

在域 $x\neq y$ 中有 $x-y\to0$,方程不满足利普希茨条件. 但只要 $x\neq y$,方程满足局部利普希茨条件.

2. (1) 方程化为 $y'=\dfrac{y\ln x}{y-x}$. 仅当 $x>0$ 且 $y\neq x$ 时右端函数有定义,此时存在 y 的偏导数,满足局部利普希茨条件.

(2) 方程有 $\left|\dfrac{y_1+2}{x-y_1}-\dfrac{y_2+2}{x-y_2}\right|=\left|\dfrac{(x+2)(y_1-y_2)}{(x-y_1)(x-y_2)}\right|\leqslant\left|\dfrac{x+2}{(x-y_1)(x-y_2)}\right|\,|y_1-y_2|$,只要 $x\neq y_1,y_2$,即 $x\neq y$ 时方程右端满足局部利普希茨条件. 方程又可变为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{x-y}{y+2}$. 由 $\left|\dfrac{x_1-y}{y+2}-\dfrac{x_2-y}{y+2}\right|=\left|\dfrac{1}{y+2}\right|\,|x_1-x_2|$,当 $y\neq-2$ 时方程右端满足局部利普希茨条件. 综合以上两个条件,Oxy 平面上除点 $(-2,-2)$ 外均存在唯一解.

(3) 右端函数 $f(y)=y+3y^{\frac{1}{3}}$ 连续,但 $\dfrac{\partial f(y)}{\partial y}=1+y^{-\frac{2}{3}}$ 当 $y=0$ 时无界,不满足利普希茨条件. 当 $y\neq0$ 时存在唯一解. 方程有特解

$y=0$ 和通解 $\int_{y_0}^{y}\frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y=x-x_0$，且当 y 经过 $y=0$ 时 $f(y)$ 变号，故在 $y=0$ 处解不唯一.

3.（1）设定义区域 R：$|x-x_0|\leqslant a$，$|y-y_0|\leqslant b$，取 $x_0=0$，$y_0=0$，则

$$y_1=y_0+\int_0^x(1+y_0^2)\mathrm{d}x=x,$$

$$y_2=y_0+\int_0^x(1+y_1^2)\mathrm{d}x=\int_0^x(1+x^2)\mathrm{d}x=x+\frac{1}{3}x^3,$$

$$y_n=y_0+\int_0^x(1+y_{n-1}^2)\mathrm{d}x.$$

$$|y_n(x)-y(x)|\leqslant\frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1},$$

$$M=1+b^2,L=2b,h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right).$$

（2）设定义区域 R：$|x-x_0|\leqslant a$，$|y-y_0|\leqslant b$，取 $x_0=1$，$y_0=1$，则

$$y_1=y_0+\int_1^x(y_0^2+3x^2-1)\mathrm{d}x=1+x^3-1=x^3,$$

$$y_2=y_0+\int_1^x(y_1^2+3x^2-1)\mathrm{d}x=1+\frac{1}{7}x^7+x^3-x-\frac{1}{7}$$

$$=\frac{1}{7}x^7+x^3-x+\frac{6}{7},$$

$$y_n=y_0+\int_1^x(y_{n-1}^2+3x^2-1)\mathrm{d}x.$$

$$|y_n(x)-y(x)|\leqslant\frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1},M=(b+1)^2+3(a+1)^2,$$

$$L=2(b+1),h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right).$$

（3）方程化为 $y'=2-\frac{y}{x}$，$y(1)=2$. 设定义区域 R：$|x-x_0|$

$\leqslant a$, $|y-y_0|\leqslant b$,取 $x_0=1$, $y_0=2$,则

$$y_1=y_0+\int_1^x\left(2-\frac{y_0}{x}\right)\mathrm{d}x=2+\int_1^x\left(2-\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=2x-2\ln|x|,$$

$$y_2=y_0+\int_1^x\left(2-\frac{y_1}{x}\right)\mathrm{d}x=2+\int_1^x\left(2-\frac{2x-2\ln|x|}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=2+\ln^2|x|,$$

$$y_n=y_0+\int_1^x\left(2-\frac{y_{n-1}}{x}\right)\mathrm{d}x=2+\int_1^x\left(2-\frac{y_{n-1}}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

$$|y_n(x)-y(x)|\leqslant\frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1},M=\max_{|x-1|\leqslant a,|y-2|\leqslant b}\left|2-\frac{y}{x}\right|,$$

$$L=\max_{|x-1|\leqslant a}\frac{1}{|x|},h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right),$$

其中若 L 过大时可缩小 a,再通过解的延拓逐步扩大解的存在范围.

4. (1) $f(x,y)=p(x)y^2+q(x)y+r(x)$, $f_y(x,y)=2p(x)y+q(x)$ 在全平面连续. 设方程的解为 $y(x,x_0,y_0)$, $y(x_0,x_0,y_0)=y_0$,于是得 $\left.\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\mathrm{e}^{\int_{x_0}^x[2p(x)y(x,x_0,y_0)+q(x)]\mathrm{d}x}$ 及 $\left.\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=-[p(x_0)y_0^2+q(x_0)y_0+r(x_0)]\,\mathrm{e}^{\int_{x_0}^x[2p(x)y(x,x_0,y_0)+q(x)]\mathrm{d}x}$.

(2) $f(x,y)=\sin(xy)$, $f_y(x,y)=x\cos(xy)$ 在全平面连续. 设方程的解为 $y(x,x_0,y_0)$, $y(x_0,x_0,y_0)=y_0$,于是得 $\left.\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=0$ 及 $\left.\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=\mathrm{e}^{\int_0^x x\cos(xy(x,0,0))\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$.

(3) $f(x,y)=\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$, $f_y(x,y)=\frac{1}{x}\left(1+\cos\frac{y}{x}\right)$ 当 $x\neq0$ 时连续. 设方程的解为 $y(x,x_0,y_0)$, $y(x_0,x_0,y_0)=y_0$,由方程有解 $y(x,1,0)=0$,于是 $\left.\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=0$ 及 $\left.\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=\mathrm{e}^{\int_1^x\frac{1}{x}\left[1+\cos\frac{y(x,1,0)}{x}\right]\mathrm{d}x}=x^2-1$.

5.（1）p - 判别曲线法. 令 $p=y'$，方程化为 $xp^2-2yp+4x=0$，对 p 求导得 $2xp-2y=0$，联立消去 p. 再检验是否为方程的解，是则为奇解.

（2）令 $p=y'$，方程化为 $4x^2yp^2-(4xy^2+2)p+y^3=0$，对 p 求导得 $8x^2yp-4xy^2-2=0$，联立消去 p. 再检验是否为方程的解.

（3）令 $p=y'$，方程化为 $yp^2+1=0$，对 p 求导得 $2yp=0$，联立消去 p，再检验是否为方程的解.

（4）令 $p=y'$，$xp^3-2yp^2-16x^2=0$ 与 $3xp^2-4yp=0$ 联立消去 p，再检验是否为方程的解.

6.（1）c - 判别曲线法. 方程的通解（解族）$xy=cy-c^2$ 对 c 求导得 $y-2c=0$，并与解族联合消去 c，再检验是否为方程的解，是则为奇解.

（2）$c^3x^2-c^2y-2=0$，$3c^2x^2-2cy=0$，联立消去 c，再检验是否为方程的解.

（3）$y=c\left(x-\frac{1}{c}\right)^3$，$\left(x-\frac{1}{c}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{c}\right)^2\cdot\frac{1}{c}=0$，联立消去 c，再检验是否为方程的解.

（4）$c^3-2c^2x+cx^2-y=0$，$3c^2-4cx+x^2=0$，联立消去 c，再检验是否为方程的解.

§3.4.2 补充习题解答

1.（1）因 $f(x,y)=x+\cos y$，$f'_y(x,y)=-\sin y$ 在整个 Oxy 平面连续，因此在整个 Oxy 平面上初值问题的解存在唯一.

（2）因 $f(x,y)=\sqrt{|y|}$，当 $y\geqslant 0$ 时 $f(x,y)=\sqrt{y}$，$f'_y(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$；而当 $y<0$ 时 $f(x,y)=\sqrt{-y}$，$f'_y(x,y)=\frac{-1}{2\sqrt{-y}}$. 方程除 $y=0$ 外在整个 Oxy 平面连续，因此除 $y=0$ 外在整个 Oxy 平面上初值问题的解存在唯一.

(3) 对方程，由 $\left|\frac{x+y_1}{x-y_1}-\frac{x+y_2}{x-y_2}\right|=\left|\frac{2x(y_1-y_2)}{(x-y_1)(x-y_2)}\right|\leqslant L|y_1-y_2|$，只要 $x\neq y_1,y_2$ 即 $x\neq y$ 时方程右端满足局部利普希茨条件. 方程又可变为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x-y}{x+y}$. 由 $\left|\frac{x_1-y}{x_1+y}-\frac{x_2-y}{x_2+y}\right|=\left|\frac{2y}{(x_1+y)(x_2+y)}\right||x_1-x_2|$，只要 $y\neq -x_1,-x_2$ 即 $x\neq -y$ 时方程右端满足局部利普希茨条件. 综合以上两个条件，Oxy 平面上除点(0,0)外均存在唯一解.

2. 因在原点邻域有 $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots$，于是令 $x_0=0,y_0=0$，得

$$y_1=y_0+\int_0^x(y_0^3+x\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^x\left(x-\frac{1}{2!}x^3+\frac{1}{4!}x^5+\cdots\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{144}x^6+\cdots,$$

$$y_2=y_0+\int_0^x(y_1^3+x\cos x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^x\left(\frac{1}{8}x^6+\cdots+x-\frac{1}{2!}x^3+\frac{1}{4!}x^5+\cdots\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{144}x^6+\cdots,$$

$$y_n=y_0+\int_0^x(y_{n-1}^3+x\cos x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^x\left(\frac{1}{8}x^6+\cdots+x-\frac{1}{2!}x^3+\frac{1}{4!}x^5+\cdots\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{144}x^6+\cdots.$$

在原点邻域，解为 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{144}x^6+\cdots=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+$

$o(x^5)$. 故 $o(x^5)$ 的近似解为 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4$.

3. (1) 对方程 $y'=1+y^2, y(0)=0$. 在 $|x-x_0|\leqslant 1, |y-y_0|\leqslant 1$ 有 $a=1, b=1, L=2b=2, M=2$, 及 $h=\min\left(1,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. 根据误差要求

$$|y_n(x)-y(x)|\leqslant\frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}=\frac{Mh}{(n+1)!}(Lh)^n$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}\leqslant 0.05.$$

由 $n=3$ 时 $\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}\approx 0.04$, 知误差等于或小于 0.05 的逼近次数为 3.

(2) 方程 $y'=y^2+3x^2-1, y(1)=1$. 在 $|x-x_0|\leqslant 1, |y-y_0|\leqslant 1$ 有 $a=1, b=1, L=2(b+1)=4, M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2}|y^2+3x^2-1|=15$, 及 $h=\min\left(1,\frac{1}{15}\right)=\frac{1}{15}$. 根据误差要求

$$|y_n(x)-y(x)|\leqslant\frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}=\frac{Mh}{(n+1)!}(Lh)^n$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{4}{15}\right)^n\leqslant 0.05.$$

由 $n=2$ 时 $\frac{1}{3!}\left(\frac{4}{15}\right)^2=\frac{8}{3\times 225}\approx 0.012$, 而 $n=3$ 时 $\frac{1}{4!}\left(\frac{4}{15}\right)^3=\frac{64}{81\ 000}\approx 7.9\times 10^{-4}$, 知误差等于或小于 0.05 的逼近次数为 3.

4. 初值问题等价于积分方程 $y(x)=\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}x$. 作逐次逼近序列

$$y_0(x)=0, y_n(x)=\int_0^x f(x,y_{n-1}(x))\mathrm{d}x, n=1,2,\cdots,$$

由数学归纳法, 证明 $|y_n(x)|\leqslant Mh\leqslant b$. 首先, $|y_1(x)|\leqslant\int_0^x|f(x,0)|\mathrm{d}x\leqslant Mh\leqslant b$; 设对 n 成立, 则有 $|y_{n+1}(x)|\leqslant$

$\int_0^x |f(x,y_n(x))|\mathrm{d}x \leqslant Mh \leqslant b$. 即对 $0\leqslant x\leqslant h$ 及任意 n 有 $(x, y_n(x))\in R$. 于是，当 $0\leqslant x\leqslant h$ 时 $y_1(x)=\int_0^x f(x,0)\mathrm{d}x\geqslant 0 = y_0(x)$. 设对 n 成立 $y_n(x)-y_{n-1}(x)\geqslant 0$ 则有 $y_{n+1}(x)-y_n(x)=\int_0^x [f(x,y_n(x))-f(x,y_{n-1}(x))]\mathrm{d}x\geqslant 0$. 由归纳法，知 $y_0(x)\leqslant y_1(x)\leqslant\cdots\leqslant y_n(x)\leqslant\cdots$. 单调有界序列必有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)=y(x)$. 且对 $0\leqslant x\leqslant h$ 是一致收敛的. 即 $y(x)$ 满足积分方程，故在 $0\leqslant x\leqslant h$ 是初值问题的解.

5. 方程右端函数 $f(x,y)=(1-y^2)\mathrm{e}^{xy^2}$ 在全平面连续可微，故过任何点的解均存在唯一. 由方程右端为零推得方程有两个特解 $y_1=1, y_2=-1$. 这两个特解将全平面划分成三个区域：$y>1$, $-1<y<1$, $y<-1$.

在区域 $y>1$，因 $y_0, y>1$，由 $\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}y}{1-y^2}=\int_{x_0}^{x}\mathrm{e}^{xy^2}\mathrm{d}x$ 知，当 $y\to 1$ 时左端 $\to+\infty$，使右端积分上限 $x\to+\infty$；而当 $y\to -1$ 时左端 $\to-\infty$，使右端积分上限 $x\to-\infty$. 对其他区域亦类似. 因此特解 $y=\pm 1$ 是其两侧其他积分曲线的渐近线.

再由方程知当 $y>1, x\to-\infty$ 时 $y'\to 0$；而当 $y<-1, x\to+\infty$ 时 $y'\to-\infty$. 故方程的所有解均能延拓到 $(-\infty,+\infty)$.

6. 方程可直接分离变量积分得通解

$$|y|^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y=|x|^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x,\ |y|^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}|x|^{\frac{3}{2}}-c.$$

过原点 $(0,0)$ 的解应有 $c=0$，即解为 $y=\frac{1}{9}x^3$. 又方程还有解 $y=0$. 此两解在方程右端有定义且连续的区域 $xy\geqslant 0$，即第一、三象限上. 在第一象限 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$，通解中可取任意 $c\geqslant 0$. 而与 x 轴相交于 $x=(3c)^{\frac{2}{3}}$. 因要求 $xy\geqslant 0$，故当 $x<(3c)^{\frac{2}{3}}$ 时可取 $y=0$. 即在第一象限中的解可定义为

$$y=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-c\right)^2, & x\geqslant(3c)^{\frac{2}{3}},\\ 0, & x<(3c)^{\frac{2}{3}}.\end{cases}$$

同样,在第三象限中的解可定义为对任意 $c\geqslant 0$,

$$y=\begin{cases}0, & x\geqslant-(3c)^{\frac{2}{3}},\\ -\left(\frac{1}{3}|x|^{\frac{3}{2}}-c\right)^2, & x<-(3c)^{\frac{2}{3}}.\end{cases}$$

方程的最大解 $\bar{y}$ 和最小解$\underline{y}$分别为

$$\bar{y}=\begin{cases}\frac{1}{9}x^3, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0,\end{cases}\quad \underline{y}=\begin{cases}0, & x\geqslant 0,\\ \frac{1}{9}x^3, & x<0.\end{cases}$$

在 x 轴正半轴和最大解$\bar{y}$之间充满方程的解. 同样,在 x 轴负半轴和最小解$\underline{y}$之间也充满方程的解. 方程的所有解均在其中.

7. (1) 由$\frac{\partial y(x,x_0,y_0,\lambda)}{\partial x}\equiv f(x,y(x,x_0,y_0,\lambda),\lambda)$知有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\mathrm{d}y(x,x_0,y_0,\lambda)}{\mathrm{d}x}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial y(x,x_0,y_0,\lambda)}{\partial\lambda}\\&=f_y(x,y(x,x_0,y_0,\lambda),\lambda)\frac{\partial y(x,x_0,y_0,\lambda)}{\partial\lambda}+\\&\quad f_\lambda(x,y(x,x_0,y_0,\lambda),\lambda).\end{aligned}$$

而当 $x=x_0$ 时 $\frac{\partial y(x_0,x_0,y_0,\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{\partial y_0}{\partial\lambda}=0$. 因此若令 $z=\frac{\partial y(x,x_0,y_0,\lambda)}{\partial\lambda}$,则 z 为初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_y(x,y(x,x_0,y_0,\lambda),\lambda)z+f_\lambda(x,y(x,x_0,y_0,\lambda),\lambda),\\ z(x_0)=0\end{cases}$$

的解. 方程是非齐次线性方程,其解为

$$z = e^{\int_{x_0}^{x} f_y(s,y(s,x_0,y_0,\lambda),\lambda)\mathrm{d}s} \int_{x_0}^{x} f_\lambda(x,y(x,x_0,y_0,\lambda),\lambda) e^{-\int_{x_0}^{x} f_y(s,y(s,x_0,y_0,\lambda),\lambda)\mathrm{d}s} \mathrm{d}x.$$

即有公式

$$\frac{\partial y(x,x_0,y_0,\lambda)}{\partial\lambda} = e^{\int_{x_0}^{x} f_y(s,y(s,x_0,y_0,\lambda),\lambda)\mathrm{d}s} \int_{x_0}^{x} f_\lambda(x,y(x,x_0,y_0,\lambda),\lambda) \cdot$$

$$e^{-\int_{x_0}^{x} f_y(s,y(s,x_0,y_0,\lambda),\lambda)\mathrm{d}s} \mathrm{d}x.$$

（2）（a）方程为非齐次线性方程，有解 $y(x,0,0,\lambda) = e^{-\lambda x}\int_0^x e^{\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda x})$. 于是有

$$\frac{\partial y(x,0,0,\lambda)}{\partial\lambda} = -\frac{1}{\lambda^2}(1-e^{-\lambda x}) + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}x = \frac{e^{-\lambda x}(1+\lambda x)-1}{\lambda^2}.$$

用洛必达法则求 $\lambda=0$ 时$\frac{\partial y(x,0,0,\lambda)}{\partial\lambda}$的值，有

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\partial y(x,0,0,\lambda)}{\partial\lambda} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{e^{-\lambda x}(1+\lambda x)-1}{\lambda^2} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{-\lambda x^2 e^{-\lambda x}}{2\lambda}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\frac{-x^2 e^{-\lambda x}}{2} = -\frac{x^2}{2}.$$

或利用 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$有

$$\frac{\partial y(x,0,0,\lambda)}{\partial\lambda} = -\frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{x}{\lambda}\right)\left[1-\lambda x+\frac{\lambda^2x^2}{2} - \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-\lambda x)^n}{n!}\right]$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{\lambda x^3}{2} - \left(\frac{x}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\right)\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-\lambda x)^n}{n!}.$$

可得$\left.\frac{\partial y(x,0,0,\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} = -\frac{x^2}{2}$.

（b）解 $y(x,0,0,\lambda)$存在且可分离变量解之. 直接由解对 λ 的微分公式

$$\frac{\partial y(x,0,0,\lambda)}{\partial\lambda} = e^{\int_0^x\sqrt{1-\lambda^2s^2}\mathrm{d}s}\int_0^x \frac{-\lambda x^2 y(x,0,0,\lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2x^2}} e^{-\int_0^x\sqrt{1-\lambda^2s^2}\mathrm{d}s}\mathrm{d}x$$

$$= -\lambda e^{\int_0^x \sqrt{1-\lambda^2 s^2}ds}\int_0^x \frac{x^2 y(x,0,0,\lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2 x^2}} e^{-\int_0^x \sqrt{1-\lambda^2 s^2}ds}dx,$$

知对 $\lambda=0$ 有 $\left.\frac{\partial y(x,0,0,\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0}=0.$

8. （1）p－判别法. 联立 $xp^2-2yp+4x=0, 2xp-2y=0$. 消去 p 得 $y=\pm 2x$. 此亦为方程的解,故为奇解.

c－判别法. 方程有通解（[§2.3.1－8(2), §2.4.2－8(2)]）$y=cx^2+\frac{1}{c}$. 联立通解及其对 c 求导式 $x^2-\frac{1}{c^2}=0$,消去 c 得 $y=\pm 2x$. 将 $y=\pm 2x, y'=\pm 2$ 代入原方程知 $y=\pm 2x$ 亦为其解,故是奇解.

（2）方程化为 $4x^2yp^2-(4xy^2+2)p+y^3=0$,与 $8x^2yp-4xy^2-2=0$ 联立消去 p 得

$$4x^2y\left(\frac{2xy^2+1}{4x^2y}\right)^2-2(2xy^2+1)\frac{2xy^2+1}{4x^2y}+y^3=0,$$

$$-(2xy^2+1)^2+4x^2y^4=0, 4xy^2+1=0.$$

将 $4xy^2+1=0$ 对 x 求导,有 $8xyy'+4y^2=0$,即 $2xy'=-y$,于是原方程左端有 $y(y-2xy')^2=4y^3=-\frac{y}{x}=2y'$,知 $4xy^2+1=0$ 亦是方程的解,故为奇解.

（3）$yp^2+1=0, 2yp=0$. 因 $y=0, p=0$ 均非方程的解,故方程不存在奇解.

（4）$xp^3-2yp^2-16x^2=0$ 与 $3xp^2-4yp=p(3xp-4y)=0$ 即 $p=\frac{4y}{3x}$ 联立得

$$xp^3-2yp^2-16x^2=\frac{64y^3}{27x^2}-\frac{32y^3}{9x^2}-16x^2=-\frac{32y^3}{27x^2}-16x^2=0,$$

$$2y^3+27x^4=0.$$

将 $2y^3+27x^4=0$ 对 x 求导得 $6y^2y'+108x^3=0, y'=-\frac{18x^3}{y^2}$. 即

$$xy'^3 - 2yy'^2 = -\frac{18^3x^{10}}{y^6} - \frac{2\cdot 18^2x^6}{y^3} = -\frac{4\cdot 18^3x^{10}}{27^2x^8} + \frac{4\cdot 18^2x^6}{27x^4}$$
$$= -32x^2 + 48x^2 = 16x^2.$$

知 $2y^3 + 27x^4 = 0$ 是方程的解,故为奇解.

c - 判别法. 方程有通解([§2.3.1 - 8(3), §2.4.2 - 8(3)]) $c^3x^2 - c^2y - 2 = 0$. 求奇解具体见下面第 9 题(2).

9. (1) $xy = cy - c^2, y - 2c = 0$. 用 $c = \frac{y}{2}$ 代入前式得 $xy = \frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{4} = \frac{y^2}{4}$,解得 $y(4x-y) = 0$. 即 $y = 0, y = 4x$. 对 x 求导解族(代数)方程,消去 c 可推导出解族微分方程 $x^2y'^2 + (2x-y)yy' + y^2 = 0$. $y = 0, y = 4x$ 均为微分方程的解,故它们为解族的包络,微分方程的奇解.

(2) $c^3x^2 - c^2y - 2 = 0, 3c^2x^2 - 2cy = 0$. 后式有 $c = \frac{2y}{3x^2}$,代入前式可得 $c^3x^2 - c^2y - 2 = \frac{8y^3}{27x^6}x^2 - \frac{4y^2}{9x^4}y - 2 = -\frac{4y^2}{27x^4} - 2 = 0$,包络为 $2y^2 + 27x^4 = 0$. 可判断它是解族方程 $xy'^3 - 2yy'^2 - 16x^2 = 0$([§2.3.1 - 7(5), §2.4.2 - 7(5)])的解,故是奇解.

(3) $y = c\left(x - \frac{1}{c}\right)^3, \left(x - \frac{1}{c}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{c}\right)^2 \cdot \frac{1}{c} = \left(x - \frac{1}{c}\right)^2\left(x + \frac{2}{c}\right) = 0$. 对后式有 $x = \frac{1}{c}, y = \frac{1}{x}(x-x)^3 = 0$ 或 $x = -\frac{2}{c}, y = -\frac{2}{x}\left(x + \frac{x}{2}\right)^3 = -\frac{27}{4}x^2$. 因解族当 $x \to \pm\infty$ 时 y 不趋于有限值,故原方程没有奇点,$y = 0, y = -\frac{27}{4}x^2$ 均是奇解. 实际上,微分方程为 $(xy' - 3y)y'^2 = 27y^2$.

(4)
$$c^3 - 2c^2x + cx^2 - y = 0, \qquad ①$$
$$3c^2 - 4cx + x^2 = 0. \qquad ②$$

3① $-c$②得

$$-2c^2x+2cx^2-3y=0, \quad ③$$

3③ $+2x$②得

$$-2cx^2+2x^3-9y=0, c=\frac{2x^3-9y}{2x^2}.$$

将求得的 c 代入②可化简为 $y(4x^3-27y)=0$. 奇解为 $y=0, y=\frac{4}{27}x^3$. 微分方程为 $y'^3+2(xy'-2y)^2-2(xy'-2y)xy'=0$.

10. 泰勒级数展开式为 $y(x_{n+1})=y(x_n+h)=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(x_n)+\cdots$, 其中 $y^{(k+1)}=f^{(k)}(x,y(x))$, $f^{(k)}=\left[\frac{\partial}{\partial x}+f(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\right]f^{(k-1)}$. 二阶公式为 $y_{n+1}=y_n+hf_n+h^2[f_x(x_n,y_n)+f_y(x_n,y_n)f_n]/2$. 对 $f(x,y)=x(1+y^2)^{-1}$ 有 $f_x=(1+y^2)^{-1}$, $ff_y=-2x^2y(1+y^2)^{-3}$. 取 $x_n=nh$, 二阶泰勒级数展开法就是从 $y_0=1$ 开始的递推公式 $y_{n+1}=y_n+\frac{nh^2}{1+y_n^2}+\frac{h^2}{2!}\left[\frac{1}{1+y_n^2}-\frac{2n^2h^2y_n}{(1+y_n^2)^3}\right]$.

§3.4.3 习题 3.1 及其解答

1. 求方程 $\frac{dy}{dx}=x+y^2$ 通过点 $(0,0)$ 的第三次近似解.

解 令 $\varphi_0(x)=0$, 于是

$$\varphi_1(x)=y_0+\int_0^x[x+\varphi_0^2(x)]dx=0+\int_0^x(x+0)dx=\frac{1}{2}x^2,$$

$$\varphi_2(x)=y_0+\int_0^x[x+\varphi_1^2(x)]dx=0+\int_0^x\left(x+\frac{1}{4}x^4\right)dx=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{20}x^5,$$

$$\varphi_3(x)=y_0+\int_0^x[x+\varphi_2^2(x)]dx=0+\int_0^x\left[x+\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{20}x^5\right)^2\right]dx$$

$$=\int_0^x\left(x+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{20}x^7+\frac{1}{400}x^{10}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{160}x^8+\frac{1}{4\,400}x^{11}.$$

即得方程的第三次近似解为

$$\varphi_3(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{160}x^8+\frac{1}{4\,400}x^{11}.$$

2. 求方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x-y^2$ 通过点(1,0)的第二次近似解.

提示 令 $\varphi_0(x)=0$,于是

$$\varphi_1(x)=y_0+\int_1^x[x-\varphi_0^2(x)]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2},$$

$$\varphi_2(x)=y_0+\int_1^x[x-\varphi_1^2(x)]\mathrm{d}x=-\frac{11}{30}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{20}x^5.$$

3. 求初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2-y^2, & R:|x+1|\leqslant 1,|y|\leqslant 1,\\ y(-1)=0\end{cases}$$

的解的存在区间,并求第二次近似解,给出在解的存在区间的误差估计.

解 因在定义域 R 内方程右端连续可微,由 $M=\max\limits_{(x,y)\in R}|x^2-y^2|=4$ 及 $b=1$,知未计及延拓时解的存在区间 $|x+1|\leqslant\frac{b}{M}=\frac{1}{4}$.

令 $y_0(x)=0$,于是

$$y_1(x)=y_0+\int_{-1}^x[x^2-y_0^2(x)]\mathrm{d}x=0+\int_{-1}^x(x^2-0)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3},$$

$$y_2(x)=y_0+\int_{-1}^x[x^2-y_1^2(x)]\mathrm{d}x=0+\int_{-1}^x\left(x^2-\frac{1}{9}x^6-\frac{2}{9}x^3-\frac{1}{9}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{63}x^7-\frac{1}{18}x^4-\frac{1}{9}x+\frac{11}{42}.$$

即第二次近似解为 $y_2(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{63}x^7-\frac{1}{18}x^4-\frac{1}{9}x+\frac{11}{42}.$

由 $M=4$ 及 $L=\max\limits_{(x,y)\in R}\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|\leqslant\max\limits_{(x,y)\in R}|-2y|=2$，且 h 取 $a=1$ 及 $\dfrac{b}{M}=\dfrac{1}{4}$ 中最小者，即 $h=\dfrac{1}{4}$，可见在区间 $|x+1|\leqslant 1$ 内第二次近似解的误差估计为

$$|y(x)-y_2(x)|\leqslant\frac{ML^2}{3!}h^3=\frac{4\times 2^2}{6}\times\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{24}.$$

注 当在定义域 R 内方程右端连续可微，初值亦在定义域 R 内时，根据存在唯一性定理，初值问题的解在整个定义域 R 内存在. 但对具体的解而言，使解在域 R 内存在的 x 的区间会较窄小，这里求出的 x 的存在区间由[§3.1－定理 1]确定，真正的存在区间可通过延拓适当扩大，使 x 或解 y 到达域 R 的边界.

4. 讨论方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$$

在怎样的区域中满足解的存在唯一性定理的条件，并求通过点 $(0,0)$ 的一切解.

解 记 $f(x,y)=\dfrac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$，$G=\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty,\ |y|\geqslant\alpha\}$（其中 α 为任意正常数），在域 G 上 $f(x,y)$ 连续且

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=\frac{3}{2}\left|y_1^{\frac{1}{3}}-y_2^{\frac{1}{3}}\right|=\frac{3}{2}\left|\frac{y_1-y_2}{y_1^{\frac{2}{3}}+y_1^{\frac{1}{3}}y_2^{\frac{1}{3}}+y_2^{\frac{2}{3}}}\right|$$

$$\leqslant\frac{3}{2}\frac{|y_1-y_2|}{3\alpha^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{2}\alpha^{-\frac{2}{3}}|y_1-y_2|,$$

即 $f(x,y)$ 在域 G 上满足利普希茨常数为 $L=\dfrac{1}{2}\alpha^{-\frac{2}{3}}$ 的利普希茨条件，故方程在域 G 上满足解的存在唯一性定理的条件. 由 α 的任意性知在 $y\neq 0$ 的区域中方程的解存在唯一.

$y\neq 0$ 时方程有解

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{y^{\frac{1}{3}}}=\mathrm{d}x, y^{\frac{2}{3}}=x-c,\ |y|=(x-c)^{\frac{3}{2}}(x\geqslant c),$$

其中 c 为任意常数. 此外,方程还有解 $y=0$.

由通过(0,0)的一切解可写为

$$|y|=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ (x-c)^{\frac{3}{2}}, & x>0,\end{cases}$$

其中 $c\geqslant 0$ 为任意常数(含特解 $y=0$).

5. 叙述并用逐步逼近法证明关于一阶线性微分方程的解的存在唯一性定理.

提示 设一阶线性微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y+Q(x). \qquad (*)$$

存在唯一性定理 如果 $P(x)$,$Q(x)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续,则对区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的任何数 x_0 及任一初值 y_0,方程(*)存在唯一解 $y(x)$,定义于整个区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上,连续且满足初始条件 $y(x_0)=y_0$.

证明与[书 §3.1.1 - 定理 1]中的证明相同. 其中设 $|P(x)|\leqslant L$, $|Q(x)|\leqslant K$, $a\leqslant x\leqslant b$. 取 $M=L|y_0|+K$. 收敛性分 $x_0\leqslant x\leqslant b$ 和 $a\leqslant x\leqslant x_0$ 两种情形分别证明.

6. 证明格朗沃尔(Gronwall)不等式:

设 K 为非负常数,$f(t)$,$g(t)$ 为在区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上的连续非负函数,且满足不等式

$$f(t)\leqslant K+\int_\alpha^t f(s)g(s)\mathrm{d}s, \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

则有

$$f(t)\leqslant K\exp\left[\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s\right], \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

并由此证明定理 1 的命题 5.

格朗沃尔不等式证明 先证 $K>0$ 时不等式成立. 再取正 $K\to$

0，可得当 $K=0$ 时 $f(t)\equiv 0$. 于是不等式对非负 K 均成立. $K>0$ 时不等式成立的证明有：

证 1 逐次逼近方法 令

$$\begin{cases} f_0(t) = K, \\ f_n(t) \leqslant K + \int_\alpha^t f_{n-1}(s)g(s)\,\mathrm{d}s \quad (n=1,2,\cdots). \end{cases}$$

现用数学归纳法证明 $f_{n+1}(t)-f_n(t)\leqslant \frac{K}{(n+1)!}\left[\int_\alpha^t g(s)\,\mathrm{d}s\right]^{n+1}$. 显然，当 $n=0$ 时成立. 设 $n=m-1$ 时成立，则

$$\begin{aligned} f_{m+1}(t)-f_m(t) &\leqslant \int_\alpha^t [f_m(s)-f_{m-1}(s)]g(s)\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_\alpha^t \frac{K}{m!}\left[\int_\alpha^s g(s)\,\mathrm{d}s\right]^m g(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{K}{m!}\int_\alpha^t \left[\int_\alpha^s g(s)\,\mathrm{d}s\right]^m \mathrm{d}\left[\int_\alpha^s g(s)\,\mathrm{d}s\right] \\ &= \frac{K}{m!\ (m+1)}\left[\int_\alpha^s g(s)\,\mathrm{d}s\right]^{m+1} \\ &= \frac{K}{(m+1)!}\left[\int_\alpha^s g(s)\,\mathrm{d}s\right]^{m+1}, \end{aligned}$$

即对任意 n 均成立 $f_{n+1}(t)-f_n(t)\leqslant \frac{K}{(n+1)!}\left[\int_\alpha^t g(s)\,\mathrm{d}s\right]^{n+1}$. 从而 $f_n(t)=\sum_{k=0}^n \frac{K}{k!}\left[\int_\alpha^t g(s)\,\mathrm{d}s\right]^k$.

设 $\left|\int_\alpha^\beta g(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant M$. 于是对 $f_n(t)=f_0(t)+\sum_{k=1}^n[f_k(t)-f_{k-1}(t)]$ 有

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(t)-f_n(t)| &\leqslant \frac{K}{(n+1)!}\left(\left|\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s\right|\right)^{n+1} \\ &= \frac{K}{(n+1)!}M^{n+1}\leqslant K\mathrm{e}^M, \end{aligned}$$

即在区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上 $\{f_n(t)\}$ 一致收敛. 当 $n\to+\infty$ 时有

$$f(t) \equiv \lim_{n\to\infty} f_n(t) \leqslant K + \int_\alpha^t \lim_{n\to\infty} f_{n-1}(s)g(s)\,\mathrm{d}s,$$

$$f(t) \leqslant K + \int_\alpha^t f(s)g(s)\,\mathrm{d}s,$$

且 $f(t) \leqslant K \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\int_\alpha^t g(s)\,\mathrm{d}s\right]^k = K\exp\left[\int_\alpha^t g(s)\,\mathrm{d}s\right].$

证 2 不等式方法. 令 $R(t) = \int_\alpha^t f(s)g(s)\,\mathrm{d}s$, 由 $g(t) \geqslant 0, \alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 有

$$R'(t) = f(t)g(t) \leqslant Kg(t) + R(t)g(t),$$

即

$$R'(t) - R(t)g(t) \leqslant Kg(t).$$

两边乘以 $\exp\left[-\int_\alpha^t g(u)\,\mathrm{d}u\right]$ 后可化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\exp\left[-\int_\alpha^t g(u)\,\mathrm{d}u\right]R(t)\right] \leqslant Kg(t)\exp\left[-\int_\alpha^t g(u)\,\mathrm{d}u\right].$$

从 α 到 t 积分得

$$\exp\left[-\int_\alpha^t g(u)\,\mathrm{d}u\right]R(t) \leqslant K\int_\alpha^t g(s)\exp\left[-\int_\alpha^s g(u)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}s$$

$$= K - K\exp\left[-\int_\alpha^t g(u)\,\mathrm{d}u\right].$$

于是两边乘以 $\exp\left[\int_\alpha^t g(u)\,\mathrm{d}u\right]$ 后得

$$R(t) \leqslant K\exp\left[\int_\alpha^s g(u)\,\mathrm{d}u\right] - K,$$

即

$$f(t) \leqslant K + R(t) \leqslant K\exp\left[\int_\alpha^s g(u)\,\mathrm{d}u\right].$$

证得

$$f(t) \leqslant K\exp\left[\int_\alpha^t g(s)\,\mathrm{d}s\right], \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

定理 1 命题 5 证明 定理 1 的命题 5 要证当 $\varphi(t), \psi(t)$ 均满

足积分方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y)\mathrm{d}x,x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$$

时应有 $\varphi(x)=\psi(x)(x_0\leqslant x\leqslant x_0+h)$. 由利普希茨条件

$$|f(x,\varphi(x))-f(x,\psi(x))|\leqslant L|\varphi(x)-\psi(x)|(x_0\leqslant x\leqslant x_0+h)$$

得

$$\begin{aligned}|\varphi(x)-\psi(x)|&\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(x,\varphi(x))-f(x,\psi(x))|\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{x_0}^{x}L|\varphi(x)-\psi(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

利用格朗沃尔不等式,由 $K=0$,当 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 时有

$$0\leqslant|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant K\exp\left[\int_{x_0}^{x}L\mathrm{d}x\right]=0.$$

于是 $\varphi(x)=\psi(x)(x_0\leqslant x\leqslant x_0+h)$.

7. 假设函数 $f(x,y)$ 于 (x_0,y_0) 的邻域内是 y 的不增函数,试证方程(3.1)满足条件 $y(x_0)=y_0$ 的解于 $x\geqslant x_0$ 一侧最多只有一个.

证 设方程有两个解满足条件,则存在区间 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 使得

$$\varphi(x_0)=\psi(x_0),\varphi(x)\leqslant\psi(x)(x_0\leqslant x\leqslant x_0+h).$$

因 $f(x,y)$ 是 y 的不增函数,即

$$f(x,\varphi(x))\geqslant f(x,\psi(x)),x_0\leqslant x\leqslant x_0+h.$$

于是

$$0\leqslant\psi(x)-\varphi(x)=\int_{x_0}^{x}[f(x,\psi(x))-f(x,\varphi(x))]\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

这只有 $\varphi(x)\equiv\psi(x)(x_0\leqslant x\leqslant x_0+h)$,即方程于 $x\geqslant x_0$ 一侧最多只有一个解.

8. 如果函数 $f(x,y)$ 于带域 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 上连续且关于 y 满足利普希茨条件,则方程(3.1)满足条件 $y(x_0)=y_0$ 的解于整个区间 $[\alpha,\beta]$ 上存在且唯一.

证 设 $M=\max\limits_{x\in[\alpha,\beta]}|f(x,y_0)|$, $h=a=\beta-\alpha$, $b=Mh$ 及有某常数 L 使得在域 $R=\{(x,y)\mid\alpha\leqslant x\leqslant\beta,|y-y_0|\leqslant b\}$ 中有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|,(x,y_1),(x,y_2)\in R.$$

构造逐步逼近函数序列

$$\begin{cases}\varphi_0(x)=y_0,\\ \varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi_{n-1}(x))\mathrm{d}x,\end{cases}\alpha\leqslant x\leqslant\beta,n=1,2,\cdots.$$

因

$$|\varphi_1(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x}f(x,y_0)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(x,y_0)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant M(x-x_0)\leqslant Mh\leqslant b.$$

可证

$$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|\leqslant\frac{M}{n!}L^{n-1}(\beta-\alpha)^n.$$

事实上,有

$$\begin{aligned}|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)|&\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(x,\varphi_n(x))-f(x,\varphi_{n-1}(x))|\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}L|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}\frac{M}{n!}L^{n-1}|x-x_0|^n\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\frac{M}{(n+1)!}L^n|x-x_0|^{n+1}\\&\leqslant\frac{M}{(n+1)!}L^n(\beta-\alpha)^{n+1}.\end{aligned}$$

因级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{M}{k!}L^{k-1}(\beta-\alpha)^k$ 收敛,知级数

$$\varphi_n(x)=\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{n}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)]$$

在区间$[\alpha,\beta]$一致收敛. 于是存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$,它在区

间$[\alpha,\beta]$连续. 且

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi_{n-1}(x))\mathrm{d}x$$
$$=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\lim_{n\to\infty}\varphi_{n-1}(x))\mathrm{d}x$$
$$=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi(x))\mathrm{d}x.$$

故 $\varphi(x)$是积分方程也就是微分方程的解.

设 $\varphi(x),\psi(x)$均满足积分方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y)\mathrm{d}x,\alpha\leqslant x_0,x\leqslant\beta.$$

当 $x\geqslant x_0$ 时利用格朗沃尔不等式,由

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(s,\varphi(s))-f(s,\psi(s))|\mathrm{d}s$$
$$\leqslant\int_{x_0}^{x}L|\varphi(s)-\psi(s)|\mathrm{d}s$$

有 $|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant 0$,即 $\varphi(x)\equiv\psi(x)(\alpha\leqslant x_0\leqslant x\leqslant\beta)$. 同样,当 $\alpha\leqslant x\leqslant x_0$ 时由

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant\int_{x}^{x_0}|f(s,\varphi(s))-f(s,\psi(s))|\mathrm{d}s$$
$$\leqslant\int_{x}^{x_0}L|\varphi(s)-\psi(s)|\mathrm{d}s.$$

有 $|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant 0$,即 $\varphi(x)\equiv\psi(x)(\alpha\leqslant x\leqslant x_0\leqslant\beta)$. 于是证明了积分方程也就是微分方程的解是唯一的.

9. 设$f(x)$定义于$-\infty<x<+\infty$,满足条件

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant N|x_1-x_2|,$$

其中 $N<1$,证明方程 $x=f(x)$存在唯一的一个解.

证 任取 x_0,作逐步逼近点列 $x_{n+1}=f(x_n)$. 因

$$x_n=x_0+\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1}),$$

而

$$|x_{k+1}-x_k| = |f(x_k)-f(x_{k-1})| \leqslant N|x_k - x_{k-1}| \leqslant \cdots \leqslant N^k |x_1 - x_0|,$$

即

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k - x_{k-1}| \leqslant |x_1 - x_0| \sum_{k=1}^{n} N^{k-1} = |x_1 - x_0| \frac{1-N^n}{1-N}.$$

由 $N<1$ 知级数

$$x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})$$

绝对收敛,即存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \tilde{x}$,即有

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = f(\lim_{n\to\infty} x_n), \tilde{x} = f(\tilde{x}),$$

即存在方程 $x=f(x)$ 的解 $\tilde{x}$.

由极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 的唯一性,知方程 $x=f(x)$ 的解 $\tilde{x}$ 是唯一的.

10. 给定积分方程

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \qquad (*)$$

其中 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的已知连续函数,$K(x,\xi)$ 是 $a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant \xi \leqslant b$ 上的已知连续函数,证明当 $|\lambda|$ 足够小时(λ 为常数),$(*)$ 在 $[a,b]$ 上存在唯一的连续解.

证 构造逐步逼近函数序列

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = f(x), \\ \varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi_{n-1}(s)\,\mathrm{d}s \quad (n=1,2,\cdots). \end{cases}$$

显然,对所有正整数 n,$\varphi_n(x)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上定义且连续.

下证函数序列 $\{\varphi_k(x)\}$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一致收敛. 考虑函数级数

$$\varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{\infty} [\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)], \quad a\leqslant x\leqslant b. \qquad ①$$

其部分和为

$$\varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{k} [\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)] = \varphi_k(x).$$

因此，证明函数序列$\{\varphi_k(x)\}$在区间$a\leqslant x\leqslant b$上一致收敛化为证明级数①在区间$a\leqslant x\leqslant b$上一致收敛. 因$f(x)$和$K(x,\xi)$在闭区间$a\leqslant x\leqslant b$及$a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant \xi\leqslant b$上连续，因此有

$$|f(x)|\leqslant L,\ |K(x,\xi)|\leqslant \tilde{K},a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant \xi\leqslant b.$$

取$M=|\lambda|\tilde{K}(b-a)$. 由(*)有

$$\begin{aligned}|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|=|\varphi_1(x)-f(x)|&\leqslant|\lambda|\int_a^b|K(x,s)||\varphi_0(s)|\mathrm{d}s\\&\leqslant|\lambda|\tilde{K}L(b-a)=LM.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|&\leqslant|\lambda|\int_a^b|K(x,s)||\varphi_1(s)-\varphi_0(s)|\mathrm{d}s\\&\leqslant|\lambda|\int_a^b\tilde{K}LM\mathrm{d}s=LM^2.\end{aligned}$$

现设成立

$$|\varphi_j(x)-\varphi_{j-1}(x)|\leqslant LM^j, \qquad ②$$

则由(*)，有

$$\begin{aligned}|\varphi_{j+1}(x)-\varphi_j(x)|&\leqslant\lambda\int_a^b|K(x,s)[\varphi_j(s)-\varphi_{j-1}(s)]|\mathrm{d}s\\&\leqslant\lambda\tilde{K}LM^j(b-a)=LM^{j+1}.\end{aligned}$$

由数学归纳法知，对一切j成立②. 可取$|\lambda|$足够小使得$M<\frac{1}{2}$. 从而级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}LM^k$收敛. 由函数项级数一致收敛的魏氏判别法，级数①在$a\leqslant x\leqslant b$上一致收敛. 因此函数序列$\{\varphi_k(x)\}$也在$a\leqslant x\leqslant b$上一致收敛. 设

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=\varphi(x).$$

因$\varphi(x)$是$\varphi_k(x)$的一致收敛极限函数，故$\varphi(x)$也在区间$a\leqslant x\leqslant b$上连续. 对逐步逼近函数序列，两边取极限，可得

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)\lim_{n\to\infty}\varphi_{n-1}(s)\mathrm{d}s,$$

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds,$$

即 $\varphi(x)$ 是积分方程(*)在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的连续解.

设 $\psi(x)$ 是积分方程(*)在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的另一个连续解,即

$$\psi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)\psi(s)\,ds.$$

因 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|\varphi(x)-\psi(x)|$ 存在且 $|\lambda|\tilde{K}(b-a)=M<\frac{1}{2}$,有

$$\begin{aligned}
\max_{a\leqslant x\leqslant b}|\varphi(x)-\psi(x)| &\leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b}\left(|\lambda|\int_a^b |K(x,s)|\,|\varphi(x)-\psi(x)|\,ds\right)\\
&\leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b}\left(|\lambda|\int_a^b \tilde{K}|\varphi(x)-\psi(x)|\,ds\right)\\
&\leqslant |\lambda|\tilde{K}(b-a)\max_{a\leqslant x\leqslant b}|\varphi(x)-\psi(x)|\\
&=M\max_{a\leqslant x\leqslant b}|\varphi(x)-\psi(x)|\\
&<\frac{1}{2}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|\varphi(x)-\psi(x)|.
\end{aligned}$$

可见 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|\varphi(x)-\psi(x)|=0$. 故 $\varphi(x)=\psi(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$. 因此(*)在 $[a,b]$ 上存在唯一的连续解.

§3.4.4 习题 3.3 及其解答

1. 假设函数 $f(x,y)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 都在区域 G 内连续,又 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 是方程(3.1)满足初值条件 $\varphi(x_0,x_0,y_0)=y_0$ 的解,试证 $\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ 存在且连续,并写出其表达式.

解 记初值为 $(x_0,y_0+\Delta y_0)$ 的解为 $y=\psi(x,x_0,y_0+\Delta y_0)$,其中 $|\Delta y_0|\leqslant\alpha$, α 足够小. 则有

$$\varphi=y_0+\int_{x_0}^x f(x,\varphi)\,dx,\quad \psi=y_0+\Delta y_0+\int_{x_0}^x f(x,\psi)\,dx.$$

于是

$$\psi-\varphi=\Delta y_0+\int_{x_0}^{x}[f(x,\psi)-f(x,\varphi)]\mathrm{d}x$$

$$=\Delta y_0+\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial f(x,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}(\psi-\varphi)\right]\mathrm{d}x,$$

其中 $0\leqslant\theta\leqslant1$. 由$\frac{\partial f}{\partial y}$及 φ,ψ 的连续性,有

$$\frac{\partial f(x,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}=\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r,$$

其中 r 有性质:$\Delta y_0\to0$ 时 $r\to0$,$\Delta y_0=0$ 时 $r=0$. 即对 $\Delta y_0\neq0$ 有

$$\frac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}=1+\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r\right]\frac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}\mathrm{d}x,$$

即 $z=\frac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}$是微分方程初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\left[\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r\right]z,\\ z(x_0)=1\end{cases}$$

的解,即

$$\frac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}=z=\exp\left\{\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r\right]\mathrm{d}x\right\}.$$

于是

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=\lim_{\Delta y_0\to0}\frac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}=\exp\left\{\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}\mathrm{d}x\right\},$$

它是 x,x_0,y_0 的连续函数.

2. 假设函数 $P(x)$和 $Q(x)$于区间$[\alpha,\beta]$上连续,$y=\varphi(x,x_0,y_0)$是方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y+Q(x)$$

的解,$\varphi(x_0,x_0,y_0)=y_0$. 试求$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0},\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$及$\frac{\partial\varphi}{\partial x}$,并从解的表达式出发,利用对参数求导数的方法,检验所得结果.

解 由$f(x,y)=P(x)y+Q(x)$及有关公式,可得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = -f(x_0, y_0)\exp\left[\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}\mathrm{d}x\right]$$

$$= -[P(x_0)y_0 + Q(x_0)]\exp\left[\int_{x_0}^{x} P(x)\mathrm{d}x\right],$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_0} = \exp\left[\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}\mathrm{d}x\right] = \exp\left[\int_{x_0}^{x} P(x)\mathrm{d}x\right],$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f(x, \varphi(x, x_0, y_0)) = P(x)\varphi(x, x_0, y_0) + Q(x).$$

因非齐次线性方程有解的表达式

$$y = \mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c\right],$$

于是

$$\varphi(x, x_0, y_0) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} P(x)\mathrm{d}x} + \int_{x_0}^{x} Q(s)\mathrm{e}^{\int_{s}^{x} P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}s.$$

直接对参数求导,此时

$$\frac{\partial \varphi(x, x_0, y_0)}{\partial x_0} = -P(x_0)y_0 \cdot \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} P(x)\mathrm{d}x} - Q(x_0)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} P(x)\mathrm{d}x}$$

$$= -[P(x_0)y_0 + Q(x_0)]\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} P(x)\mathrm{d}x},$$

$$\frac{\partial \varphi(x, x_0, y_0)}{\partial y_0} = \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} P(x)\mathrm{d}x},$$

$$\frac{\partial \varphi(x, x_0, y_0)}{\partial x} = P(x)y_0 \cdot \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} P(x)\mathrm{d}x} + Q(x) + \int_{x_0}^{x} Q(s)P(x)\mathrm{e}^{\int_{s}^{x} P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}s$$

$$= P(x)\left[y_0\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} P(x)\mathrm{d}x} + \int_{x_0}^{x} Q(s)\mathrm{e}^{\int_{s}^{x} P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}s\right] + Q(x)$$

$$= P(x)\varphi(x, x_0, y_0) + Q(x).$$

与直接应用公式相同.

3. 给定方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sin\frac{y}{x},$$

试求$\dfrac{\partial y(x, x_0, y_0)}{\partial x_0}$, $\dfrac{\partial y(x, x_0, y_0)}{\partial y_0}$在 $x_0 = 1, y_0 = 0$ 时的表达式.

提示 $\dfrac{\partial y}{\partial x_0} = -f(x_0,y_0)\exp\left[\int_{x_0}^{x}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x\right]=0,$

$$\frac{\partial y}{\partial y_0}=\exp\left[\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x\right]=\exp\left(\int_{x_0}^{x}\cos\frac{y}{x}\bigg|_{y=0}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\exp(\ln|x|-\ln|x_0|)=|x|.$$

4. 设 $y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda)$ 是初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin(\lambda xy),\varphi(x_0,x_0,y_0,\lambda)=y_0$$

的饱和解,这里 λ 是参数,求 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0},\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ 在 $(x,0,0,1)$ 处的表达式.

提示 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}=-f(x_0,y_0,\lambda)\exp\left[\int_{x_0}^{x}\dfrac{\partial f(x,\varphi,\lambda)}{\partial y}\mathrm{d}x\right]=0,$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=\exp\left[\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi,\lambda)}{\partial y}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\exp\left[\int_{x_0}^{x}\cos(\lambda x\varphi)\bigg|_{\varphi=0}\cdot\lambda x\mathrm{d}x\right]$$

$$=\exp\left[\frac{\lambda}{2}(x^2-x_0^2)\right]=\exp\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

§3.4.5 习题 3.4 及其解答

1. 解下列方程,并求奇解(如果存在的话):

(1) $y=2x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x^2\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^4.$

解 令 $p=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,得 $y=2xp+x^2p^4$ 及

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p=2p+2xp^4+(2x+4x^2p^3)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},$$

$$(1+2xp^3)\left(p+2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)=0.$$

有解

$$p^3=-\frac{1}{2x},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-(2x)^{-\frac{1}{3}},\mathrm{d}y=-(2x)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x,y+\frac{3}{4}(2x)^{\frac{2}{3}}=c$$

及

$$\frac{2\mathrm{d}p}{p}=-\frac{\mathrm{d}x}{x},\ln p^2=-\ln|x|+\tilde{c},x=\frac{c}{p^2}.$$

通解为 $y+\frac{3}{4}(2x)^{\frac{2}{3}}=c$ 或

$$\begin{cases}x=\dfrac{c}{p^2},\\ y=\dfrac{2c}{p}+c^2,\end{cases}$$

其中 c 为任意常数,$p\neq 0$ 为参数. 由 $p=0$,还有解 $y=0$.

由上式可消去 p,得 $\frac{c}{x}=p^2=\frac{4c^2}{(y-c^2)^2}$,$(y-c^2)^2=4cx$,这是通解的另一形式. p – 判别曲线为

$$\begin{cases}y=2xp+x^2p^4,\\ 2x+4x^2p^3=0,\end{cases}$$

即 $p\neq 0$ 时

$$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2p^3},\\ y=-\dfrac{3}{4p^2}.\end{cases}$$

可检验它是方程的解,且不包含在通解中:对任一点 $P\left(-\frac{1}{2p^3},-\frac{3}{4p^2}\right)(p\neq 0)$,取 $c=-\frac{1}{2p}$,便得通解中的一个解

$$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2p}\cdot\dfrac{1}{p^2},\\ y=-\dfrac{1}{2p}\cdot\dfrac{2}{p}+\left(\dfrac{1}{2p}\right)^2,\end{cases}$$

且在 P 点与其相切,故它是奇解.

(2) $x=y-\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$.

解 令 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，得 $x=y-p^2$ 及 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p=1+2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{p-1}{2p}$，

$\mathrm{d}x=\frac{2p}{p-1}\mathrm{d}p=\left(2+\frac{2}{p-1}\right)\mathrm{d}p$，积分得 $x=2p+\ln(p-1)^2+c$. 通解为

$$\begin{cases}x=2p+\ln(p-1)^2+c,\\ y=p^2+2p+\ln(p-1)^2+c,\end{cases}$$

其中 c 为任意常数，p 为参数. p 方程还有解 $p=1$ 即 $y=x+1$.

p - 判别曲线为

$$\begin{cases}y=x+p^2,\\ 2p=0,\end{cases}$$

即 $y=x$. 因 $y=x$ 不是方程的解，故方程不存在奇解.

(3) $y=x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$，并画出积分曲线图.

提示 克莱罗微分方程. 通解 $y=cx+\sqrt{1+c^2}$. c - 判别曲线为联立 $y=cx+\sqrt{1+c^2}$ 和 $x=-\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$，有 $x^2=\frac{c^2}{1+c^2}$，$\frac{x^2}{1-x^2}=c^2$，$c=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$，即 $y=-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{1-x^2}$. 可检验 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是方程的解，故是奇解. 积分曲线图如图 3.11.

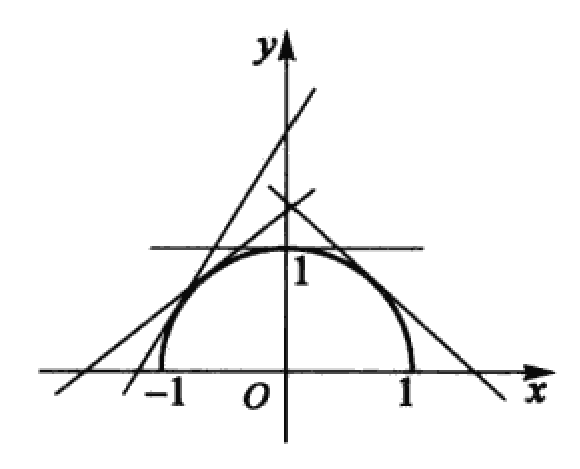


图 3.11 $y=xy'+\sqrt{1+y'^2}$ 积分曲线图

(4) $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=0$.

提示 克莱罗微分方程.通解 $y=cx+c^2$. c－判别曲线为

$$\begin{cases} y=cx+c^2, \\ x+2c=0, \end{cases}$$

即

$$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{x^2}{4}, 4y+x^2=0.$$

可检验 $4y+x^2=0$ 是方程的解,故是奇解.

(5) $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=0.$

提示 令 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,得 $y=2xp+p^2$,取导数得线性方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}=-\frac{2x}{p}-2$. 有解 $x=-\frac{2}{3}p+\frac{c}{p^2}$. 通解为 $x=-\frac{2}{3}p+\frac{c}{p^2}, y=\frac{2c}{p}-\frac{1}{3}p^2$. p－判别曲线 $y=2xp+p^2, 2x+2p=0$,即 $y=-x^2$ 不是方程的解,方程没有奇解.

(6) $x\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3-y\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-1=0.$

提示 令 $p=y'$,方程化为克莱罗方程 $y=xp-p^{-2}$. 通解 $y=xc-c^{-2}$, c－判别曲线 $x=-2c^{-3}, y=-3c^{-2}$,解得 $4y^3+27x^2=0$. 可检验 $4y^3+27x^2=0$ 是方程的解,故是奇解.

(7) $y=x\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2.$

提示 化为 $y=x(1+p)+p^2$,取导数得线性方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}=-x-2p$. 通解为 $x=c\mathrm{e}^{-p}-2p+2, y=c(1+p)\mathrm{e}^{-p}-p^2+2$. 由 p－判别曲线 $y=x(1+p)+p^2, x+2p=0$,得 $y=x-\frac{1}{4}x^2$. 因 $y=x-\frac{1}{4}x^2$ 不是方程的解,故方程没有奇解.

(8) $x\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-(x-a)^2=0$($a$ 为常数).

提示 方程可化为 $\mathrm{d}y=\frac{x-a}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=(x^{\frac{1}{2}}-ax^{-\frac{1}{2}})\mathrm{d}x$. 解得 $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2ax^{\frac{1}{2}}=y+c$. 通解为 $4x(x-3a)^2=9(y+c)^2$. 由 p - 判别曲线 $xp^2-(x-a)^2=0, 2xp=0$ 得 $x=a$. 它不是方程的解，故方程没有奇解.

(9) $y=2x+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{3}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3$.

提示 化为 $y=2x+p-\frac{1}{3}p^3$, $\mathrm{d}x=\frac{1-p^2}{p-2}\mathrm{d}p=\left(-p-2-\frac{3}{p-2}\right)\mathrm{d}p$，通解 $x=-\frac{1}{2}(p+2)^2-3\ln|p-2|+c, y=-\frac{1}{3}p^3-p^2-3p-4-6\ln|p-2|+2c$. 另还有 $p=2, y=2x-\frac{2}{3}$，也是解. 由 p - 判别曲线 $y=2x+p-\frac{1}{3}p^3, 1-p^2=0$ 得 $y=2x\pm\frac{2}{3}$，检验奇解为 $y=2x-\frac{2}{3}$.

(10) $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+(x+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=0$.

提示 有 $y=(x+1)p+p^2, (x+1+2p)p'=0$,

$$p'=0, p=c, y=(x+1)c+c^2.$$

由 p - 判别曲线 $y=(x+1)p+p^2, x+1+2p=0$ 得 $4y+(x+1)^2=0$，它是奇解.

2. 求下列曲线族的包络，并绘出图形：

(1) $y=cx+c^2$.

解 由 c - 判别曲线 $y=cx+c^2, x+2c=0$ 消去 c，得包络 $4y+x^2=0$. 积分曲线图如图 3.12.

(2) $c^2y+cx^2-1=0$.

提示 由 $c^2y+cx^2-1=0, 2cy+x^2=0$，得 $x^4+4y=0$. 见图

3.13.

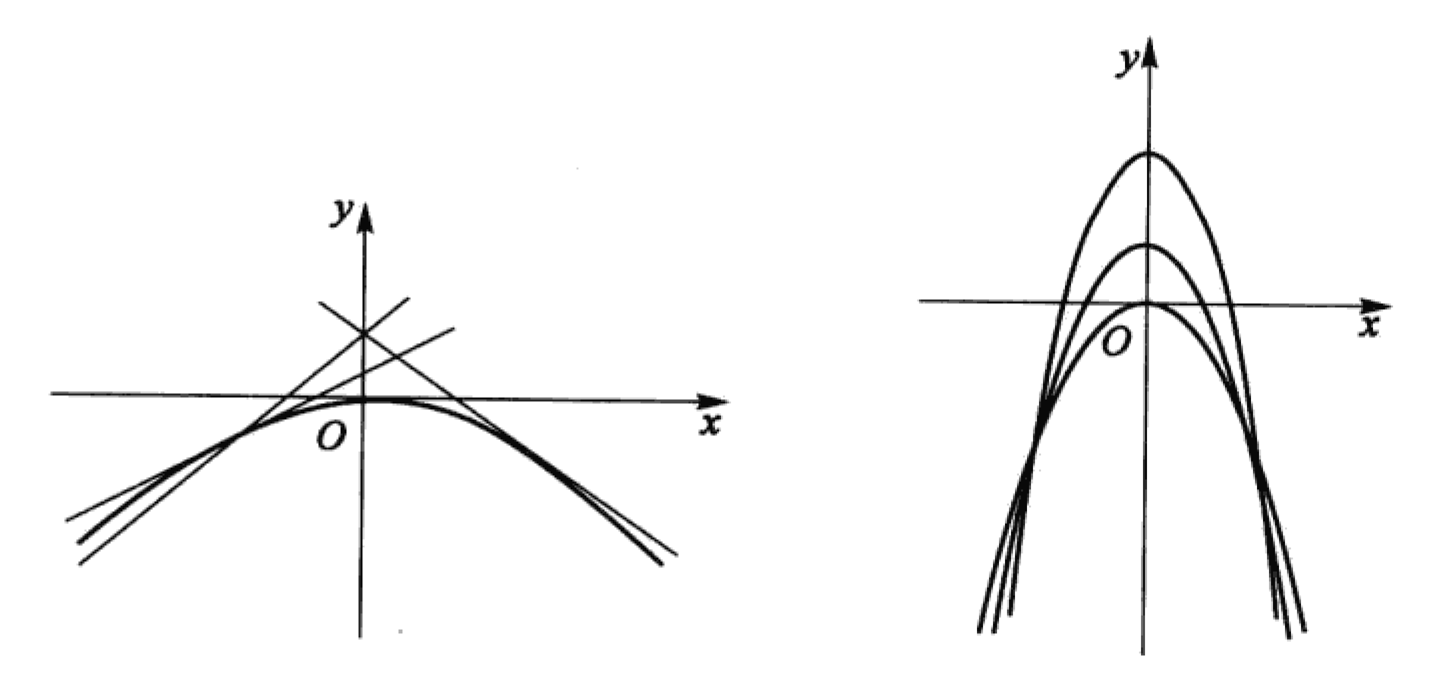


图 3.12　曲线族 $y=cx+c^2$ 的包络　图 3.13　曲线族 $c^2y+cx^2-1=0$ 的包络

(3) $(x-c)^2+(y-c)^2=4$.

提示　由 $(x-c)^2+(y-c)^2=4, 2c=x+y$，得 $(x-y)^2=8$. 见图 3.14.

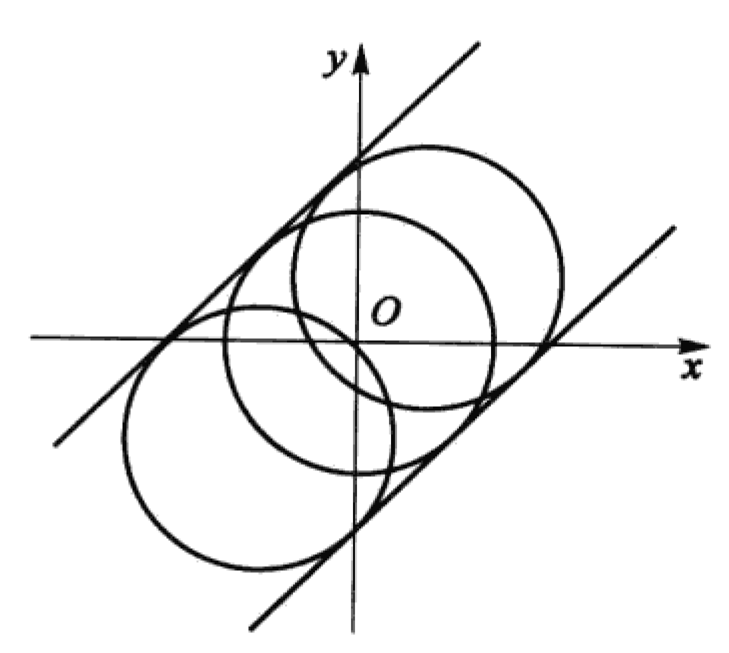


图3.14　曲线族 $(x-c)^2+(y-c)^2=4$ 的包络

(4) $(x-c)^2+y^2=4c$.

提示　由 $(x-c)^2+y^2=4c, c=2+x$，得 $y^2=4(x+1)$. 见图 3.15.

3. 求一曲线，使它上面的每一点的切线截割坐标轴使两截距之和等于常数 a.

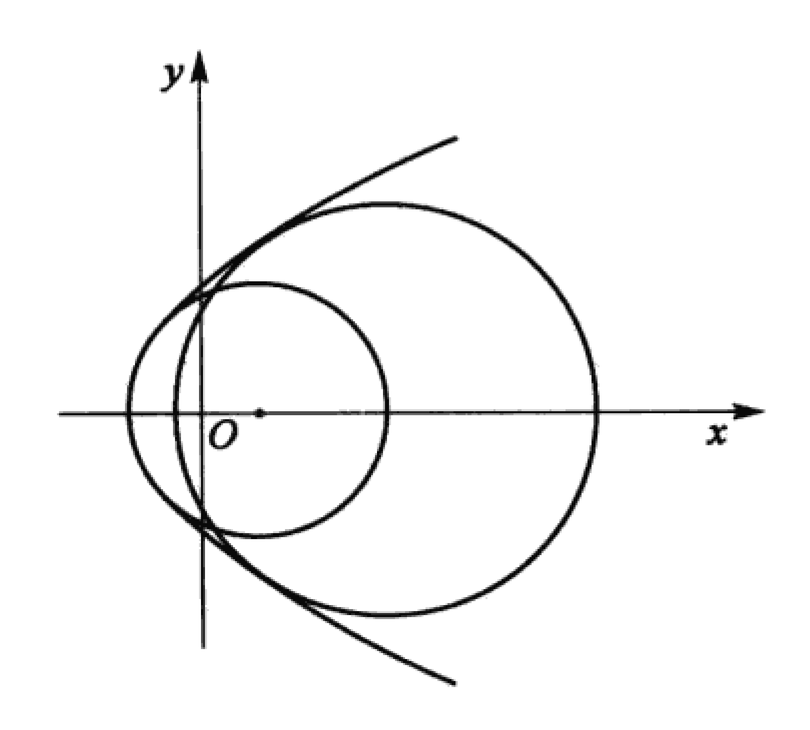


图 3.15　曲线族$(x-c)^2+y^2=4c$的包络

解　由[书习题 1.2 - 8(2)]及[§1.4.3 - 8(2)]，切线在 x 轴和 y 轴上的截距分别为 $\bar{X}=x-\frac{y}{y'}$ 和 $\bar{Y}=y-xy'$. 题设要求两截距之和等于常数 a，即

$$x-\frac{y}{y'}+y-xy'=a.$$

解得 $y=xy'+\frac{ay'}{y'-1}$. 令 $y'=p$，代入有 $y=xp+\frac{ap}{p-1}$. 此为克莱罗方程，有通解 $y=cx+\frac{ac}{c-1}$，其中 c 为不等于 0,1 的任意常数. 由 c - 判别曲线

$$y=cx+\frac{ac}{c-1},0=x-\frac{a}{(c-1)^2}.$$

将第 2 式中 $c-1=\pm\sqrt{\frac{a}{x}}$ 代入第 1 式，得 $y=cx+\frac{ac}{c-1}=a+x+(c-1)x+\frac{a}{c-1}=a+x\pm2\sqrt{ax}$. 即$(y-x-a)^2=4ax$. 检验$(y-x-a)^2=4ax$ 是方程的解，事实上，对 $y=xp+\frac{ap}{p-1}$ 求导有 $p=p+$

$xp' - \frac{ap'}{(p-1)^2}$，即 $\left[x - \frac{a}{(p-1)^2}\right]p' = 0$. 得 $p - 1 = \pm\sqrt{\frac{a}{x}}$. 代入方程有 $y = a + x \pm 2\sqrt{ax}$. 故 $(y - x - a)^2 = 4ax$ 是方程的解，它是奇解.

4. 试证：就克莱罗微分方程来说，p－判别曲线和方程通解的 c－判别曲线同样是方程通解的包络，从而为方程的奇解.

证 克莱罗微分方程 $y = xp + f(p)$，$p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 其 p－判别曲线为

$$\begin{cases} y = xp + f(p), \\ x + f'(p) = 0. \end{cases}$$

而方程对 x 求导得 $p = p + [x + f'(p)]p'$，$p' = 0$，$p = c$，通解为 $y = xc + f(c)$，其中 c 为任意常数. 由通解 $y = xc + f(c)$ 推导得其 c－判别曲线为

$$\begin{cases} y = xc + f(c), \\ x + f'(c) = 0. \end{cases}$$

它是方程通解的包络. 对任一 $p = p_0$ 值有点 (x_0, y_0) 对应，两者一致，均为方程的奇解.

§3.4.6 习题 3.5 及其解答

1. 从例 1 的欧拉方法、改进欧拉方法、2 阶龙格－库塔方法、4 阶龙格－库塔方法中选择一种方法，每一步从精确解出发计算出下一步，并求出其相对误差，同时与表中的积累误差比较.

解 欧拉方法

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n), x_n = x_0 + n \cdot h.$$

改进欧拉方法

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})].$$

2 阶龙格－库塔方法

$$y_{n+1}=y_n+hk_2, k_1=f(x_n,y_n), k_2=f\left(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}k_1\right).$$

4 阶龙格 - 库塔方法

$$\begin{cases} y_{i+1}=y_i+\dfrac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4), \\ k_1=f(x_i,y_i), \\ k_2=f\left(x_i+\dfrac{h}{2},y_i+\dfrac{h}{2}k_1\right), \\ k_3=f\left(x_i+\dfrac{h}{2},y_i+\dfrac{h}{2}k_2\right), \\ k_4=f(x_i+h,y_i+hk_3). \end{cases}$$

对方程

$$\frac{dy}{dx}=y(1-y^2), y(0)=2$$

有 $f(x_n,y_n)=y_n(1-y_n)$. 精确解为

$$y(x)=\sqrt{\frac{4e^{2x}}{4e^{2x}-3}}.$$

取 $h=0.01$,则可计算得欧拉方法、改进欧拉方法、2 阶龙格 - 库塔方法、4 阶龙格 - 库塔方法的逐步计算及其相对与积累误差.

(a) 相对误差(每步均以上一步精确值计算),见表 3.2(a).

(b) 积累误差(每步均以上一步同样方法计算. 再与精确值比较),见表 3.2(b).

2. 计算线性微分方程

$$y'=Ax, A=\begin{bmatrix} -0.1 & -49.9 & 0 \\ 0 & -50 & 0 \\ 0 & 70 & -120 \end{bmatrix}$$

的刚性比.

表 3.2(a) 相对误差

	精确解	欧拉方法		改进的欧拉方法		2 阶龙格 - 库塔方法		4 阶龙格 - 库塔方法	
x_i	y_i	y_i	误差	y_i	误差	y_i	误差	y_i	误差
0	2	2	0	2	0	2	0	2	0
0.1	1.6097	1.4000	-0.2097	1.6328	2.314E-2	1.6787	6.904E-2	1.6093	-3.222E-4
0.2	1.4181	1.3536	-6.454E-2	1.4253	7.188E-3	1.4326	1.448E-2	1.4181	2.455E-5
0.3	1.3037	1.2747	-2.894E-2	1.3066	2.919E-3	1.3087	4.995E-3	1.3037	1.186E-5
0.4	1.2281	1.2125	-1.565E-2	1.2296	1.447E-3	1.2304	2.232E-3	1.2281	5.386E-6
0.5	1.1752	1.1657	-9.478E-3	1.1760	8.180E-4	1.1763	1.168E-3	1.1752	2.747E-6
0.6	1.1366	1.1304	-6.182E-3	1.1371	5.063E-4	1.1373	6.797E-4	1.1366	1.552E-6
0.7	1.1077	1.1034	-4.249E-3	1.1080	3.342E-4	1.1081	4.266E-4	1.1077	9.498E-7
0.8	1.0856	1.0825	-3.033E-3	1.0858	2.313E-4	1.0858	2.832E-4	1.0856	6.179E-7
0.9	1.0684	1.0662	-2.229E-3	1.0686	1.659E-4	1.0686	1.962E-4	1.0684	4.214E-7
1.0	1.0550	1.0533	-1.674E-3	1.0551	1.223E-4	1.0551	1.405E-4	1.0550	2.981E-7

表 3.2(b)　积累误差

	精确解	欧拉方法		改进的欧拉方法		2 阶龙格 - 库塔方法		4 阶龙格 - 库塔方法	
x_i	y_i	y_i	误差	y_i	误差	y_i	误差	y_i	误差
0	2	2	0	2	0	2	0	2	0
0.1	1.6097	1.4000	-2.097E-1	1.6328	2.314E-2	1.6787	6.904E-2	1.6093	-3.222E-4
0.2	1.4181	1.2656	-1.525E-1	1.4388	2.073E-2	1.4759	5.778E-2	1.4179	-1.558E-4
0.3	1.3037	1.1894	-1.142E-1	1.3200	1.636E-2	1.3468	4.316E-2	1.3036	-8.728E-5
0.4	1.2281	1.1401	-8.802E-2	1.2409	1.276E-2	1.2604	3.223E-2	1.2281	-5.436E-5
0.5	1.1752	1.1059	-6.926E-2	1.1852	1.002E-2	1.1996	2.446E-2	1.1751	-3.625E-5
0.6	1.1366	1.0813	-5.533E-2	1.1445	7.961E-3	1.1554	1.886E-2	1.1366	-2.530E-5
0.7	1.1077	1.0630	-4.469E-2	1.1140	6.385E-3	1.1224	1.476E-2	1.1076	-1.822E-5
0.8	1.0856	1.0492	-3.640E-2	1.0907	5.164E-3	1.0972	1.168E-2	1.0855	-1.343E-5
0.9	1.0684	1.0386	-2.983E-2	1.0726	4.205E-3	1.0777	9.324E-3	1.0684	-1.006E-5
1.0	1.0550	1.0304	-2.455E-2	1.0584	3.443E-3	1.0625	7.499E-3	1.0550	-7.631E-6

注：表中误差 E-2 表示 10^{-2}.

解　特征方程为

$$\det(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda+0.1 & 49.9 & 0\\ 0 & \lambda+50 & 0\\ 0 & -70 & \lambda+120\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+0.1)(\lambda+50)(\lambda+120)=0.$$

其特征根为 $\lambda_1=-0.1,\lambda_2=-50,\lambda_3=-120$. 特征根绝对值的最大、最小之比为

$$\frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|}=\frac{|\lambda_3|}{|\lambda_1|}=\frac{120}{0.1}=1\ 200.$$

因此刚性比为 1 200.

3. 试用附录Ⅱ中的数学语言求解例 1.

解　见第十章[§10.2.1-(5), §10.3.1-(4), §10.4.1-(5), §10.5.1-(4)].

第四章　高阶微分方程

§4.1　内 容 提 要

§4.1.1　线性微分方程的一般理论

（1）基本概念

n 阶线性微分方程（线性方程）

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=f(t), \qquad ①$$

当函数 $f(t)\neq 0$ 时称为 n 阶非齐次线性微分方程（非齐次线性方程）. 而当函数 $f(t)\equiv 0$ 时称为 n 阶齐次线性微分方程（齐次线性方程）

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0. \qquad ②$$

朗斯基行列式　（函数 $x_i(t)\,(i=1,\cdots,k)$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 可微 $k-1$ 次）

$$W(t)=W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)]=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_k(t)\\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_k'(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{(k-1)}(t) & x_2^{(k-1)}(t) & \cdots & x_k^{(k-1)}(t)\end{vmatrix}.$$

线性相关　对定义在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的函数 $x_i(t)\,(i=1,\cdots,k)$，如存在不全为零的常数 $c_i\,(i=1,\cdots,k)$，使得在整个区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上恒成立

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)\equiv 0,$$

则称之为线性相关. 不是线性相关的函数 $x_i(t)(i=1,\cdots,k)$ 称为在所给区间上线性无关.

基本解组(基解组) n 阶齐次线性方程②的一组 n 个线性无关解.

(2) **齐次线性方程基本性质**

(a) **存在唯一性** 设 $a_i(t)(i=1,\cdots,n)$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上连续,则对任意 $t_0\in[a,b]$ 及任意初值 $x_0,x_0^{(1)},\cdots,x_0^{(n-1)}$,方程②存在唯一解 $x=\varphi(t)$ 定义于区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上,且满足初值条件

$$\varphi(t_0)=x_0,\frac{\mathrm{d}\varphi(t_0)}{\mathrm{d}t}=x_0^{(1)},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}\varphi(t_0)}{\mathrm{d}t^{n-1}}=x_0^{(n-1)}.$$

注 $\dfrac{\mathrm{d}^k\varphi(t_0)}{\mathrm{d}t^k}=\dfrac{\mathrm{d}^k\varphi(t)}{\mathrm{d}t^k}\bigg|_{t=t_0}.$

(b) **叠加原理** 方程②的 k 个解 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$ 的线性组合

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)$$

也是方程②的解,其中 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 为任意常数.

(c) **定理** 若函数 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上线性相关或无关,则在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上它们的朗斯基行列式 $W(t)\equiv 0$ 或恒不为零.

(d) 齐次线性方程②的基本解组的朗斯基行列式恒不为零.

(e) **通解结构** 设 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 是齐次线性方程②的一个基本解组,则齐次线性方程②的通解可表为

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t), \qquad ③$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为任意常数. 通解包括了齐次线性方程②的所有解.

(3) **非齐次线性方程基本性质**

(a) **存在唯一性** 设 $a_i(t)(i=1,\cdots,n)$ 和 $f(t)$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上连续,则对任意 $t_0\in[a,b]$ 及任意初值 $x_0,x_0^{(1)},\cdots,x_0^{(n-1)}$,方程

①存在唯一解 $x=\varphi(t)$ 定义于区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上,且满足初值条件

$$\varphi(t_0)=x_0,\frac{\mathrm{d}\varphi(t_0)}{\mathrm{d}t}=x_0^{(1)},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}\varphi(t_0)}{\mathrm{d}t^{n-1}}=x_0^{(n-1)}.$$

(b) 若 $x(t),\bar{x}(t)$ 分别为 n 阶线性方程①,②的解,则 $x(t)+\bar{x}(t)$ 也是方程①的解.若 $x_1(t),x_2(t)$ 均为方程①的解,则 $x_1(t)-x_2(t)$ 是方程②的解.

(c) **通解结构** 设 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 是齐次线性方程②的一个基本解组,$\bar{x}(t)$ 是方程①的某一解(特解),则非齐次线性方程①的通解可表为

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+\bar{x}(t),$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为任意常数.反之,对方程①的所有解,必存在常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$,表为上述形式.

(d) **常数变易法** 当已知方程②的一个基本解组 $x_1(t)$,$x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 时,可用常数变易法求得方程①的解

$$x=\sum_{i=1}^{n}\gamma_ix_i(t)+\sum_{i=1}^{n}x_i(t)\int\varphi_i(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $\varphi_i(t)$ 为视③中 $c_i=c_i(t)$ 时由 $n-1$ 次对 t 求导通解式③得到的 n 个方程

$$x_1(t)c_1'(t)+x_2(t)c_2'(t)+\cdots+x_n(t)c_n'(t)=0,$$
$$x_1'(t)c_1'(t)+x_2'(t)c_2'(t)+\cdots+x_n'(t)c_n'(t)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_1^{(n-2)}(t)c_1'(t)+x_2^{(n-2)}(t)c_2'(t)+\cdots+x_n^{(n-2)}(t)c_n'(t)=0,$$
$$x_1^{(n-1)}(t)c_1'(t)+x_2^{(n-1)}(t)c_2'(t)+\cdots+x_n^{(n-1)}(t)c_n'(t)=f(t).$$

求解 $c_i'(t)(i=1,\cdots,n)$ 而得 $c'_i(t)=\varphi_i(t)(i=1,\cdots,n)$;而 γ_i 为积分 $c_i'(t)=\varphi_i(t)$ 的积分常数,可任意或由初值条件确定.

§4.1.2 常系数线性微分方程的解法

(1) **复值函数和复值解** 设实变量 t 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上有实

函数 $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 为虚数，则可在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上定义复值函数 $z(t)=\varphi(t)+\mathrm{i}\psi(t)$，$\varphi(t)$ 称为其实部，$\psi(t)$ 称为其虚部. 复值函数 $z(t)$ 和实函数 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 有同样的极限、连续、导数、微分、积分及数乘、函数和等性质. 满足微分方程①的复值函数 $z(t)$ 称为方程①的复值解.

设 α,β 为实数，t 为实变量，则 $K=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 为复数，复指数函数定义为

$$\mathrm{e}^{Kt}=\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}=\mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t+\mathrm{i}\sin\beta t).$$

有性质（K,K_1,K_2 为复数）：

$$\cos\beta t=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta t}),\quad \sin\beta t=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta t}),$$

$$\mathrm{e}^{(K_1+K_2)t}=\mathrm{e}^{K_1t}\cdot\mathrm{e}^{K_2t},\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{Kt}}{\mathrm{d}t}=K\mathrm{e}^{Kt},\frac{\mathrm{d}^n\mathrm{e}^{Kt}}{\mathrm{d}t^n}=K^n\mathrm{e}^{Kt}.$$

称 $\bar{K}=\alpha-\mathrm{i}\beta$ 为复数 $K=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 的共轭复数. 有 $\mathrm{e}^{\bar{K}t}=\overline{\mathrm{e}^{Kt}}$.

定理　实系数函数微分方程①的复值解的实部、虚部及其共轭复值函数均是原方程①的解.

对实系数函数微分方程①，设 $f(t)=u(t)+\mathrm{i}v(t)$ 为复值函数，$u(t)$, $v(t)$ 为实函数. 如复值函数 $x=u(t)+\mathrm{i}v(t)$ 是微分方程①的复值解，则实函数 $u(t)$, $v(t)$ 分别是实微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=u(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=v(t)$$

的解.

（2）**常系数齐次线性方程的特征方程**　系数为实常数时的常系数齐次线性方程

$$L[x]\equiv\frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_nx=0,\qquad ④$$

用 $x=\mathrm{e}^{\lambda t}$ 代入得到的方程

$$F(\lambda)\equiv\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$$

称为④的特征方程. 特征方程的根 λ 称为特征根,亦称为微分方程的特征值.

(a) λ 为(实)单根时,方程④有解 $e^{\lambda t}$.

(b) $\lambda=\alpha+i\beta,\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$ 为共轭复根时,方程④有两共轭复值解 $z=e^{\lambda t},\bar{z}=e^{\bar{\lambda}t}$,或对应的两实值解:$e^{\alpha t}\cos\beta t,e^{\alpha t}\sin\beta t$.

(c) λ 为 k 重实根时,方程④有 k 个解

$$e^{\lambda t},te^{\lambda t},t^2e^{\lambda t},\cdots,t^{k-1}e^{\lambda t}.$$

(d) $\lambda=\alpha+i\beta,\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$ 为 k 重共轭复根时,方程④有 k 对共轭复值解

$$e^{\lambda t},e^{\bar{\lambda}t},te^{\lambda t},te^{\bar{\lambda}t},\cdots,t^{k-1}e^{\lambda t},t^{k-1}e^{\bar{\lambda}t}$$

或对应的 k 对实值解:

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,e^{\alpha t}\sin\beta t,te^{\alpha t}\cos\beta t,te^{\alpha t}\sin\beta t,\cdots,$$
$$t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

(3) **欧拉方程**

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=0$$

称为欧拉方程,可引进自变量变换 $x=e^t$ 或 $t=\ln x$ 化为常系数齐次线性微分方程

$$\frac{d^ny}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_ny=0.$$

(4) **常系数非齐次线性方程比较系数法** 常系数非齐次线性方程

$$L[x]\equiv\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx=f(t),\qquad ⑤$$

可按非齐次项 $f(t)$ 的类型用比较系数法求方程⑤的特解.

(a) 类型Ⅰ:$f(t)=(b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m)e^{\lambda t}$. 特解 $\tilde{x}=t^k(B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m)e^{\lambda t}$. 其中 k 为特征方程 $F(\lambda)=0$ 的根 λ 的重数,当 $F(\lambda)\neq0$ 时 $k=0$;B_i 为待定常数. 将

特解 $\tilde{x}$ 代入方程⑤,比较 t 的同次幂系数,可得一系列 B_i 的线性方程,解之得 B_i.

(b) 类型Ⅱ:$f(t)=[A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$,$A(t)$,$B(t)$ 是 t 的最高次数为 m 次的实系数多项式. 设 $\lambda=\alpha+i\beta$ 为特征方程 $F(\lambda)=0$ 的 k 重根,则方程⑤有特解 $\tilde{x}=t^k[P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$,当 $F(\lambda)\neq 0$ 时 $k=0$. 其中 $P(t)$,$Q(t)$ 为待定的 t 的最高次数为 m 次的实系数多项式. 将特解 $\tilde{x}$ 代入方程⑤,比较 t 的同次幂系数,可得一系列线性方程,解之得特解.

当非齐次项 $f(t)$ 由多种不同类型的函数组成时则按不同类型分别求不同特解.

(5) **拉普拉斯变换法** 实或复值连续函数 $f(t)$,当 $t\geqslant 0$ 满足 $|f(t)|<Me^{\sigma t}$时称

$$F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)\,dt$$

为原函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换,$F(s)$ 称为像函数,在复平面 $\mathrm{Re}\, s>\sigma$上有定义.

对常系数非齐次线性方程⑤及初值条件

$$x(0)=x_0,x'(0)=x'_0,\cdots,x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)},$$

非齐次项 $f(t)$ 满足原函数条件. 记

$$F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)\,dt,X(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}x(t)\,dt$$

时,如对方程⑤两边进行拉普拉斯变换,可得关系式

$$A(s)X(s)=F(s),$$

其中 $A(s)$,$F(s)$ 均为已知多项式,因此有

$$X(s)=\frac{F(s)}{A(s)}.$$

这是方程⑤满足初值条件的解 $x(t)$ 的像函数. 再利用拉普拉斯反变换公式可由 $X(s)$ 解得 $x(t)$,此即为拉普拉斯变换方法.

(6) **质点振动**

(a) 数学摆的无阻尼微小自由振动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\varphi=0 \quad 或 \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\varphi=0 \quad \left(\omega^2=\frac{g}{l}\right).$$

特征方程为 $\lambda^2+\omega^2=0$,特征根为共轭复根 $\lambda_{1,2}=\pm\omega\mathrm{i}$. 通解可改写为 $\varphi=A\sin(\omega t+\theta)$,A,θ 为任意常数. 以上方程及其解称为简谐振动,称 ω 为圆频率,A 为振幅,θ 为初相位. 周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$,频率为 $\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$.

当把数学摆移至位置 $\varphi=\varphi_0$ 即 $\theta=\frac{\pi}{2},A=\varphi_0$ 再松开时特解为 $\varphi=\varphi_0\sin\omega t$.

(b) 有阻尼自由振动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mu}{m}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\frac{g}{l}\varphi=0 \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+2n\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\omega^2\varphi=0$$

$$\left(n=\frac{\mu}{2m},\omega^2=\frac{g}{l}\right).$$

特征方程为 $\lambda^2+2n\lambda+\omega^2=0$,有特征根 $\lambda_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-\omega^2}$.

小阻尼 $n<\omega$ 时特征方程有共轭复根 $\lambda_{1,2}=-n\pm\omega_1\mathrm{i},\omega_1=\sqrt{\omega^2-n^2}$. 通解可改写为 $\varphi=A\mathrm{e}^{-nt}\sin(\omega_1 t+\theta)$. 当 $t\to+\infty$ 时 $\varphi(t)$ 摆动地(振动着)趋于零.

大阻尼 $n>\omega$ 时特征方程有两个不同的负实根 $\lambda_2<\lambda_1<0$. 通解为 $\varphi=c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$. 当 $t\to+\infty$ 时 $\varphi(t)\to0$.

临界阻尼 $n=\omega$ 时特征方程有重根 $\lambda_1=\lambda_2=-n$. 方程有通解 $\varphi=\mathrm{e}^{-nt}(c_1+c_2t)$. 当 $t\to+\infty$ 时 $\varphi(t)$ 摆动地趋于零.

(c) 无阻尼强迫振动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\varphi=H\sin pt.$$

当 $p\neq\omega$ 时有通解

$$\varphi=A\sin(\omega t+\theta)+\frac{H}{\omega^2-p^2}\sin pt.$$

当 $p=\omega$ 时有通解

$$\varphi=A\sin(\omega t+\theta)-\frac{H}{2\omega}t\cos\omega t.$$

（d）小阻尼 $n<\omega$ 强迫振动方程为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2n\frac{d\varphi}{dt}+\omega^2\varphi=H\sin pt,\quad n<\omega.$$

有通解

$$\varphi=Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t+\theta)+\frac{H}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4n^2p^2}}\sin(pt+\theta^*),$$

其中 $\omega_1=\sqrt{\omega^2-n^2}$，$\tan\theta^*=\dfrac{-2np}{\sqrt{\omega^2-p^2}}$.

当外力的圆频率 $p=\sqrt{\omega^2-2n^2}$ 时其振幅 $H^*_{\max}=\dfrac{H}{2n\sqrt{\omega^2-n^2}}$ 最大，出现共振现象. 这时的圆频率称为共振频率.

工程技术中共振现象往往具有破坏性，如桥梁、建筑要避免共振现象. 无线电、乐器则利用共振现象.

§4.1.3 高阶微分方程的降阶和幂级数解法

（1）**可降阶方程类型**

（a）$F(t,x^{(k)},x^{(k+1)},\cdots,x^{(n)})=0(1\leqslant k\leqslant n)$ 可降低 k 阶.

令 $y=x^{(k)}$，方程降为 y 的 $n-k$ 阶方程 $F(t,y,y',\cdots,y^{(n-k)})=0$.

（b）$F(x,x',\cdots,x^{(n)})=0$ 可降低一阶.

令 $y=x'$，视 x 为新自变量，可降低一阶，化为 $\bar{F}\left(x,y,\dfrac{dy}{dx},\cdots,\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=0$.

（c）齐次线性方程已知 k 个线性无关的非零特解 $x_1,x_2,\cdots,x_k$，可降低 k 阶.

先令 $x=x_k y$，逐步求 x 的 n 阶导数后代入原方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=0,$$

化为 y 的 n 阶方程，再令 $z=y'$，并用 x_k 除全式，便得 z 的 $n-1$ 阶方程

$$z^{(n-1)}+b_1(t)z^{(n-2)}+\cdots+b_{n-2}(t)z'+b_{n-1}(t)z=0.$$

因有关系 $x=x_k\int z\mathrm{d}t$，z 的方程的 $n-1$ 个解 $z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}$ 仍线性无关.

仿上做法，可进一步令 $z=z_{k-1}\int u\mathrm{d}t$ 而得 u 的 $n-2$ 阶方程，且有 $n-2$ 个解线性无关. 因此，已知 k 个线性无关的非零特解 x_1，$x_2,\cdots,x_k$ 时可降低 k 阶.

(d) 二阶齐次线性方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+p(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+q(t)x=0$，已知非零特解 x_1 时，方程可解. 其通解为

$$x=x_1\left[c_1+c_2\int\frac{1}{x_1^2}\mathrm{e}^{-\int p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right],$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

(2) **二阶线性方程的幂级数解** 对带初值条件的二阶齐次线性方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+q(x)y=0,y(0)=y_0,y'(0)=y_0',$$

这里 $x_0=0$，否则可引进新变量 $t=x-x_0$ 化为 $t_0=0$. 有如下定理

(a) **定理** 若方程中系数 $p(x),q(x)$ 或 $xp(x),x^2q(x)$ 能展成收敛区间为 $|x|<R$ 的幂级数，则二阶齐次线性方程有收敛区间为 $|x|<R$ 的幂级数特解

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

或

$$y=x^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{\alpha+n},$$

这里 α 为待定常数.

(b) n 阶贝塞尔方程 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0$（$n$ 为非负常数），有特解

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}\equiv J_n(x),$$

$$y_2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}\equiv J_{-n}(x).$$

n 阶贝塞尔方程有通解 $y=c_1J_n(x)+c_2J_{-n}(x)$，c_1，c_2 为任意常数.

$J_n(x)$（或 $J_{-n}(x)$）是由贝塞尔方程所定义的特殊函数，称为 n（或 $-n$）阶（第一类）贝塞尔函数. $\Gamma(s)$ 的定义：当 $s\geqslant0$ 时 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$；当 $s<0$ 且非整数时 $\Gamma(s)=\frac{1}{s}\Gamma(s+1)$. $\Gamma(s)$ 有性质：$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$；对正整数 n，有 $\Gamma(n+1)=n!$.

(c) **第二宇宙速度计算** 发射人造地球卫星的最小速度称为第二宇宙速度. 由万有引力定律，需求解

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=-k\frac{mM}{r^2},r(0)=R,\frac{dr(0)}{dt}=v_0.$$

这里 $t=0$，$R=63\times10^5$ m 为地球半径，v_0 为发射速度，M 为地球质量. 上式令 $\frac{dr}{dt}=v$，降为一阶方程 $v\frac{dv}{dr}=-k\frac{M}{r^2}$，解得 $\frac{v^2}{2}=\frac{kM}{r}+\left(\frac{v_0^2}{2}-\frac{kM}{R}\right)$. 求得最小发射速度为

$$v_0=\sqrt{\frac{2kM}{R}}\approx11.2\times10^3\ \text{m/s},$$

其中当 $r=R$ 时重力加速度 $g=9.81\ \text{m/s}^2$，由引力 $F=k\frac{mM}{r^2}$ 求得 $kM=gR^2$.

§4.2 学习辅导

§4.2.1 解题指导

（1）首先要掌握线性微分方程的一般理论和函数相关性概念，线性齐次方程存在基本解组和叠加原理，线性齐次和非齐次方程解的通解结构，能运用朗斯基行列式是否为零判别函数线性相关或线性无关，能应用常数变易法求线性非齐次方程的特解.

（2）对高阶微分方程先分清是常系数还是变系数微分方程，是齐次还是非齐次，以及是否是特殊类型，如欧拉方程、可降阶方程. 或是指定用特殊方法，如幂级数、拉普拉斯变换方法. 按常系数线性齐次、欧拉方程、常系数线性非齐次、降阶方程、变系数线性非齐次，以及指定的方法如幂级数法、拉普拉斯变换方法分别处理.

值得注意的是，有些高阶方程化为一阶微分方程组可能更为方便或容易求解. 微分方程组的求解，线性方程见第五章、非线性方程见第七章对称型微分方程的积分和第六章解性态的判断.

（3）常系数线性齐次方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=0. \qquad ①$$

相应的特征方程

$$F(\lambda)\equiv\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$$

有 m 个重次为 k_i 的特征根 $\lambda_i(i=1,\cdots,m)$，$k_1+\cdots+k_m=n$.

λ 为 $k\geqslant 1$ 重实根时，方程①有 k 个解

$$e^{\lambda t},te^{\lambda t},t^2e^{\lambda t},\cdots,t^{k-1}e^{\lambda t}.$$

λ 为 k 重共轭复根 $\lambda=\alpha+i\beta,\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$ 时，方程①有 k 对共轭复值解

$$e^{\lambda t},e^{\bar{\lambda}t},te^{\lambda t},te^{\bar{\lambda}t},\cdots,t^{k-1}e^{\lambda t},t^{k-1}e^{\bar{\lambda}t},$$

或对应的 k 对实值解：

$$e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t, te^{\alpha t}\cos\beta t, te^{\alpha t}\sin\beta t, \cdots,$$
$$t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t, t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

与特征方程的特征根相应的方程①的 n 个解 $x_i(t)(i=1,\cdots,n)$构成方程的基本解组. 方程①的通解为

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t),$$

其中 c_i 为任意常数.

(4) 欧拉方程 $x^n\dfrac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\dfrac{dy}{dx}+a_ny=0$ 可通过变换 $x=e^t(t=\ln x)$变为常系数线性齐次方程求解,或直接令 $y=x^K$ 代入求得 K 值而得. 注意,m 重实根时解为 $x^K, x^K\ln|x|, x^K\ln^2|x|, \cdots, x^K\ln^{m-1}|x|$. 而对共轭复根 $K=\alpha\pm i\beta$,则为 $x^\alpha\cos(\beta\ln|x|), x^\alpha\sin(\beta\ln|x|)$. m 重复根时为 $x^\alpha\cos(\beta\ln|x|), x^\alpha\sin(\beta\ln|x|), \cdots, x^\alpha\ln^{m-1}|x|\cos(\beta\ln|x|), x^\alpha\ln^{m-1}|x|\cdot\sin(\beta\ln|x|)$.

(5) 常系数线性非齐次方程

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx=f(t). \quad ②$$

先求相应的线性齐次方程的通解 $x(t)$,再求线性非齐次方程的一个特解 $\tilde{x}(t)$,则常系数线性非齐次方程的通解为 $x(t)+\tilde{x}(t)$.

可根据非齐次方程右端函数 $f(t)$ 的类型求非齐次方程的特解:

(a) Ⅰ型:$f(t)=(b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m)e^{\lambda t}$. 特解 $\tilde{x}=t^k(B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m)e^{\lambda t}$. 其中 k 为特征方程的根 λ 的重数,当 $F(\lambda)\neq 0$ 时 $k=0$;B_i 为待定常数. 可用比较系数法确定待定常数.

(b) Ⅱ型:$f(t)=[A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$,$A(t)$,$B(t)$是 t 的最高次数为 m 次的实系数多项式. 设 $\lambda=\alpha+i\beta$ 为特征方程的 k 重根,则非齐次方程有特解 $\tilde{x}=t^k[P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$, $P(t)$,$Q(t)$为待定的 t 的最高次数为 m 次的实系数多项式. 可用

比较系数法确定待定常数.

(c) 不符合Ⅰ、Ⅱ型的$f(t)$,可用常数变易法求其特解. 常数变易法可设特解为$x=c_1(t)x_1+c_2(t)x_2+\cdots+c_n(t)x_n$,然后在求$x',x'',\cdots,x^{(n-1)}$的过程中不断令$c_1'(t)x_1^{(i)}+c_2'(t)x_2^{(i)}+\cdots+c_n'(t)x_n^{(i)}=0,i=0,1,\cdots,n-1$,最后求得$c_1'(t),c_2'(t),\cdots,c_n'(t)$的$n$个代数方程. 求出$c_j'(t)$后积分便得到特解.

另一个方法是化为线性微分方程组直接应用常数变易公式[书§5.2.2-(5.29)、(5.31)]求解.

(6) 可降阶的高阶方程

(a) $F(t,x^{(k)},x^{(k+1)},\cdots,x^{(n)})=0$. 令$x^{(k)}=y$,可降低$k$阶.

(b) $F(x,x',\cdots,x^{(n)})=0$. 令$x'=y$,视x为新自变量,可降低一阶.

(c) 线性齐次方程有k个线性无关特解$x_i(i=1,\cdots,k)$,逐次令$x=x_iy$,可降低k阶.

(7) 变系数线性非齐次方程

求出相应齐次方程的基本解组后可用常数变易法或待定系数法求其特解.

(8) 二阶线性方程的幂级数解

带初值条件的二阶齐次线性方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0,y(0)=y_0,y'(0)=y_0',$$

这里$x_0=0$,否则可引进新变量$t=x-x_0$化为$t_0=0$.

若方程中系数$p(x),q(x)$或$xp(x),x^2q(x)$能展成收敛区间为$|x|<R$的幂级数,则二阶齐次线性方程有收敛区间为$|x|<R$的幂级数特解

$$y=x^\alpha\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{\alpha+n},$$

这里α为待定常数.

(8′) n 阶贝塞尔方程 $x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(x^2-n^2)y=0$($n$ 为非负常数)有特解

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}\equiv \mathrm{J}_n(x),$$

$$y_2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}\equiv \mathrm{J}_{-n}(x).$$

n 阶贝塞尔方程有通解 $y=c_1\mathrm{J}_n(x)+c_2\mathrm{J}_{-n}(x)$,$c_1$,$c_2$ 为任意常数. 更一般的 n 为任意常数的通解 $y=c_1\mathrm{J}_n(x)+c_2\mathrm{Y}_{-n}(x)$要用到第二类贝塞尔函数,见[§4.3.2-(7)].

(9) 拉普拉斯变换方法

对常系数非齐次线性方程②及初值条件

$$x(0)=x_0,x'(0)=x_0',\cdots,x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)},$$

可对方程②两边进行拉普拉斯变换,得到代数关系式,求解代数方程后再利用拉普拉斯反变换公式便可得方程的解.

§4.2.2 例题选讲

例 1 已知特解 $3x,x-2,\mathrm{e}^x+1$,试写出尽可能低阶的线性齐次方程.

解 先证特解 $3x,x-2,\mathrm{e}^x+1$ 线性无关. 设 $3x,x-2,\mathrm{e}^x+1$ 线性相关,则有关系式

$$3xa+(x-2)b+(\mathrm{e}^x+1)c\equiv 0.$$

于是

$$3xa+(x-2)b+(\mathrm{e}^x+1)c=c\mathrm{e}^x+(3a+b)x+(c-2b)\equiv 0,$$

$$c=0,b=0,a=0,$$

引出矛盾. 即特解 $3x,x-2,\mathrm{e}^x+1$ 线性无关,构成基本解组. 线性齐次方程的通解为

$$y=3xa+(x-2)b+(\mathrm{e}^x+1)c,$$

其中 a,b,c 为任意常数.

通解 y 及其对 x 的导数 y', y'', y''' 联立方程组，消去三个任意常数 a, b, c，即可构成线性齐次方程. 联立方程组是

$$\begin{cases} 3xa + (x-2)b + (e^x + 1)c = y, \\ 3a + b + e^x c = y', \\ e^x c = y'', \\ e^x c = y'''. \end{cases}$$

因方程的解有三个任意常数，故微分方程最低阶数为三阶. 由最后两式便得线性齐次方程：

$$y''' - y'' = 0.$$

事实上，方程的通解为

$$y = c_1 e^x + c_2 x + c_3.$$

如图 $c_1 = c, c_2 = 3a + b, c_3 = c - 2b$，其中 a, b, c 仍为任意常数，通解变为由三个特解 $y_1 = 3x, y_2 = x - 2, y_3 = e^x + 1$ 所构成

$$y = 3xa + (x-2)b + (e^x + 1)c.$$

例 2 已知二阶线性非齐次微分方程的三个特解为 $y_1 = 1$，$y_2 = x, y_3 = x^3$，试求其通解及微分方程.

解 由线性微分方程的解的性质，非齐次方程解之差为齐次方程的解，于是 $\tilde{y}_1 = y_2 - y_1 = x - 1, \tilde{y}_2 = y_3 - y_1 = x^3 - 1$ 为对应的齐次微分方程的解. 再因 $x - 1, x^3 - 1$ 线性无关（如相关应有 $\alpha(x - 1) + \beta(x^3 - 1) = \beta x^3 + \alpha x - (\alpha + \beta) \equiv 0$，即 $\alpha = 0, \beta = 0$，矛盾），知 $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ 构成对应的二阶线性齐次微分方程的基本解组，齐次微分方程的通解为 $y = c_1\tilde{y}_1 + c_2\tilde{y}_2 = c_1(x-1) + c_2(x^3 - 1)$. 而二阶线性非齐次微分方程的通解为

$$y = c_1\tilde{y}_1 + c_2\tilde{y}_2 + y_1 = 1 + c_1(x-1) + c_2(x^3 - 1),$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

可通过微分两次通解

$$y' = c_1 + 3c_2 x^2, y'' = 6c_2 x$$

求得

$$c_2=\frac{y''}{6x},c_1=y'-\frac{1}{2}y''x,$$

代入通解消去任意常数 c_1,c_2，求得微分方程：

$$y=1+\left(y'-\frac{1}{2}y''x\right)(x-1)+\frac{y''}{6x}(x^3-1),$$

即

$$(2x^3-3x^2+1)y''-6x(x-1)y'+6xy-6x=0.$$

例 3 求解常系数线性微分方程 $y'''-y''=12x^2-6$.

解 对应的齐次方程 $y'''-y''=0$ 有特征值 $\lambda_1=1$ 及两重特征值 $\lambda_{2,3}=0$，通解为 $y=c_1\mathrm{e}^x+c_2x+c_3$. 常系数非齐次方程右端为多项式，对应于齐次方程二重零特征值，即右端为 Ⅰ 型 $k=2,m=2$，方程有多项式形式特解 $y=x^2(Ax^2+Bx+C)$，代入原方程有

$$y'''-y''=4\times3\times2Ax+3\times2B-4\times3Ax^2-3\times2Bx-2C=12x^2-6,$$

得 $A=-1,B=-4,C=-9$. 于是微分方程的通解为

$$y=c_1\mathrm{e}^x+c_2x+c_3-x^4-4x^3-9x^2.$$

例 4 解微分方程 $tx''-4x'=t^3$.

解 令 $y=x'$，方程化为 $ty'-4y=t^3$，即 $y'-\frac{4}{t}y=t^2$，为一阶线性方程. 有

$$x'=y=\mathrm{e}^{\int\frac{4}{t}\mathrm{d}t}\left(\int t^2\mathrm{e}^{-\int\frac{4}{t}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+\tilde{c}_1\right)=\mathrm{e}^{4\ln|t|}\left(\int t^2t^{-4}\mathrm{d}t+\tilde{c}_1\right)$$

$$=t^4\left(-\frac{1}{t}+\tilde{c}_1\right)=\tilde{c}_1t^4-t^3,$$

解为

$$x=c_1t^5-\frac{1}{4}t^4+c_2.$$

例 5 解微分方程 $xx''-2x'^2=0$.

解 方程对 x,x',x''是齐次的，即用 kx,kx',kx''代替 x,x',x''方程不变. 可用代换 $x=\mathrm{e}^y,x'=\mathrm{e}^yy',x''=\mathrm{e}^y(y''+y'^2)$，化方程为

$$\mathrm{e}^y\mathrm{e}^y(y''+y'^2)-2\mathrm{e}^{2y}y'^2=0,\text{即 } y''-y'^2=0.$$

再设 $y'=z$,得方程 $z'-z^2=0$. 解得 $z=0$ 及

$$\frac{dz}{z^2}=dt, \text{即} -\frac{1}{z}=t+c_1.$$

即有解 $z=\frac{dy}{dt}=0, y=\tilde{c}, x=e^y=e^{\tilde{c}}=c$ 及

$$\frac{dy}{dt}=z=-\frac{1}{t+c_1}, y=-\ln(t+c_1)+\tilde{c}_2, x=e^{-\ln(t+c_1)+\tilde{c}_2}=\frac{c_2}{t+c_1}.$$

方程的解为 $x=c$ 及 $x=\frac{c_2}{t+c_1}$,其中 c,c_1,c_2 为任意常数.

§4.2.3 测试练习

1. 称函数组 $\{f_1(x),\cdots,f_m(x)\}$ 线性相关,如果存在不全为零的系数 $c_1,\cdots,c_m$,使得等式 $c_1f_1(x)+\cdots+c_mf_m(x)\equiv 0$ 恒成立. 不线性相关的函数组称为线性无关或线性独立. 证明下列各函数组线性独立:

(1) $\sin ax, \cos ax$;　　(2) $1, x, x^2$;

(3) x, e^x, xe^x.

2. 求具有如下通解的最低次数的微分方程:

(1) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-3x}$;　　(2) $y=c_1x^2+c_2x^2\ln x$;

(3) $y^2=c_1x+c_2+2x^2$.

3. 判断下列高阶方程的可能的处理或求解方法,但不必具体求解(具体求解见[§4.3.1 -1, §4.4.2 -1]).

(1) $y''+y=\frac{1}{\sin x}$;　　(2) $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$;

(3) $x^2y''-xy'+y=8x^3$;　　(4) $x^3y''-2xy=6\ln x$;

(5) $(2x+3)^3y'''+3(2x+3)y'-6y=0$.

4. 判断下列常系数高阶方程的通解类型及可能的处理或求解方法,但不必具体求解(具体求解见[§4.3.1 -2, §4.4.2 -2]).

(1) $y^{(4)}+4y=0$;　　(2) $y^{(5)}+8y'''+16y'=0$;

(3) $y''+2y'-3y=x^2e^x$;　　(4) $y''-5y'=3x^2+\sin 5x$;

(5) $y'''+y'=\sin x+x\cos x$;　　(6) $y''-9y=e^{-3x}(x^2+\sin 3x)$.

5. 判断下列高阶方程的类型及可能的处理或求解方法,但不必具体求解(具体求解见[§4.3.1-3, §4.4.2-3]).

(1) $yy''+1=y'^2$;　　(2) $y''^2+y'=xy''$;

(3) $y'y'''=y''^2+y'^2y''$;　　(4) $(x^2+1)(y'^2-yy'')=xyy'$;

(5) $x^2yy''=(y-xy')^2$.

6. 试用观察法求下述条件下二阶齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的特解.

(1) $P(x)+xQ(x)=0$;　　(2) $1+P(x)+Q(x)=0$;

(3) $1-P(x)+Q(x)=0$;　　(4) $m^2+mP(x)+Q(x)=0$.

7. 试判断下列高阶方程的级数解形式或是否可化为贝塞尔方程,但不必具体求解(具体求解见[§4.3.1-6, §4.4.2-6]).

(1) $y''+\frac{3}{x}y'-\frac{3}{x^2}y=0$;

(2) $x^2y''-x(x+4)y'+4y=0$;

(3) $x^2y''+xy'+\left(4x^2-\frac{1}{9}\right)y=0$;

*(4) $x^2y''-2xy'+4(x^4-1)y=0$.

8. 试判断下列高阶方程的拉普拉斯变换类型,但不必具体求解(具体求解见[§4.3.1-8, §4.4.2-8]).

(1) $x''-2x'+x=t, x(0)=x'(0)=0$;

(2) $x''-2ax'+(a^2+b^2)x=0, x(0)=1, x'(0)=0$;

(3) $x''-x'=2\sin t, x(0)=2, x'(0)=0$;

(4) $y'''+3y''+3y'+y=x^3e^{-x}, y(0)=y'(0)=y''(0)=0$.

§4.3 补充提高

§4.3.1 补充习题

1. 具体求解§4.2.3第3题中所列的高阶方程.

2. 具体求解§4.2.3第4题中所列的高阶方程.

3. 具体求解§4.2.3第5题中所列的高阶方程.

4. (1) 试求解追线方程 $y''=\dfrac{ay'^2}{vy}\sqrt{1+y'^2}$, $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=+\infty$;

(2) 试求解悬链线方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\omega}{H}\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$, $y(0)=b$, $y'(0)=0$.

*5. (1) 微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$. 若存在常数 r 使得对任意 $s>0$ 均有

(a) $F(x,sy,sy',\cdots,sy^{(n)})=s^rF(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$;

(b) $F(sx,y,s^{-1}y',\cdots,s^{-n}y^{(n)})=s^rF(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$;

(c) $F(sx,s^my,s^{m-1}y',\cdots,s^{m-n}y^{(n)})=s^rF(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$,

$m\neq0$ 为某常数. 则分别称 F 为(a) y,(b) x,(c) $x,y^{\frac{1}{m}}$ 的广义的齐次函数. 试证明对应上述齐次函数的方程均可以降阶.

(2) 试解方程

(a) $xyy''-xy'^2-3yy'=0$; (b) $4x^2y^3y''=x^2-y^4$;

(c) $x^3y''=(y-xy')(y-xy'-x)$.

6. 求§4.2.3第7题(1)~(4)中所列的高阶方程的级数解或贝塞尔函数解.

*7. (1) 试用变换 $z=ax^b$, $w=yx^c$ 将贝塞尔方程 $z^2\dfrac{d^2w}{dz^2}+z\dfrac{dw}{dz}+(z^2-p^2)w=0$ 化为新方程,并用贝塞尔函数表示新方程的通

解.

(2) 用变换 $By=\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$将特殊里卡蒂方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+By^2=Cx^m$ 化为新方程,并进一步用(1)的结果求新方程的通解.

(3) 证明:里卡蒂方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+By^2=Cx^m$ 满足条件 $m=-\frac{4k}{2k+1}$(其中 k 为整数)时,通解能用初等函数表示.

8. 用拉普拉斯变换求解 §4.2.3 第 8 题(1) ~ (4)中所列的高阶方程.

§4.3.2 排疑解惑

(1) **朗斯基行列式和范德蒙德(Vandermonde)行列式** 由 n 个解及其 $n-1$ 阶导数组成的朗斯基行列式是判别解是否为基本解组的关键. n 阶常系数线性方程的 n 个特征根 λ_i 均不相同时,其解的朗斯基行列式等于 $\exp\left(t\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$乘以范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

对上述范德蒙德行列式,将第 i 列减去第 j 列可抽出因子$\lambda_i-\lambda_j$. 因此,范德蒙德行列式有因子 $\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)$,此因子式展开式中 λ_i 的最高次数和系数与行列式展开式的相同. 因而,范德蒙德行列式等于该因子式 $\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)$.

(2) **算子法与高阶常系数线性方程** 和拉普拉斯变换法类似,也可以用算子(又称运算子)法解高阶常系数线性方程. 定义微分算子 $D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. 显然$\frac{1}{D}$便是积分算子$\int(*)\mathrm{d}x$. 对于 D 的常系

数多项式$f(D)$和任意函数$F(x)$，高阶常系数线性方程可以写成微分算子形式$f(D)y=F(x)$，然后通过积分算子$y=\frac{1}{f(D)}F(x)$求解. 其中要利用一系列算子性质，当$F(x)$取一些特殊形式，如多项式或e^{ax}乘多项式或$\sin\omega x,\cos\omega x$等形式时容易求解. 详细情形可参见[文20 §2.4，文7 §13，文8 §5]等.

(3) **变系数线性微分方程** 一般方程可解的有欧拉方程(又称柯西线性方程)：$x^n y^{(n)}+a_1 x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}xy'+a_n y=q(x)$，用变换$x=e^t$化为常系数方程解之. 更广泛的还有勒让德线性方程(取$b=1,c=0$时变为欧拉方程)

$$(bx+c)^n y^{(n)}+a_1(bx+c)^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(bx+c)y'+a_n y=q(x).$$

可以令$bx+c=e^t$将其化为常系数方程. 对特殊方程则可用降阶法，如缺因变量y或缺自变量x或已知一特解$u(x)$时，可通过令$z=y'$或令因变量为自变量或变换$y=uv$降阶. 此外，如高阶方程是一恰当方程，即能化为低一阶方程的微分式，亦可以积分降阶.

(4) **二阶线性微分方程** 变系数线性高阶方程以二阶微分方程为代表：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=r(x).$$

(a) 利用观察法或其他方法求对应齐次方程($r(x)=0$)的一个解y_1，然后可通过变换$y=y_1\int z\,dx$求得通解

$$y=y_1\left[c_1+c\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx\right].$$

知道齐次方程的基本解组y_1,y_2后可用常数变易法求非齐次方程的特解

$$y(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{y_2(x)y_1(s)-y_1(x)y_2(s)}{W[y_1(s),y_2(s)]}r(s)ds,$$

其中W为朗斯基行列式(见[书 §5.2.2-(5.31)]).

(b) 计算 $q(x)-\frac{1}{4}p(x)-\frac{1}{2}p'(x)$,若结果为常数 K 或 $\frac{K}{x^2}$,则可通过变换 $y=ve^{-\frac{1}{2}\int p(x)\mathrm{d}x}$ 将原方程化为常系数方程或欧拉方程.

(c) 设 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\sqrt{\frac{\pm q(x)}{a^2}}$(要求根号下为正),代入 $\frac{z''+p(x)z'}{z'^2}$,结果为常数时可通过变换 $z=\int\sqrt{\frac{\pm q(x)}{a^2}}\mathrm{d}x$ 将原方程化为常系数方程.

(d) 对齐次方程作因式分解化为两个一阶线性方程. 这与常系数方程的特征方程的因式分解(如[书习题 4.2 – 2(9)、(12)、(13)、(15)]等)及用 D 算子法(见[§4.3.2 – (2)])的因式分解不同,而是分解成两个不可交换线性算子 $F_1(D)$,$F_2(D)$,使得

$$\{F_1(D)\cdot F_2(D)\}y=F_1(D)\cdot\{F_2(D)y\}$$
$$=\{P(x)D^2+R(x)D+S(x)\}y=Q(x).$$

于是可设 $F_2(D)y=u$,方程变为 $F_1(D)u=Q(x)$,解之. 如 $\{xD^2-(x^2+2)D+x\}y=\{(xD-2)(D-x)\}y$. 参看[文 7 §18].

(5) **幂级数方法与解析理论** 用幂级数方法得到特殊形式的函数解. 能用幂级数方法求解的二阶线性微分方程有

贝塞尔方程 $x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$;

勒让德方程 $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$;

高斯超几何方程 $x(1-x)y''+[\gamma-(1+\alpha+\beta)]y'-\alpha\beta y=0$;

埃尔米特方程 $y''-2xy'+2\nu y=0$

等. 这些方程的求解在复数域中更为方便和自然,从而引发了复解析理论的产生和发展. 方程所求的幂级数解不能表示为有限形式的初等函数,形成一类特殊函数.

(6) **特殊函数** 特殊函数也称高等超越函数,大致可分成

(a) 由某些特定形式的积分所定义的函数,如 Γ 函数、B 函数、指数对数积分、正弦余弦积分等;

(b) 某些二阶线性常微分方程的特殊形式的解,如贝塞尔方

程定义的贝塞尔函数、勒让德方程定义的勒让德多项式、超几何方程定义的超几何函数、埃尔米特方程定义的埃尔米特函数等；

（c）椭圆积分和椭圆函数.

物理上广泛应用的偏微分方程往往可以用分离变量法化为特殊形式的二阶线性常微分方程，因此特殊函数成为数学物理方程课程的主要内容.

（7）**第二类贝塞尔函数及广义贝塞尔方程** 当 n 为非负整数时，第一类贝塞尔函数 $\mathrm{J}_{-n}(x)$ 和 $\mathrm{J}_n(x)$ 线性相关，第二类贝塞尔函数的定义为 $\mathrm{Y}_n(x)=\dfrac{\mathrm{J}_n(x)\cos n\pi-\mathrm{J}_{-n}(x)}{\sin n\pi}$. 当 m 为整数时则定义 $\mathrm{Y}_m(x)=\lim\limits_{n\to m}\mathrm{Y}_n(x)$. 可证极限存在且 $\mathrm{Y}_{-m}(x)$ 与 $\mathrm{J}_m(x)$ 线性无关. 贝塞尔方程的通解可写成 $y=c_1\mathrm{J}_n(x)+c_2\mathrm{Y}_{-n}(x)$，这时对任意的 n 均成立.

比贝塞尔方程更广泛的一类方程形式为 $x^2y''+axy'+(b+cx^m)y=0$，其中 a,b,c,m 为常数，$c>0$，$m\neq0$（当 $c=0$ 或 $m=0$ 时方程是欧拉方程），可以引入新变量 $x=(t/\gamma)^{1/\beta}$，$y=(t/\gamma)^{-\alpha/\beta}$将其化为贝塞尔方程 $t^2u''+tu'+(t^2-n^2)u=0$，其中 $\alpha=(a-1)/2$，$\beta=m/2$，$\gamma=2\sqrt{c}/m$，$n^2=[(a-1)^2-4b]/m^2$. 见[§4.2.3-7(3)、(4)].

（8）**变分法** 变分法是分析的一大分支，作为有效工具能解决数学中多种不同的问题，并能以非常简洁优雅的形式表达数学物理中的基本原理. 欧拉和拉格朗日创立了变分法，并把它引进了称为欧拉方程的微分方程问题. 假设存在一容许函数 $y(x)$ 使积分 $I=\int_{x_1}^{x_2}f(x,y,y')\,\mathrm{d}x$ 取极小值. 为求此函数，可通过扰动，设 $\tilde{y}(x)=y(x)+\alpha\eta(x)$，其中 $\eta''(x)$ 连续且 $\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$. 代入积分式有

$$I(\alpha)=\int_{x_1}^{x_2}f(x,\tilde{y},\tilde{y}')\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_2}f(x,y(x)+\alpha\eta(x),y'(x)+\alpha\eta'(x))\mathrm{d}x.$$

要求 $I'(0)=0$. 利用$\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\tilde{y},\tilde{y}')=\frac{\partial f}{\partial\tilde{y}}\eta(x)+\frac{\partial f}{\partial\tilde{y}'}\eta'(x)$,有

$$I'(\alpha)=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\tilde{y},\tilde{y}')\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial\tilde{y}}\eta(x)+\frac{\partial f}{\partial\tilde{y}'}\eta'(x)\right]\mathrm{d}x.$$

利用分部积分法有

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x)\mathrm{d}x&=\left[\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\mathrm{d}x\\&=-\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}I'(0)&=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x)+\frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x)\right]\mathrm{d}x\\&=\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\left[\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

由 $\eta(x)$的任意性便得到积分 $I=\int_{x_1}^{x_2}f(x,y,y')\mathrm{d}x$ 取极小值的必要条件

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

此即为欧拉方程. 可进一步展开成二阶常微分方程

$$f_{y'y'}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+f_{y'y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(f_{y'x}-f_y)=0.$$

其解一般是双参数曲线族,通过满足边界条件求出极值曲线. 方程一般不可解,幸运的是许多应用问题导出的是可解的特殊情形.

§4.3.3 应用实例

(1) **追赶轨迹** 平面上以匀速运动但方向始终指向另一沿某方向匀速运动的点的运动轨迹称为追线. 设点 P 开始时从$(X_0,0)$沿 x 轴按速度 a 运动. 而点 M 从初始点(x_0,y_0)开始按速度 v 始终指向点 P 运动. 如图4.1. 此时,点 P 的运动轨迹$(X,0)$满足 $X=X_0+at$,点 M 的运动轨迹(x,y)满足

$$dx^2+dy^2=v^2dt^2,\quad y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{X-x},$$

于是有

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{v}\sqrt{1+y'^2},X_0-x+at=-\frac{y}{y'}.$$

第二式对 x 求导化简后代入第一式

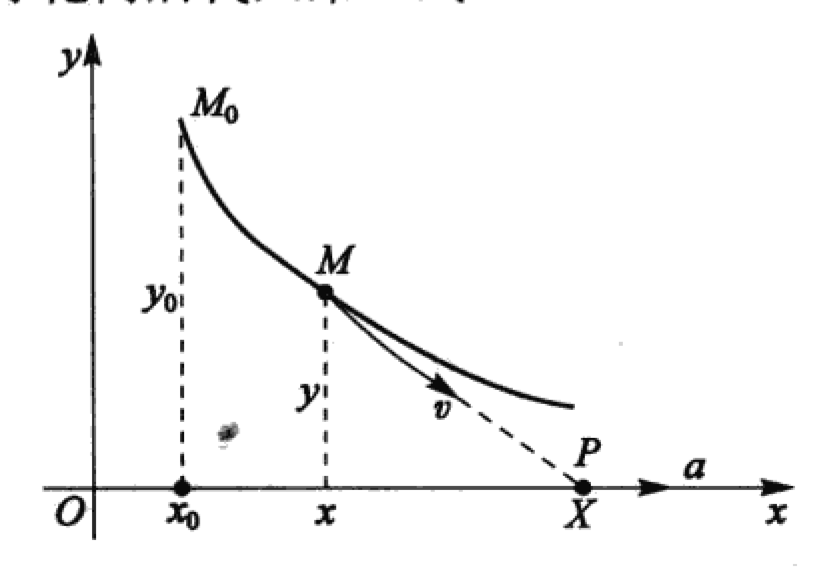


图 4.1　追线

$$-1+a\frac{dt}{dx}=\frac{yy''-y'^2}{y'^2},\frac{dt}{dx}=\frac{yy''}{ay'^2}=\frac{1}{v}\sqrt{1+y'^2}.$$

最后得到追线的微分方程模型

$$y''=\frac{ay'^2}{vy}\sqrt{1+y'^2}.$$

当 $x_0=X_0$ 即开始时点 P,M 在同一平行于 y 轴的直线上时其初值条件为

$$y(x_0)=y_0,y'(x_0)=\infty.$$

追线方程的求解见[§4.3.4－4(1)]及[§4.4.2－4(1)]. 当 $a\geqslant v$ 时无法追上；当 $a<v$ 时将用时间 $T=\frac{y_0v}{v^2-a^2}$ 在 $x=x_0+\frac{y_0av}{v^2-a^2}$ 处追上.

(2) **悬链线**　一均匀、柔软的绳索悬挂在 A,B 两点，两端固定，仅受绳索本身重量作用，如图 4.2，求绳索在平衡状态时的形

状.

设绳索最低点为 C,其上的水平张力为 H,绳索任意点 $P(x,y)$处的张力为 T,CP 段的垂直负荷为 $W(x)$. 绳索的平衡条件为 $T\sin\theta = W(x)$, $T\cos\theta = H$. 由点 P 处的切线的斜率 $\tan\theta = \frac{dy}{dx}$可得 $\frac{dy}{dx} = \frac{W(x)}{H}$,即

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H}\frac{dW(x)}{dx}.$$

此即为悬链线的一般方程.

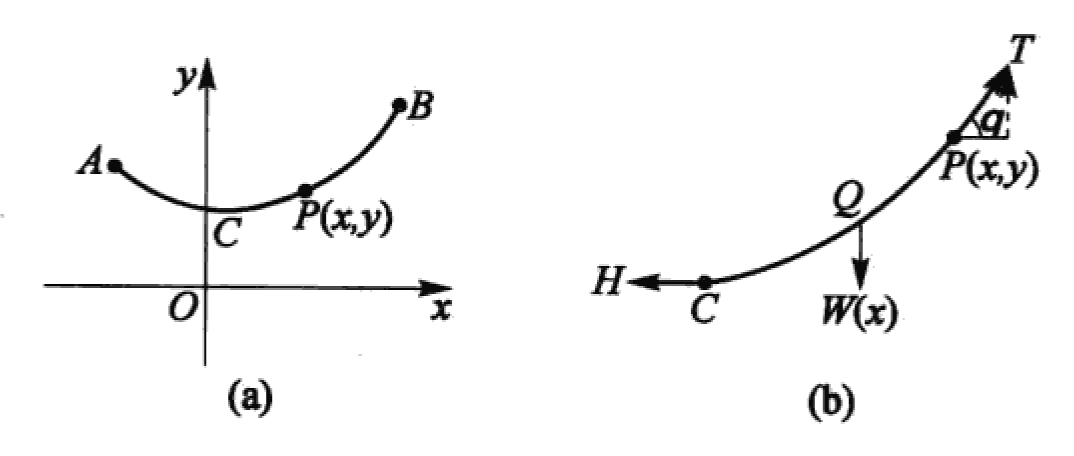


图 4.2　悬链线

(a) 负重均匀的吊桥$\frac{dW(x)}{dx} = \omega$,有$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\omega}{H}$. 设从最低点 C 到桥面距离为 b,即初值条件为 $y(0) = b$, $y'(0) = 0$. 积分两次可解得 $y(x) = \frac{\omega}{2H}x^2 + b$. 求得吊桥桥面为抛物线方程.

(b) 柔软绳索,设其密度为 ω,即$\frac{dW(x)}{ds} = \omega$. 因

$$\frac{dW(x)}{dx} = \frac{dW(x)}{ds}\cdot\frac{ds}{dx} = \omega\frac{ds}{dx}, \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

得悬链绳索方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\omega}{H}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

其初值条件为 $y(0)=b, y'(0)=0$. 绳索方程的求解见[§4.3.1 - 4(2), §4.4.2 - 4(2)]. 当 $b=\frac{H}{\omega}\equiv a$ 时解为 $y=a\cdot \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$. 悬链线长为 $s(x)=a\cdot \mathrm{sh}\,\frac{x}{a}$.

(c) 柔软绳索长为 s,悬挂于同一水平线相距为 L 的两支点上. 绳索最低点与支点的高度差(称为垂度)为 d. 此时,由(b),有 $d=y\left(\frac{L}{2}\right)-a=a\left(\mathrm{ch}\,\frac{L}{2a}-1\right)$. $s=2s\left(\frac{L}{2}\right)=2a\cdot \mathrm{sh}\,\frac{L}{2a}$. 从以上两式可解出 a:由 $\mathrm{ch}\,\frac{L}{2a}=\frac{d}{a}+1, \mathrm{sh}\,\frac{L}{2a}=\frac{s}{2a}$有

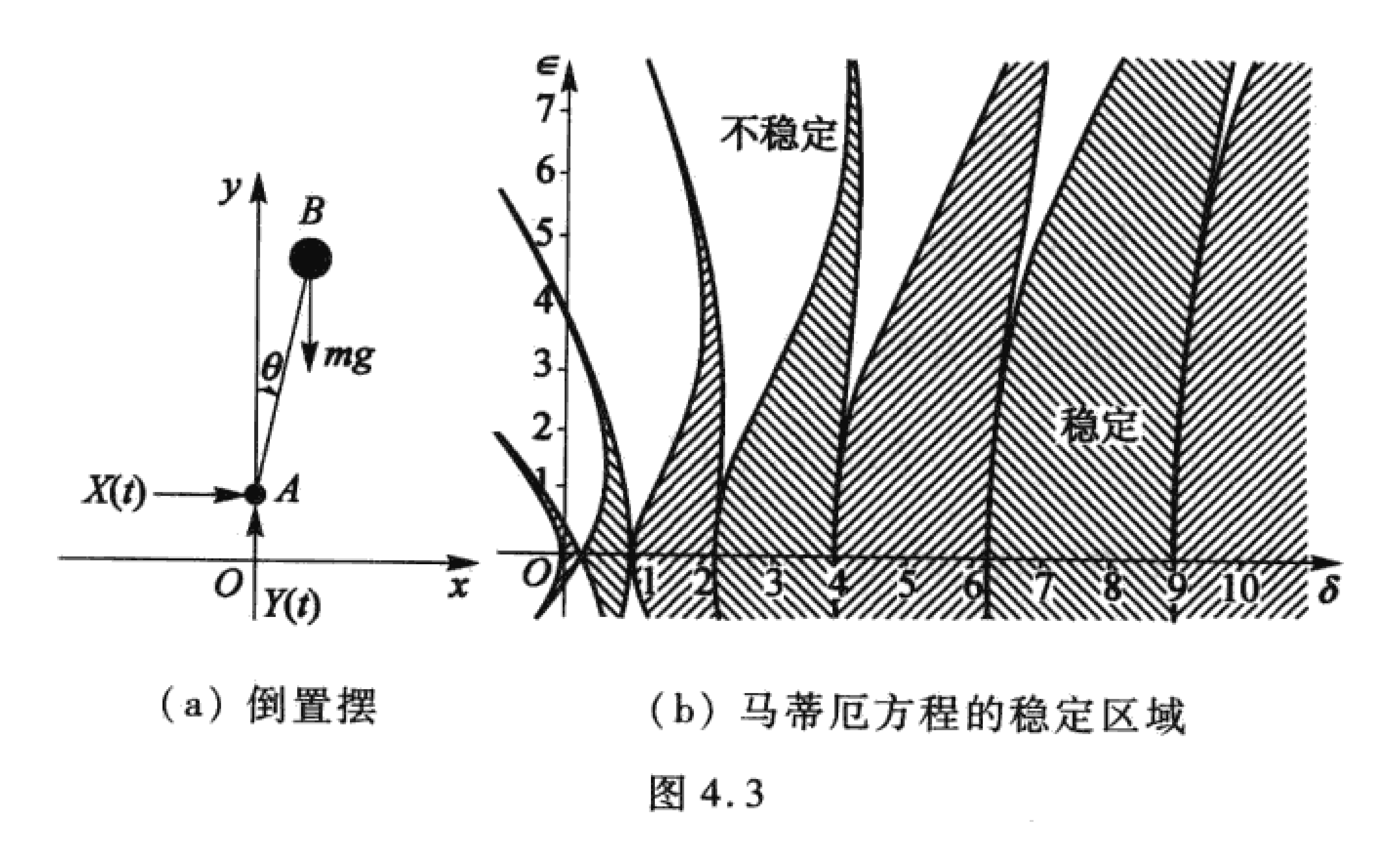
$$\mathrm{ch}^2\,\frac{L}{2a}-\mathrm{sh}^2\,\frac{L}{2a}=\frac{d^2}{a^2}+\frac{2d}{a}+1-\frac{s^2}{4a^2}=1,$$

$$4d^2+8ad-s^2=0, a=\frac{s^2}{8d}-\frac{d}{2}.$$

而绳索上点(x,y)处的张力为 $T=H\sec\theta=H\sqrt{1+y'^2}=H\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}=\omega y$. 在支点处的张力为 $T_0=\omega(a+d)$. 见[文 18(上) §3.4.6].

(3) **倒置摆与希尔方程** 考虑在支撑点上作用着给定垂直力的倒置摆,如图 4.3(a). 假定在 Oxy 平面上运动是由摆的重力 mg 和作用在杆端 A 的外力 $Y(t)$ 和约束反作用力 $X(t)$ 的作用引起的. 设杆 AB 长 l,可忽略杆的质量且系统对重心 B 点的惯性力矩为零. B 点横坐标为 $x=l\sin\theta$,系统的运动方程为 $m\ddot{x}=X$. 而由 B 点的惯性力矩为零,又有 $Yl\sin\theta-Xl\cos\theta=0$. 假定 θ 足够小,可取 $\sin\theta\approx\theta, \cos\theta\approx 1$,则有方程 $ml\ddot{\theta}-Y\theta=0$. 当铅垂外力为 $Y(t)=mg-mp(t)$时方程化为 $\ddot{\theta}+\left[-\frac{g}{l}+\frac{1}{l}p(t)\right]\theta=0$,这是一个二阶变系数线性微分方程. 当 $p(t)$ 是 t 的周期函数时称方程为希尔方程. 马蒂厄(Mathieu)方程 $\ddot{w}+(\delta+\varepsilon\cos t)w=0$ 是希尔方程的特殊情形,在$\delta-\varepsilon$参数平面上有一个马蒂厄方程周期解的稳定区域,如

图 4.3(b). 这意味着只要选取恰当的参数,倒竖摆是稳定的,总在周期地摆动. 希尔方程这个特殊的线性微分方程的重要性在于讨论非线性系统周期解的稳定性时往往最后归结为讨论希尔方程. 见[文 45 §6.1].



(a) 倒置摆　　(b) 马蒂厄方程的稳定区域

图 4.3

(4) **自由端的弹性梁**　水平直梁一端固定在墙壁上,另一端可自由偏转. 如图 4.4. 设原点为梁在墙壁上的固定点,梁的中轴为 x 轴. 根据弹性理论和虎克定律,弹性曲线的曲率 k 与弯曲力矩 M 成正比. 而 $k=\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$,得弹性曲线的微分方程为

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{M}{EI},$$

其中 E 为梁的弹性系数(杨氏模数),I 为梁的横截面对重心(水平)线的惯性力矩.

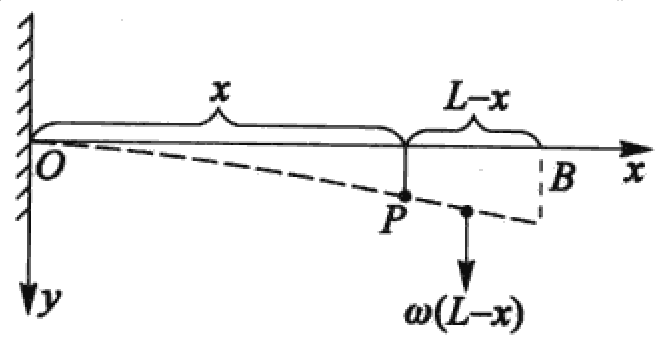


图 4.4　自由端的弹性梁

因工程结构中，梁的挠度很小，弹性曲线的曲率也很小，在方程中的 y'^2 往往可省略不计，材料力学中梁的挠度的微分方程可简化为

$$EIy'' = M.$$

对长为 L，单位长度重量为 ω 的均匀悬臂梁，位于水平线 x 处有向下的重力 $\omega(L-x)$，产生正力矩

$$M(x) = \omega(L-x) \cdot \frac{L-x}{2} = \frac{\omega}{2}(L-x)^2.$$

因此梁的挠度的微分方程化为

$$EIy'' = \frac{\omega}{2}(L-x)^2.$$

初值条件是 $y(0) = 0, y'(0) = 0$. 上式可积分得

$$y(x) = \frac{\omega}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2).$$

在自由端的偏转为 $y(L) = \frac{\omega L^4}{8EI}$. 见[文 11 §7.4].

(5) **减振器与陷波器** [书 §4.2.4]中讨论了质点的有、无阻尼的自由和强迫振动，提及在钟摆、弹簧、乐器弦线、机床主轴及电路中均有应用. 具有一个自由度、受弹性约束、阻尼及周期外力作用的力学系统可表示为

$$m\frac{d^2q}{dt^2} + \beta\frac{dq}{dt} + kq = F = F_0\sin\omega t,$$

其中参数 m 依赖于系统惯性，β 决定阻尼，k 为弹性约束，F_0 为周期外力振幅，而 q 为位移. 相应地，以 Q 表示电容为 C 的电容器电荷，I 为电流，R 为电阻，L 为线圈电感，包含周期变化电动势(发电机)的电路系统则表示为

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E_0\sin\omega t.$$

力学与电学系统间的类比，可用同一微分方程表示不同系统. 如[书 §4.2.4]讨论的质点振动所示，系统振动可能产生共振. 对有

害的共振如桥梁及建筑结构等，可以通过加入吸收能量的装置（减振器）减弱或消除共振．其方法是增加质量 m，并在两个质量之间放一个弹簧及一个缓冲器．相应的电路系统中的装置称为陷波器，用于抑制外加电压引起的共振．见图 4.5[文 11 图 3.2]．可以通过详细分析建立减振器与陷波器理论，见[文 11 §6.4]．

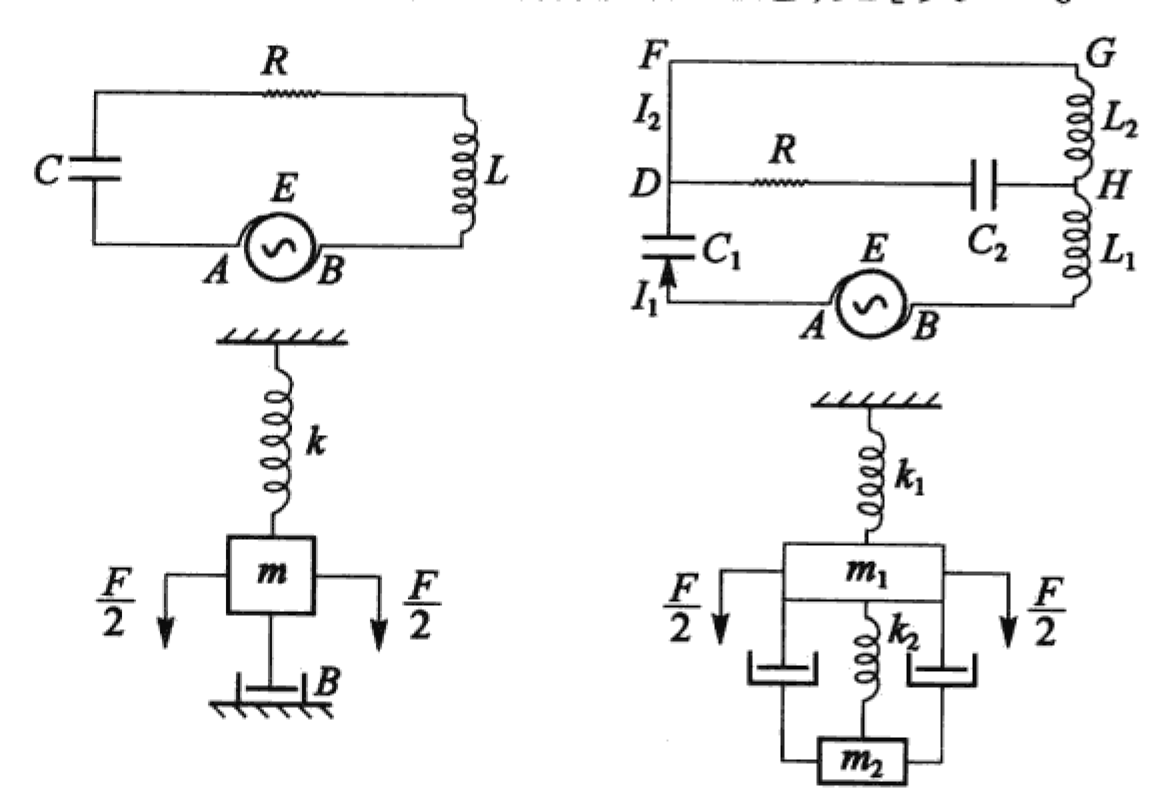


图 4.5　减振器与陷波器

*(6) **开普勒定律和万有引力定律**　15 世纪波兰的哥白尼提出科学的"日心说"推翻了统治西方一千多年的"地心说"，引起了人类宇宙观的重大革命．16 世纪丹麦的弟谷·布拉赫观测行星运动，积累了二十多年的天体方位的测量数据．17 世纪，他的助手，德国人开普勒运用数学工具分析研究这些数据，得出开普勒行星运动三定律．牛顿在此基础上利用牛顿运动定律以微积分为工具演绎出万有引力定律．

开普勒行星运动三定律可表示为① 行星绕太阳以椭圆轨道运动，太阳位于其焦点上 $r=\dfrac{p}{1+e\cos\theta}, p=\dfrac{b^2}{a}, b^2=a^2(1-e^2)$；② 单位时间内，行星扫过的面积为常数$\dfrac{1}{2}r^2\dot{\theta}=A$；③ 行星运行周

期的平方与行星轨道长半轴的三次方成正比 $T^2=ka^3$,k 为绝对常数. 而牛顿运动定律为 $f=m_1\ddot{\boldsymbol{r}}$,其中 f 为太阳与行星间的作用力,m_1 为行星质量. 如图 4.6,在极坐标系 (r,θ) 中选择基向量 $\boldsymbol{u}_r,\boldsymbol{u}_\theta$,

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}_r=\boldsymbol{i}\cos\theta+\boldsymbol{j}\sin\theta,\\ \boldsymbol{u}_\theta=-\boldsymbol{i}\sin\theta+\boldsymbol{j}\cos\theta.\end{cases}$$

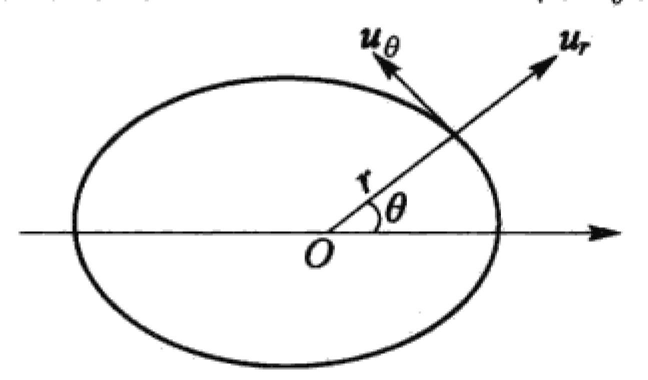


图 4.6　极坐标系中的行星运动轨道

则向径 $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{u}_r$. 因

$$\dot{\boldsymbol{u}}_r=-\boldsymbol{i}\sin\theta\cdot\dot{\theta}+\boldsymbol{j}\cos\theta\cdot\dot{\theta}=\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta,$$

$$\dot{\boldsymbol{u}}_\theta=-\boldsymbol{i}\cos\theta\cdot\dot{\theta}-\boldsymbol{j}\sin\theta\cdot\dot{\theta}=-\dot{\theta}\boldsymbol{u}_r$$

得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{r}}&=\dot{r}\boldsymbol{u}_r+r\dot{\boldsymbol{u}}_r=\dot{r}\boldsymbol{u}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta,\\ \ddot{\boldsymbol{r}}&=\ddot{r}\boldsymbol{u}_r+\dot{r}\dot{\boldsymbol{u}}_r+\dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta+r\ddot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta+r\dot{\theta}\dot{\boldsymbol{u}}_\theta\\ &=\ddot{r}\boldsymbol{u}+2\dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta+r\ddot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta-r\dot{\theta}^2\boldsymbol{u}_r\\ &=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{u}_\theta.\end{aligned}\qquad(*)$$

由②得 $\dot{\theta}=\dfrac{2A}{r^2},\ddot{\theta}=-\dfrac{4A}{r^3}\dot{r}$,即 $r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0$. 于是有

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_r.\qquad(**)$$

现求 $\dot{r}$,由①及 $\dot{\theta}$ 得 $\dot{r}=\dfrac{pe\sin\theta\cdot\dot{\theta}}{(1+e\cos\theta)^2}=\dfrac{r^2}{p}e\sin\theta\cdot\dot{\theta}=\dfrac{2A}{p}e\sin\theta.$

于是 $\ddot{r}=\dfrac{2A}{p}e\cos\theta\cdot\dot{\theta}$,再次利用①及 $\dot{\theta}$ 可得 $\ddot{r}=\dfrac{4A^2}{r^3}\left(1-\dfrac{r}{p}\right)$. 从而 $(**)$ 变为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\left[\frac{4A^2}{r^3}\left(1-\frac{r}{p}\right)-r\frac{4A^2}{r^4}\right]\boldsymbol{u}_r=-\frac{4A^2}{pr^2}\boldsymbol{u}_r.\qquad(***)$$

根据 A,a,b 及 T 的定义,任一行星的运行周期满足 $TA=ab$. 由③及 p 的定义知 $\dfrac{A^2}{p}=\dfrac{\pi^2}{k}$,即 $\dfrac{A^2}{p}$ 为与具体行星无关的绝对常数. 记 $G=\dfrac{4\pi^2}{km}$,则 G 只依赖于太阳质量. 从而 $(***)$ 可写为 $\ddot{\boldsymbol{r}}=$

$-G\frac{m}{r^2}\boldsymbol{u}_r$. 由牛顿运动定律 $\boldsymbol{f}=m_1\ddot{\boldsymbol{r}}=-G\frac{m_1 m}{r^2}\boldsymbol{u}_r$，即 $f=G\frac{m_1 m}{r^2}$，此即为万有引力定律. 作用力方向在行星与太阳连线上，指向太阳. G 称为万有引力常数，与具体行星无关. 于是由开普勒定律和牛顿运动定律可推导出万有引力定律.

反之，可由万有引力定律推导开普勒定律. 由万有引力定律及极坐标下的加速度表示(*)与(**)，顾及作用力方向，可得行星运动方程

$$\begin{cases}\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-G\dfrac{m}{r^2},\\ r(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})=0.\end{cases}$$

积分第二式得 $r^2\dot{\theta}=2A$，这便是开普勒第二定律，A 表示单位时间 $\boldsymbol{r}$ 扫过的面积. 再代入第一式有 $\ddot{r}-\frac{4A^2}{r^3}=-G\frac{m}{r^2}$. 如令 $u=\frac{1}{r}$，再用前面结果则有 $\dot{u}=\frac{-\dot{r}}{r^2}=\frac{-\dot{r}\dot{\theta}}{2A}$. 于是 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=\dot{u}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\dot{u}}{\dot{\theta}}=\frac{-\dot{r}}{2A}$，进一步得 $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{-\dot{r}}{2A}\right)\Big/\dot{\theta}=-\frac{r^2\ddot{r}}{4A^2}=-\frac{1}{r}+\frac{Gm}{4A^2}$，即 $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u=\frac{Gm}{4A^2}$. 此为二阶线性方程，有通解 $u=\frac{Gm}{4A^2}[1+e\cos(\theta-\theta_0)]$，这里 e,θ_0 为积分常数. 即 $r=p[1+e\cos(\theta-\theta_0)]^{-1}$，$p=\frac{4A^2}{Gm}$. 如取初值 $t=0,\theta_0=0$，$r(0)=r_0$，则有 $r_0=p(1+e)^{-1}$，$e=\frac{p}{r_0}-1$，行星运动方程的解为

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta},e=\frac{p}{r_0}-1,p=\frac{4A^2}{Gm},$$

e 称为离心率. 当 $e<1$ 时为椭圆，当 $e>1$ 时为双曲线，当 $e=1$ 时为抛物线. 对行星而言，初始位置 r_0 足够大，因此 $0<e<1$. 从而有 $0<\min r\leqslant r\leqslant\max r<R$，行星运行轨道是周期变化的椭圆，这便得到开普勒第一定律. $e\geqslant1$ 时 r 可趋于无穷大，这实际上是彗星的运

行轨道. 对 $e<1$ 的椭圆,其长、短半轴分别为 a,b 时有关系式 $p=b^2/a, b^2=a^2(1-e^2)$. 再利用椭圆面积为 πab 及椭圆运动的周期 T 与 A 的关系 $TA=\pi ab$,可得 $T^2A^2=\pi^2a^2b^2=\pi^2a^3p$. 如令 $k=\pi^2p/A^2$,则得 $T^2=ka^3$. 这便是开普勒第三定律. 这样由万有引力定律推导出了开普勒三个定律. 见[文 13 §1.2].

*(7) **人造卫星的运行轨道** 人造卫星在最后一级运载火箭熄火后进入其运行轨道,现讨论轨道的形状与发射角度和发射速度(最后一级火箭的最终速度)的关系.

与地球质量 M 相比,人造卫星质量 m 很小,可视人造卫星为质点,也不计其他星球和空气阻力的影响. 以地心为原点 O,地心与发射点 $A(0,R)$ 的连线为 y 轴(地球半径 $R=63\times10^5$ m),发射方向在直角坐标系的 Oxy 平面上,设发射角为 α,人造卫星位置为 $P(x,y)$. 根据万有引力定律,对人造卫星存在引力

$$F=-k\frac{mM}{r^2},$$

这里 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 为距离,$k=6.685\times10^{-14}\ \mathrm{m^3/g\cdot s^2}$ 为引力常数.

如同图 4.6 及前面(6)中的推导,在极坐标系(r,θ)中的基向量 $\boldsymbol{u}_r,\boldsymbol{u}_\theta$ 有 $\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{r}\boldsymbol{u}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta$, $\ddot{\boldsymbol{r}}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{u}_\theta$. 人造卫星的运动方程 $m\ddot{\boldsymbol{r}}=-k\dfrac{mM}{r^2}\boldsymbol{u}_r$ 可化为 $u=\dfrac{1}{r}$ 的二阶线性非齐次微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u=\dfrac{kM}{c_1^2}$,并有通解 $u=\dfrac{kM}{c_1^2}[1+e\cos(\theta-\theta_0)]$. 即得运动方程的解 $r=\dfrac{c_1^2}{kM}[1+e\cos(\theta-\theta_0)]^{-1}$.

当 $e<1$ 时人造卫星的运动轨道为椭圆;当 $e=1$ 时人造卫星的运动轨道为抛物线;当 $e>1$ 时人造卫星的运动轨道为双曲线. 如图 4.7.

考虑初值条件

$$x(0)=0, y(0)=R, \dot{x}(0)=v_0\cos\alpha, \dot{y}(0)=v_0\sin\alpha.$$

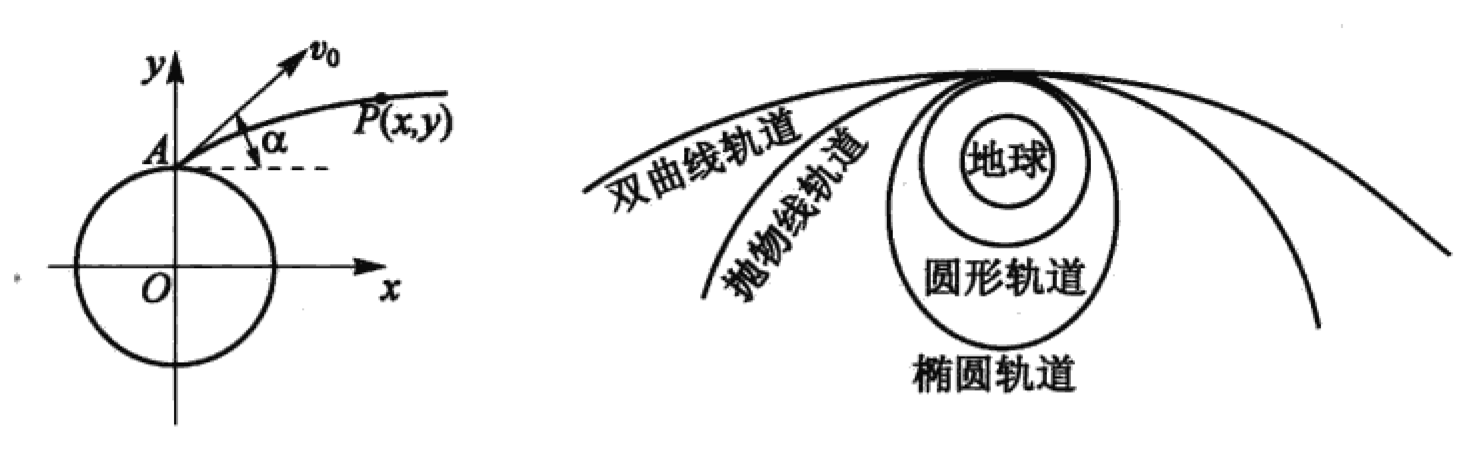


图 4.7 人造卫星的运动轨道

当 $t=0$ 时 $\theta=\frac{\pi}{2}, r=R, \dot{x}(0)=-R\dot{\theta}(0)=v_0\cos\alpha, \dot{y}(0)=\dot{r}(0)$，故有

$$\dot{\theta}(0)=-\frac{v_0}{R}\cos\alpha, \dot{r}(0)=v_0\sin\alpha, c_1=R^2\dot{\theta}(0)=-v_0R\cos\alpha,$$

运动方程的解为

$$r=\frac{v_0^2R^2\cos^2\alpha}{kM}[1+e\cos(\theta-\theta_0)]^{-1}\equiv p[1+e\cos(\theta-\theta_0)]^{-1},$$

其中记 $p=\frac{v_0^2R^2\cos^2\alpha}{kM}$. 再由 $t=0$ 时 $\theta=\frac{\pi}{2}, r=R$ 及 $\dot{r}(0)=v_0\sin\alpha$ 可得

$$R=p\left[1+e\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0\right)\right]^{-1}=p[1+e\sin\theta_0]^{-1},$$

即

$$e\sin\theta_0=\frac{p}{R}-1.$$

再利用

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=p[1+e\cos(\theta-\theta_0)]^{-2}[-e\cos(\theta-\theta_0)]\dot{\theta}$$

及 $\dot{r}(0)=v_0\sin\alpha$，令 $t=0$ 有

$$\dot{r}(0)=v_0\sin\alpha$$

$$=p\left[1+e\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0\right)\right]^{-2}\left[-e\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0\right)\right]\dot{\theta}(0)$$

$$=p(1+e\sin\theta_0)^{-2}(-e\cos\theta_0)\frac{v_0}{R}\cos\alpha,$$

即

$$R\tan\alpha=-p(1+e\sin\theta_0)^{-2}e\cos\theta_0.$$

与上面的式子联立解得

$$e\cos\theta_0=-\frac{p}{R}\tan\alpha.$$

于是

$$e^2=\left(\frac{p}{R}-1\right)^2+\left(\frac{p}{R}\right)^2\tan^2\alpha.$$

得到 e 便可进一步求出 $\theta_0=\arccos\left[\left(\frac{p}{R}-1\right)\cdot\frac{1}{e}\right]$. 这样运动方程的解

$$r=p[1+e\cos(\theta-\theta_0)]^{-1}$$

中的 e,θ_0 由初值条件完全确定.

现在计算由发射速度 v_0 和发射角度 α 确定的运动轨道. 当 $e=0$时轨道为一个圆,此时要求$\frac{p}{R}=1$, $\tan\alpha=0$,即 $p=R,\alpha=0$,由 $p=\frac{v_0^2R^2\cos^2\alpha}{kM}$知

$$v_0^2=\frac{kM}{R}=\frac{6.685\times10^{-23}\times5.98\times10^{27}}{6\ 370}=62.76,$$

$$v_0\approx7.9\ \text{km/s}.$$

速度 7.9 km/s 称为第一宇宙速度. 其轨道为一个圆.

当 $e=1$ 时要求 $1=\left(\frac{p}{R}-1\right)^2+\left(\frac{p}{R}\right)^2\tan^2\alpha=\left(\frac{p}{R}\right)^2(1+\tan^2\alpha)-\frac{2p}{R}+1$,即

$$\frac{p}{R}(1+\tan^2\alpha)=2,\frac{v_0^2R}{kM}=2,v_0^2=\frac{2kM}{R},$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kM}{R}} = \sqrt{2}v_1 \approx 11.2 \text{ km/s}.$$

速度 11.2 km/s 称为第二宇宙速度. 其轨道为抛物线.

当 $0 < e < 1$ 即发射速度 $v_1 < v_0 < v_2$ 时轨道为椭圆. 当 $e > 1$ 即发射速度 $v_0 > v_2$ 时轨道为双曲线. 见[文 18(上) §3.4.8].

§4.3.4 历史与人物

(1) **简史(高阶微分方程)** 1691 年詹姆斯·伯努利就已在研究航帆在风力下的形状问题时引出了二阶微分方程. 泰勒及约翰·伯努利等研究了二阶方程音乐弦的振动. 约翰·伯努利的儿子丹尼尔·伯努利研究了更广泛的悬链线的振动. 欧拉在二阶及高阶微分方程中有一系列的工作,如摆的振动,二阶谐振方程及其强迫振动,还得到常系数线性常微分方程的通解,并利用变换将欧拉方程化为常系数线性方程. 拉格朗日于 1775 年发表了求线性微分方程的常数变易法. 莱布尼茨得到齐次方程和线性方程的通解. 里卡蒂曾为求解二阶常微分方程降阶化为一阶方程而提出里卡蒂方程. 他的降阶思想是处理高阶常微分方程的主要方法. 19 世纪,行星轨道的稳定性问题引出希尔(Hill)对二阶线性周期系数微分方程的研究.

初等函数包括代数函数、初等超越函数(三角函数、反三角函数、指数函数、对数函数)及其有限次加减乘除和取函数的复合形成的函数. 初等函数之外有高等超越函数或常称为特殊函数. 18 世纪以来,有几百种特殊函数曾被研究,现在大多数已被遗忘,但有少数几个特殊函数意义重大、影响深远.

在 18、19 世纪特殊函数曾被许多最伟大的数学家热心研究过,包括欧拉、高斯、阿贝尔、雅可比、魏尔斯特拉斯、黎曼、厄尔米特、庞加莱.

有一大批特殊函数是通过寻求二阶线性微分方程的幂级数解而被发现的.

椭圆函数是直接由积分定义的特殊函数.高斯早已发现但未撰文发表.后来阿贝尔和雅可比于1827—1829年发表了有关文章,当雅可比找到高斯时,高斯才拿出30年前的手稿证实此事.勒让德把椭圆函数、庞加莱把自守函数同微分方程联系起来研究.超几何级数满足的微分方程也是高斯发现的.

贝塞尔函数最早出现在丹尼尔·伯努利关于悬链振动的研究中,后又在欧拉研究的圆膜振动和贝塞尔研究的行星运动中出现.该函数在应用数学和纯数学中都有重要应用.

(2) **泰勒**(Brook Taylor,1685—1731)　英国数学家,18世纪早期英国牛顿学派代表人物,曾任皇家学会秘书.他最著名的是发现泰勒级数,成为有限差分理论的奠基人.他还讨论了微积分对一系列物理问题的应用,包括二阶常微分方程表示的弦的振动,并考察了常微分方程的奇异解.在数学上有一系列创造性工作.

(3) **勒让德**(A. M. Legendre,1752—1833)　法国数学家.在椭圆函数、数论、最小二乘法方面做过很好的工作,但却被更年轻、更有才能的人超过.特别是研究了椭圆函数40年,其两卷论著刚出版,阿贝尔和雅可比的新发现就使其面貌完全改观.

(4) **贝塞尔**(F. W. Bessel,1784—1846)　著名德国天文学家,为高斯的密友.15岁辍学当学徒,业余学习天文、地理和数学,20岁发表彗星轨道测量论文.1810年任柯尼斯堡天文台台长.1812年当选为柏林科学院院士,是确定恒星距离的第一人.他导出用于天文计算的贝塞尔公式,提出贝塞尔函数.1844年发现天狼星的伴星(双星).

(5) **阿贝尔**(N. H. Abel,1802—1829)　出身挪威教士家庭.是19世纪最先进的数学家之一.曾用积分方程解古典等时线问题,证明一般五次方程不能用根式求解,通过二项级数奠定了收敛的一般理论.其关于超越函数的巨著含有代数函数的积分(阿贝尔定理)、阿贝尔函数及代数几何的基础,被厄尔米特认为"书中留下的问题足够数学家忙500年".后期阿贝尔主要研究椭圆函

数理论. 在柏林阿贝尔曾启导克雷勒(A. L. Creiie)创办世界上第一个数学期刊《纯粹与应用数学学报》,在前3期里刊载了阿贝尔的22篇文章. 阿贝尔在26岁时因病早逝.

历史人物尚有:欧拉([§1.3.4-(3)]),莱布尼茨([§2.3.4-(2)]),伯努利家族([§2.3.4-(3)]),拉格朗日([§5.3.4-(2)]),里卡蒂([§2.3.4-(4)]),高斯([§1.3.4-(4)]),雅可比([§7.3.4-(5)]),黎曼([§1.3.4-(5)]),庞加莱([§6.3.4-(2)]).

§4.4 习题与习题解答

§4.4.1 测试练习解答

1. (1) 由函数 $\sin ax,\cos ax$ 构成的朗斯基行列式

$$W[\sin ax,\cos ax]\equiv\begin{vmatrix}\sin ax & \cos ax\\ a\cos ax & -a\sin ax\end{vmatrix}=-a\neq0,$$

因此函数 $\sin ax,\cos ax$ 当 $a\neq0$ 时线性独立.

(2) 朗斯基行列式

$$W[1,x,x^2]\equiv\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=2\neq0,$$

因此函数 $1,x,x^2$ 线性独立.

(3) 朗斯基行列式

$$W[x,\mathrm{e}^x,x\mathrm{e}^x]\equiv\begin{vmatrix}x & \mathrm{e}^x & x\mathrm{e}^x\\ 1 & \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x\\ 0 & \mathrm{e}^x & 2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x\end{vmatrix}=\mathrm{e}^{2x}(x-2)\neq0,$$

因此函数 $x,\mathrm{e}^x,x\mathrm{e}^x$ 当 $x\neq2$ 时线性独立.

2. (1) 因 $y=c_1\mathrm{e}^{2x}+c_2\mathrm{e}^{-3x}$①, $y'=2c_1\mathrm{e}^{2x}-3c_2\mathrm{e}^{-3x}$②, $y''=4c_1\mathrm{e}^{2x}+9c_2\mathrm{e}^{-3x}$③, 由3①+②及2①-②可得 $3y+y'=5c_1\mathrm{e}^{2x}$, $2y-$

$y' = 5c_2 e^{-2x}$. 代入③式，消去 c_1, c_2 并化简得 $y'' = \frac{4}{5}(3y + y') + \frac{9}{5}(2y - y')$，即 $y'' + y' - 6y = 0$. 微分方程为 $y'' + y' - 6y = 0$.

（2）因 $y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$①，$y' = 2c_1 x + c_2(2x\ln x + x)$②，$y'' = 2c_1 + c_2(2\ln x + 3)$③，由 $(2\ln x + 1) \times$① $- x\ln x \times$②：$(2\ln x + 1)y - x\ln x \cdot y' = x^2 c_1$ 及 $-2$① $+ x \times$②：$-2y + xy' = x^2 c_2$. 代入 $x^2 \times$③式，消去 c_1, c_2 得

$$x^2 y'' = 2(2\ln x + 1)y - 2x\ln x \cdot y' + (-2y + xy')(2\ln x + 3) = -4y + 3xy'.$$

微分方程为 $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$.

（3）由 $y^2 = c_1 x + c_2 + 2x^2$，得 $2yy' = c_1 + 4x$，$2y'^2 + 2yy'' = 4$，知微分方程为 $yy'' + y'^2 = 2$.

3. （1）特征方程 $\lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i) = 0$，有 1 对共轭复特征根 $\lambda = \pm i$，齐次方程通解为 $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. 用常数变易方法，非齐次线性方程的特解 $y(x) = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$ 满足条件

$$\cos x \cdot c_1'(x) + \sin x \cdot c_2'(x) = 0,$$

$$-\sin x \cdot c_1'(x) + \cos x \cdot c_2'(x) = \frac{1}{\sin x}.$$

由此可解得 $c'_1(x), c'_2(x)$，积分后得特解.

（2）特征方程 $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0$ 有 2 重特征根 $\lambda = -1$. 齐次方程通解为 $y = (c_1 + xc_2)e^{-x}$. 用常数变易法，设非齐次方程的特解为 $y(x) = [c_1(x) + xc_2(x)]e^{-x}$，它满足条件

$$c_1'(x) + xc'_2(x) = 0,$$

$$-c_1'(x) + (1 - x)c_2'(x) = 3\sqrt{x + 1}.$$

解得 $c_1'(x), c'_2(x)$ 后积分得特解.

（3）方程为欧拉方程，设 $x = e^t$，$t = \ln x$，$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}$，$\frac{d^2 y}{dx^2} =$

$e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$，方程可化为$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=8e^{3t}$，其特征方程 $\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2=0$ 有 2 重特征根 $\lambda=1$. 齐次方程的通解为 $y=(c_1+tc_2)e^t$. 新方程右端属于 Ⅰ 型 $k=0,m=0$，可设其特解为 $\tilde{y}=Ae^{3t}$，求得特解后组成方程的通解 $y(t,c_1,c_2)$. 原方程的通解为 $y=y(\ln x,c_1,c_2)$.

亦可直接设 $y=x^K$，齐次方程可化为 $K(K-1)-K+1=0$ 有 2 重根 $K=1$. 齐次方程的通解为 $y=(c_1+c_2\ln x)x$. 用待定系数法设非齐次线性方程有特解 $y=Ax^3$.

(4) 方程化为 $x^2y''-2y=6\frac{\ln x}{x}$时为欧拉方程，设 $x=e^t,t=\ln x$. 方程可化为$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-2y=6te^{-t}$. 特征方程 $\lambda^2-\lambda-2=(\lambda+1)(\lambda-2)=0$ 有 2 个单根 $\lambda=-1,2$，齐次方程的通解为 $y=c_1e^{-t}+c_2e^{2t}$. 其非齐次项 $6te^{-t}$对 $\lambda=-1$ 属于 Ⅰ 型 $k=1,m=1$. 有形如 $\tilde{y}=t(B_0t+B_1)e^{-t}$的特解.

亦可直接设 $y=x^K$，齐次方程可化为 $K(K-1)-2=(K+1)\cdot(K-2)=0$ 有 2 个单根 $K=-1,2$，齐次方程的通解为 $y=c_1x^{-1}+c_2x^2$. 可用常数变易方法求非齐次线性方程的特解 $y(x)=c_1(x)x^{-1}+c_2(x)x^2$.

(5) 令 $2x+3=t,2dx=dt,y'=\frac{dy}{dx}=2\frac{dy}{dt},y'''=\frac{d^3y}{dx^3}=8\frac{d^3y}{dt^3}$，方程化为欧拉方程 $4t^3\frac{d^3y}{dt^3}+3t\frac{dy}{dt}-3y=0$. 设 $y=x^K$，方程可化为

$$\begin{aligned}4K(K-1)(K-2)+3K-3&=(K-1)(4K^2-8K+3)\\&=(K-1)(2K-1)(2K-3)=0.\end{aligned}$$

有根 $K=1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}$. 求得通解 $y=c_1t+c_2t^{\frac{1}{2}}+c_3t^{\frac{3}{2}}$.

4. (1) 特征方程

$$\begin{aligned}\lambda^4+4&=(\lambda^2-2\mathrm{i})(\lambda^2+2\mathrm{i})\\&=(\lambda+\sqrt{2}\mathrm{i}^{\frac{1}{2}})(\lambda-\sqrt{2}\mathrm{i}^{\frac{1}{2}})(\lambda+\sqrt{2}\mathrm{i}^{-\frac{1}{2}})(\lambda-\sqrt{2}\mathrm{i}^{-\frac{1}{2}})=0\end{aligned}$$

有 2 对共轭复根 $\lambda=\pm\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\pm\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\pm(1\pm\mathrm{i})$. 通解形式为

$$y=\mathrm{e}^x(c_1\cos x\pm c_2\sin x)+\mathrm{e}^{-x}(c_3\cos x\pm c_4\sin x).$$

(2) 特征方程 $\lambda^5+8\lambda^3+16\lambda=\lambda(\lambda^2+4)^2=\lambda(\lambda+2\mathrm{i})^2(\lambda-2\mathrm{i})^2=0$ 有单根 0 和 2 重共轭复根 $\lambda=\pm 2\mathrm{i}$. 通解有形式 $y=c+(c_1+c_2x)\cos 2x+(c_3+c_4x)\sin 2x$.

(3) 特征方程 $\lambda^2+2\lambda-3=(\lambda-1)(\lambda+3)=0$ 有特征根 $\lambda=1,-3$. 非齐次项 $x^2\mathrm{e}^x$ 对 $\lambda=1$ 属于 Ⅰ 型 $k=1,m=2$,特解应为 $\tilde{y}=x(B_0x^2+B_1x+B_2)\mathrm{e}^x$.

(4) 特征方程 $\lambda^2-5\lambda=\lambda(\lambda-5)=0$ 有特征根 $\lambda=0,5$. 非齐次项 $3x^2+\sin 5x$ 中 $3x^2$ 项对 $\lambda=0$ 属于 Ⅰ 型 $k=1,m=2$. 特解应为 $\tilde{y}_1=x(B_0x^2+B_1x+B_2)$;非齐次项中 $\sin 5x$ 属于 Ⅱ 型 $k=0,m=0$,特解应为 $\tilde{y}_2=C_1\cos 5x+C_2\sin 5x$.

(5) 特征方程 $\lambda^3+\lambda=\lambda(\lambda+\mathrm{i})(\lambda-\mathrm{i})=0$ 有单根 0 和 1 重共轭复根 $\lambda=\pm\mathrm{i}$. 非齐次项 $\sin x+x\cos x$ 对 $\lambda=\pm\mathrm{i}$ 属于 Ⅱ 型 $k=1,m=1$,特解应为 $\tilde{y}=x[(B_1x+B_3)\cos x+(B_2x+B_4)\sin x]$.

(6) 特征方程 $\lambda^2-9=(\lambda-3)(\lambda+3)=0$ 有特征根 $\lambda=3,-3$. 非齐次项中 $\mathrm{e}^{-3x}x^2$ 对 $\lambda=-3$ 属于 Ⅰ 型 $k=1,m=2$,特解应为 $\tilde{y}_1=x(B_0x^2+B_1x+B_2)\mathrm{e}^{-3x}$. 非齐次项 $\mathrm{e}^{-3x}\sin 3x$ 属于 Ⅱ 型 $k=0,m=0$,特解为 $\tilde{y}_2=\mathrm{e}^{-3x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$.

5. (1) 二阶缺 x,可降阶,令 $z=y',y''=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$,方程化为 $yz\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=z^2-1$. 可分离变量解之.

(2) 方程缺 y,可降阶. 令 $z=y'$,方程化为 $z=xz'-z'^2$. 为克莱罗方程(见[书 §3.4.2]). 有通解 $z=cx-c^2$.

(3) 方程缺 x,y,可降阶. 先令 $z=y'$,方程化为 $zz''=z'^2+z^2z'$. 再令 $z'=s(z)$,$z''=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=s's$,方程再变为 $zss'=s^2+z^2s$,有 $s=0$ 及 $s'=\frac{s}{z}+z$. 后式为 $s'=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z}$的非齐次线性方程,可对其求解.

(4) 方程对 y,y'是齐次的,令 $y'=yz$,$y''=yz^2+yz'$,方程可化为 $-(x^2+1)y^2z'=xy^2z$. 有 $(x^2+1)z'=-xz$,可直接积分.

(5) 方程对 y,y'是齐次的. 令 $y'=yz$,$y''=yz^2+yz'$,方程可化为

$$x^2y(yz^2+yz')=(y-xyz)^2,x^2z^2+x^2z'=1-2xz+x^2z^2,$$

$$z'=-\frac{2}{x}z+\frac{1}{x^2},$$

是非齐次线性方程.

6. (1) 特解为 $y=x$.

(2) 特解为 $y=\mathrm{e}^x$.

(3) 特解为 $y=\mathrm{e}^{-x}$.

(4) 特解为 $y=\mathrm{e}^{mx}$.

7. (1) 方程为二阶齐次线性方程 $y''+\frac{3}{x}y'-\frac{3}{x^2}y=0$. $p(x)=\frac{3}{x}$,$q(x)=-\frac{3}{x^2}$,因 $xp(x)=3$,$x^2q(x)=-3$ 可展成 x 的幂级数,根据[书 §4.3.2 - 定理11],方程有形如 $y=\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^{\beta+k}$的级数解. 代入得 $\beta(\beta-1)b_0+3\beta b_0-3b_0=0$,$\beta^2+2\beta-3=(\beta-1)(\beta+3)=0$,即可取 $\beta=-3$ 的级数解 $y=a_{-3}x^{-3}+a_{-2}x^{-2}+a_{-1}x^{-1}+a_0+a_1x+\cdots$.

(2) 方程化为二阶齐次线性方程 $y''-\frac{x+4}{x}y'+\frac{4}{x^2}y=0$. $p(x)=-\frac{x+4}{x}$,$q(x)=\frac{4}{x^2}$,因 $xp(x)=-(x+4)$,$x^2q(x)=4$ 可展成 x

的幂级数,根据[书§4.3.2-定理11],方程有形如 $y=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{\beta+k}$ 的级数解. 代入得 $\beta(\beta-1)b_0-4\beta b_0+4b_0=0$, $\beta^2-5\beta+4=(\beta-1)(\beta-4)=0$. 即可取 $\beta=1$ 的级数解 $y=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots$.

(3) 引入新变量 $t=2x$, $\frac{dy}{dx}=2\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=4\frac{d^2y}{dt^2}$,方程化为

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+\left[t^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]y=0,$$

是贝塞尔方程.

*(4) 引入新变量 $t=x^2$, $u=t^{-\frac{3}{4}}y$,可将方程化为贝塞尔方程. 见[§4.3.2-(7)]. 具体求解见[§4.4.2-6(4)].

8. (1) 方程经拉普拉斯变换后变为

$$s^2X(s)-2sX(s)+X(s)=\frac{1}{s^2}, X(s)=\frac{1}{s^2(s-1)^2},$$

化为分部分式后再经拉普拉斯反变换求解.

(2) 方程经拉普拉斯变换后变为

$$s^2X(s)-s-2a[sX(s)-1]+(a^2+b^2)X(s)=0,$$
$$[s^2-2as+(a^2+b^2)]X(s)=s-2a,$$

有解 $X(s)=\frac{s-2a}{(s-a)^2+b^2}$. 再经拉普拉斯反变换求解.

(3) 方程经拉普拉斯变换后变为

$$s^2X(s)-2s-sX(s)+2=\frac{2}{s^2+1}, s(s-1)X(s)=-2+2s+\frac{2}{s^2+1},$$

$$X(s)=-\frac{2}{s(s-1)}+\frac{2}{s-1}+\frac{2}{s(s-1)(s^2+1)}.$$

化为分部分式后经拉普拉斯反变换求解.

(4) 方程经拉普拉斯变换后变为

$$s^3X(s)+3s^2X(s)+3sX(s)+X(s)=\frac{3!}{(s+1)^4}, X(s)=\frac{6}{(s+1)^7}.$$

再经拉普拉斯反变换求解.

§4.4.2 补充习题解答

1. (1) 特征方程 $\lambda^2+1=(\lambda+i)(\lambda-i)=0$ 有 1 对共轭特征值 $\lambda=\pm i$. 齐次方程有基本解 $y_1=\cos x, y_2=\sin x$,通解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x$.

解 1 用常数变易方法,非齐次线性方程的特解 $y(x)=c_1(x)\cos x+c_2(x)\sin x$ 满足条件

$$\cos x\cdot c_1'(x)+\sin x\cdot c_2'(x)=0, \quad ①$$

$$-\sin x\cdot c_1'(x)+\cos x\cdot c_2'(x)=\frac{1}{\sin x}. \quad ②$$

由此

$$①\times\cos x-②\times\sin x: c'_1(x)=-1,$$

$$①\times\sin x+②\times\cos x: c'_2(x)=\frac{\cos x}{\sin x}.$$

积分得 $c_1(x)=-x, c_2(x)=\ln|\sin x|$. 特解为 $y(x)=-x\cos x+\sin x\ln|\sin x|$. 方程的通解为 $y=(c_1-x)\cos x+(c_2+\ln|\sin x|)\cdot\sin x$.

解 2 直接用二阶方程的常数变易公式见[书 §5.2.2 -(5.31)])求特解

$$\begin{aligned}\tilde{y}&=\int_0^x\frac{y_2(x)y_1(s)-y_1(x)y_2(s)}{y_1(s)y'_2(s)-y_2(s)y'_1(s)}f(s)\mathrm{d}s\\&=\int_0^x\frac{\sin x\cos s-\cos x\sin s}{\cos^2 s+\sin^2 s}\cdot\frac{1}{\sin s}\mathrm{d}s\\&=\int_0^x\left(\sin x\cdot\frac{\cos s}{\sin s}-\cos x\right)\mathrm{d}s\\&=\sin x\cdot\ln|\sin x|-x\cos x.\end{aligned}$$

通解为 $y=(c_1-x)\cos x+(c_2+\ln|\sin x|)\sin x$.

(2) 用常数变易法,接[§4.4.1 -3(2)]有

$$c_1'(x)+xc_2'(x)=0, \quad ①$$

$$-c_1'(x)+(1-x)c_2'(x)=3\sqrt{x+1}, \quad ②$$

由此

$$①\times(1-x)-②\times x: c_1'(x)=-3x\sqrt{x+1},$$

$$①+②: c_2'(x)=3\sqrt{x+1}.$$

积分得

$$c_1(x)=-2x(x+1)^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}, c_2(x)=2(x+1)^{\frac{3}{2}}.$$

特解为 $y(x)=\frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}e^{-x}$. 方程的通解为 $y=(c_1+xc_2)e^{-x}+\frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}e^{-x}$.

(3) 接[§4.4.1-3(3)].

解 1 设 $x=e^t$ 后新方程特解设为 $\tilde{y}=Ae^{3t}$,代入得 $A=2$. 即特解 $\tilde{y}=2e^{3t}$. 变换后方程的通解 $y=(c_1+tc_2)e^t+2e^{3t}$,原方程的通解为 $y=(c_1+c_2\ln x)x+2x^3$.

解 2 直接设 $y=x^K$,特解设为 $y=Ax^3$,代入得 $A=2$. 即通解为 $y=(c_1+c_2\ln x)x+2x^3$.

(4) 接[§4.4.1-3(4)].

解 1 设 $x=e^t$ 后新方程特解应为 $\tilde{y}=t(B_0t+B_1)e^{-t}$. 由 $\tilde{y}'=[B_0(-t^2+2t)+B_1(-t+1)]e^{-t}$, $\tilde{y}''=[B_0(t^2-4t+2)+B_1(t-2)]e^{-t}$,代入方程可求得 $-6tB_0+2B_0-3B_1=6t$, $B_0=-1$, $B_1=-\frac{2}{3}$. 即特解为 $\tilde{y}=-t\left(t+\frac{2}{3}\right)e^{-t}$,有通解 $y=c_1e^{-t}+c_2e^{2t}-t\left(t+\frac{2}{3}\right)e^{-t}$. 原方程通解为 $y=c_1x^{-1}+c_2x^2-x^{-1}\ln^2x-\frac{2}{3}x^{-1}\ln x$,其中 c_1,c_2 为任意常数.

解 2 直接设 $y=x^K$,用常数变易方法求非齐次线性方程的特解,设 $y(x)=c_1(x)x^{-1}+c_2(x)x^2$. 有 $c_1'(x)x^{-1}+c_2'(x)x^2=0$, $-c_1'(x)+2c_2'(x)x^3=6\frac{\ln x}{x}$. 可解得 $3c_1'(x)=-6\frac{\ln x}{x}$, $3c_2'(x)x^3=$

$6\dfrac{\ln x}{x}$. 积分得 $c_1(x)=\tilde{c}_1-\ln^2 x, c_2(x)=c_2-\dfrac{2}{9x^3}-\dfrac{2}{3}\dfrac{\ln x}{x^3}$. 方程有解 $y=c_1x^{-1}+c_2x^2-x^{-1}\ln^2 x-\dfrac{2}{3}x^{-1}\ln x$，其中 c_1,c_2 为任意常数.

(5) 接[§4.4.1 - 3(5)]，求得通解 $y=c_1t+c_2t^{\frac{1}{2}}+c_3t^{\frac{3}{2}}$. 即原方程的通解为

$$y=c_1(2x+3)+c_2(2x+3)^{\frac{1}{2}}+c_3(2x+3)^{\frac{3}{2}},$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

2. (1) 见[§4.4.1 - 4(1)]，通解为

$$y=e^x(c_1\cos x\pm c_2\sin x)+e^{-x}(c_3\cos x\pm c_4\sin x),$$

其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数.

(2) 见[§4.4.1 - 4(2)]，通解为 $y=c+(c_1+c_2x)\cos 2x+(c_3+c_4x)\sin 2x$，其中 c,c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数.

(3) 接[§4.4.1 - 4(3)]，特解有形式 $\tilde{y}=x(B_0x^2+B_1x+B_2)e^x$，于是

$$y''+2y'-3y=B_0(12x^2+6x)e^x+B_1(8x+2)e^x+4B_2e^x=x^2e^x.$$

$$12B_0=1, 6B_0+8B_1=0, 2B_1+4B_2=0.$$

$$B_0=\frac{1}{12}, B_1=-\frac{1}{16}, B_2=\frac{1}{32}.$$

方程的通解为 $y=c_1e^x+c_2e^{-3x}+x\left(\dfrac{1}{12}x^2-\dfrac{1}{16}x+\dfrac{1}{32}\right)e^x$，其中 c_1,c_2 为任意常数.

(4) 接[§4.4.1 - 4(4)]，对应非齐次项中 $3x^2$ 的特解有形式 $\tilde{y}_1=x(B_0x^2+B_1x+B_2)$. 由

$$\tilde{y}''_1-5\tilde{y}'_1=-15B_0x^2+(6B_0-10B_1)x+2B_1-5B_2=3x^2,$$

$$B_0=-\frac{1}{5}, B_1=-\frac{3}{25}, B_2=-\frac{6}{125},$$

有特解 $\tilde{y}_1=-x\left(\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{3}{25}x+\dfrac{6}{125}\right)$.

对应非齐次项中 $\sin 5x$ 的特解有形式 $\tilde{y}_2 = C_1\cos 5x + C_2\sin 5x$. 由

$$\tilde{y}''_2 - 5\tilde{y}'_2 = 25(-C_1 - C_2)\cos 5x + 25(-C_2 + C_1)\sin 5x = \sin 5x,$$

$$C_1 + C_2 = 0, 25(-C_2 + C_1) = 1, C_1 = \frac{1}{50}, C_2 = -\frac{1}{50},$$

得特解 $\tilde{y}_2 = \frac{1}{50}\cos 5x - \frac{1}{50}\sin 5x$.

方程的通解为 $y = c_1 + c_2 e^{5x} - x\left(\frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{25}x + \frac{6}{125}\right) + \frac{1}{50}\cos 5x - \frac{1}{50}\sin 5x$,其中 c_1, c_2 为任意常数.

(5) 接[§4.4.1 - 4(5)],特解有形式

$$\tilde{y} = x[(B_1x + B_3)\cos x + (B_2x + B_4)\sin x].$$

于是

$$\begin{aligned}\tilde{y}''' + \tilde{y}' &= (6B_2 - 2B_3 - 4B_1x)\cos x + (-6B_1 - 2B_4 - 4B_2x)\sin x \\ &= \sin x + x\cos x,\end{aligned}$$

$$B_2 = B_3 = 0, B_1 = -\frac{1}{4}, B_4 = \frac{1}{4}.$$

特解为 $\tilde{y} = \frac{x}{4}\sin x - \frac{1}{4}x^2\cos x$. 方程的通解为

$$y = c_1 + \left(c_2 - \frac{1}{4}x^2\right)\cos x + \left(c_3 + \frac{1}{4}x\right)\sin x,$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数.

(6) 接[§4.4.1 - 4(6)],对应非齐次项 $e^{-3x}x^2$ 的特解形式应为 $\tilde{y}_1 = x(B_0x^2 + B_1x + B_2)e^{-3x}$. 由

$$\tilde{y}''_1 - 9\tilde{y}_1 = [-18B_0x^2 + x(6B_0 - 12B_1) + 2B_1 - 6B_2]e^{-3x} = x^2e^{-3x},$$

$$-18B_0 = 1, 6B_0 - 12B_1 = 0, 2B_1 - 6B_2 = 0,$$

$$B_0 = -\frac{1}{18}, B_1 = -\frac{1}{36}, B_2 = -\frac{1}{108},$$

有特解 $\tilde{y}_1 = -x\left(\frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{36}x + \frac{1}{108}\right)e^{-3x}$.

对应非齐次项 $e^{-3x}\sin 3x$ 的特解形式为 $\tilde{y}_2 = e^{-3x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$，由

$$\tilde{y}''_2 - 9\tilde{y}_2 = e^{-3x}[(-9C_1 - 18C_2)\cos 3x + (18C_1 - 9C_2)\sin 3x] = e^{-3x}\sin 3x,$$

$-9C_1 - 18C_2 = 0, 18C_1 - 9C_2 = 1,$

$C_1 = \dfrac{2}{45}, C_2 = -\dfrac{1}{45},$

有特解 $\tilde{y}_2 = e^{-3x}\left(\dfrac{2}{45}\cos 3x - \dfrac{1}{45}\sin 3x\right)$.

方程的通解为

$$y = c_1e^{3x} + \left(c_2 - \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{36}x^2 - \frac{1}{108}x + \frac{2}{45}\cos 3x - \frac{1}{45}\sin 3x\right)e^{-3x},$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

3. (1) 接[§4.4.1 - 5(1)]. 令 $z = y'$，方程化为 $yz\dfrac{dz}{dy} + 1 = z^2$. 当 $z^2 \neq 1$ 时有 $\dfrac{dz^2}{2(z^2-1)} = \dfrac{dy}{y}$，积分得 $z^2 - 1 = \pm c^2y^2$. 即 $y' = z = \pm\sqrt{1 \pm c^2y^2}$，$dx = \pm\dfrac{dy}{\sqrt{1 \pm c^2y^2}}$，有解 $x = \pm\dfrac{1}{c}\ln|cy + \sqrt{1 + c^2y^2}| + c_1$ 及 $x = \pm\dfrac{1}{c}\arcsin(cy) + c_1$ ($|cy| \leqslant 1$). 当 $z^2 = 1$ 时有 $y' = \pm 1$，解为 $y = \pm x + c_2$. 解中 c, c_1, c_2 为任意常数.

(2) 接[§4.4.1 - 5(2)]. 令 $z = y'$，方程化为 $z = xz' - z'^2$. 有通解 $z = c_1x - c_1^2$，及与 $x - 2c_1 = 0$ 组成的奇解 $z = \dfrac{x^2}{4}$，即有解 $y' = c_1x - c_1^2$ 及 $y' = \dfrac{x^2}{4}$，积分得 $y = \dfrac{c_1}{2}x^2 - c_1^2x + c_2$ 及 $y = \dfrac{x^3}{12} + c$. 原方程有通解 $y = \dfrac{c_1}{2}x^2 - c_1^2x + c_2, y = \dfrac{x^3}{12} + c$，其中 c, c_1, c_2 为任意常数.

(3) 接[§4.4.1 - 5(3)]. 先令 $z = y'$，再令 $z' = s$，方程变为

$zss' = s^2 + z^2 s$. 解出 $s = 0$ 及 $s' = \frac{s}{z} + z$. 后式为 $s' = \frac{ds}{dz}$ 的非齐次线性方程,有解 $s = e^{\int \frac{1}{z} dz}\left(\int z^{-1} z dz + c_1\right) = z(z + c_1)$. 即 $z' = z(z + c_1)$, $dx = \frac{1}{c_1}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z + c_1}\right)dz$, $\frac{z}{z + c_1} = c_2 e^{c_1 x}$. 于是 $z = \frac{c_1 c_2 e^{c_1 x}}{1 - c_2 e^{c_1 x}}$,从而得 $y' = z = \frac{c_1 c_2 e^{c_1 x}}{1 - c_2 e^{c_1 x}}$, $e^y(1 - c_2 e^{c_1 x}) = c_3$. 方程有通积分 $e^y(1 - c_2 e^{c_1 x}) = c_3$,其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数.

(4) 接[§4.4.1 - 5(4)]. 令 $y' = yz$,方程可化为 $\frac{z'}{z} = -\frac{x}{x^2 + 1}$,积分得 $z^2(x^2 + 1) = c_1$,即 $y' = y \cdot \frac{c_1}{\sqrt{x^2 + 1}}$,再积分得 $\ln|y| + \bar{c} = c_1 \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, $y = c_2\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^{c_1}$. 方程有解 $y = c_2\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^{c_1}$,其中 c_1, c_2 为任意常数.

(5) 接[§4.4.1 - 5(5)]. 令 $y' = yz$,方程可化为 $z' = -\frac{2}{x}z + \frac{1}{x^2}$,是非齐次线性方程,有解

$$z = e^{-\int \frac{2}{x} dx}\left(\int_0^x \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + c_1\right) = x^{-2}(x + c_1).$$

于是

$$y' = yz = yx^{-2}(x + c_1), \frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{c_1}{x^2}\right)dx, y = c_2 x e^{-\frac{c_1}{x}}.$$

方程有解 $y = c_2 x e^{-\frac{c_1}{x}}$,其中 c_1, c_2 为任意常数.

4. (1) 方程缺 x,令 $p = y'$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$,方程变为 $p\frac{dp}{dy} = \frac{ap^2}{vy}\sqrt{1 + p^2}$. 可解得

$$\frac{\mathrm{d}p}{p\sqrt{1+p^2}}=\frac{a\mathrm{d}y}{vy},\ln\left[\frac{1}{p}+\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1}\right]=\frac{a}{v}(\ln y+\ln c),$$

$$\frac{1}{p}+\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1}=(cy)^{\frac{a}{v}}.$$

由初值条件有 $x=x_0$ 时 $y=y_0,\frac{1}{p}=0$,求得 $c=\frac{1}{y_0}$. 解为 $\frac{1}{p}+\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1}=\left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{a}{v}}$. 为简化上式,利用 $\left[\frac{1}{p}+\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1}\right]\left[-\frac{1}{p}+\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1}\right]=1$ 得 $-\frac{1}{p}+\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1}=\left(\frac{y}{y_0}\right)^{-\frac{a}{v}}$,与解式相减得 $\frac{2}{p}=\left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{a}{v}}-\left(\frac{y}{y_0}\right)^{-\frac{a}{v}}$. 于是 $\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{a}{v}}-\left(\frac{y}{y_0}\right)^{-\frac{a}{v}}\right]\mathrm{d}y$.

当 $a\neq v$ 时方程可积分并利用初值条件得

$$x=x_0+\frac{vy_0}{2(v+a)}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{a}{v}}-\frac{vy_0}{2(v-a)}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{-\frac{a}{v}}+\frac{y_0av}{v^2-a^2}.$$

若 $a>v$,$y(x)$ 无法为零,即无法追上;若 $a<v$,当 $y(0)=0$ 即 $x_1=x_0+\frac{y_0av}{v^2-a^2}$ 时追上,追逐时间为 $T=\frac{x_1-x_0}{a}=\frac{y_0v}{v^2-a^2}$.

当 $a=v$ 时方程化为 $\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{y_0}-\frac{y_0}{y}\right)\mathrm{d}y$,有解 $x=x_0+\frac{1}{2}\left(\frac{y^2-y_0^2}{2y_0}-y_0\ln\frac{y}{y_0}\right)$. $y(x)$ 亦无法为零,即无法追上.

(2) 方程缺 x,y,令 $p=y',y''=p',a=\frac{H}{\omega}$,方程变为 $p'=\frac{1}{a}\sqrt{1+p^2}$. 可解得 $\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{1}{a}\mathrm{d}x$,积分得 $\operatorname{arsh} p=\frac{x}{a}+c_1$,即 $p=y'=\operatorname{sh}\left(\frac{x}{a}+c_1\right)$,再积分得 $y=a\cdot\operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}+c_1\right)+c_2$. 利用初值条件有 $c_1=0,c_2=b-a$. 解为 $y=b+a\left(\operatorname{ch}\frac{x}{a}-1\right)$. 如取 $b=a=\frac{H}{\omega}$,

则解变为 $y=a\cdot \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}=\frac{a}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right)$. 悬链线长为

$$s(x)=\int_0^x\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^x\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^x\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\mathrm{d}x=a\cdot \mathrm{sh}\,\frac{x}{a},$$

即 $s(x)=\frac{H}{\omega}\mathrm{sh}\,\frac{\omega x}{H}$.

5. (1) (a) 对 y 的齐次方程,令 $y=\mathrm{e}^z$,有

$$y'=\mathrm{e}^z z',y''=\mathrm{e}^z(z''+z'^2),y'''=\mathrm{e}^z(z'''+3z'z''+z'^3),\cdots.$$

代入方程得

$$F(x,y,y',y'',\cdots)=F(x,\mathrm{e}^z,\mathrm{e}^z z',\mathrm{e}^z(z''+z'^2),\cdots)$$
$$=\mathrm{e}^{rz}F(x,1,z',z''+z'^2,\cdots)=0,$$

即方程变为 $F(x,1,z',z''+z'^2,\cdots)=0$.

(b) 对 x 的齐次方程,令 $x=\mathrm{e}^t$,由 $\mathrm{d}x=\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$,有

$$y'=\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},y''=-\mathrm{e}^{-2t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\mathrm{e}^{-2t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$y'''=-2\mathrm{e}^{-3t}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)+\mathrm{e}^{-3t}\left(\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)$$
$$=\mathrm{e}^{-3t}\left(\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),\cdots.$$

代入方程得

$$F(x,y,y',y'',y''',\cdots)$$
$$=F\left(\mathrm{e}^t,y,\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),\mathrm{e}^{-3t}\left(\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),\cdots\right)$$
$$=\mathrm{e}^{rt}F\left(1,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\cdots\right)=0.$$

即方程变为 $F\left(1,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\cdots\right)=0$. 成为缺自变量 t 的方程,可令 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=z$,视 y 为自变量,z 为因变量而降阶

(见[书§4.3.1-(2)]).

(c) 对 $x, y^{\frac{1}{m}}$ 的齐次方程,令 $x=e^{t}, y=e^{mt}z$,有

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt}=e^{-t}\left(e^{mt}\frac{dz}{dt}+me^{mt}z\right)=e^{(m-1)t}\left(\frac{dz}{dt}+mz\right),$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dt}{dx}\frac{dy'}{dt}=e^{(m-2)t}\left[\frac{d^2z}{dt^2}+(2m-1)\frac{dz}{dt}+m(m-1)z\right],\cdots$$

代入方程得

$$\begin{aligned}&F(x,y,y',y'',\cdots)\\&=F\left(e^{t},e^{mt}z,e^{(m-1)t}\left(\frac{dz}{dt}+mz\right),\right.\\&\qquad\left.e^{(m-2)t}\left[\frac{d^2z}{dt^2}+(2m-1)\frac{dz}{dt}+m(m-1)z\right],\cdots\right)\\&=e^{nt}F\left(1,z,\frac{dz}{dt}+mz,\frac{d^2z}{dt^2}+(2m-1)\frac{dz}{dt}+m(m-1)z,\cdots\right)=0.\end{aligned}$$

即方程变为 $F\left(1,z,\frac{dz}{dt}+mz,\frac{d^2z}{dt^2}+(2m-1)\frac{dz}{dt}+m(m-1)z,\cdots\right)=0$,成为缺自变量 t 的方程. 可令 $\frac{dz}{dt}=u$,视 z 为自变量,u 为因变量而降阶(见[书§4.3.1-(2)]).

(2) (a) 方程对 y,x 均齐次.

解 1 方程对 y 齐次,可令 $y=e^{z}$,方程变为

$$x(z''+z'^2)-xz'^2-3z'=0, xz''-3z'=0.$$

再令 $z'=u$,有 $xu'=3u$,积分得 $u=\tilde{c}x^3$. 于是 $z'=\tilde{c}x^3$,再积分得 $z=c_1x^4+\tilde{c}_2$. 得解 $y=e^{c_1x^4+\tilde{c}_2}=c_2e^{c_1x^4}$,其中 c_1,c_2 为任意常数.

解 2 方程对 x 齐次,可令 $x=e^{t}$,方程变为

$$y\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-3y\frac{dy}{dt}=0, y\frac{d^2y}{dt^2}-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-4y\frac{dy}{dt}=0.$$

再令 $z=\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dz}{dt}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt}=z\frac{dz}{dy}$,上面方程再变为 $yz\frac{dz}{dy}-z^2-$

$4yz=0$，即 $z=0$ 及$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=\dfrac{z}{y}+4$. 由前式有$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=z=0$，$y=c$. 后式为线性方程，有解 $z=y(4\ln|y|+\tilde{c})$，即$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(4\ln|y|+\tilde{c})$，$\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}y}{y(4\ln|y|+\tilde{c})}=\dfrac{\mathrm{d}(\ln|y|)}{4\ln|y|+\tilde{c}}$，积分得 $\ln|\ln|y|+\tilde{c}|=4t+\tilde{\tilde{c}}$，即 $y=c_2\mathrm{e}^{c_1\mathrm{e}^{4t}}$. 于是 $y=c_2\mathrm{e}^{c_1x^4}$. 它包含前面求出的解 $y=c$. 因此解为 $y=c_2\mathrm{e}^{c_1x^4}$，其中 c_1,c_2 为任意常数.

(b) 方程为广义齐次，对 x,y^2 齐次，即 $m=\dfrac{1}{2}$. 令 $x=\mathrm{e}^t$，$y=\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}z$，有

$$4z^3\left(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}-\frac{1}{4}z\right)=1-z^4,\quad 4z^3\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=1.$$

将 z 视为自变量，t 视为因变量，有 $u=\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z}$，$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{u}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\dfrac{1}{u}\right)\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{u^3}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}$. 方程变为 $-\dfrac{4z^3}{u^3}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}=1$，$\dfrac{\mathrm{d}z}{2z^3}+\dfrac{2\mathrm{d}u}{u^3}=0$，积分得$\dfrac{z^{-2}}{4}+u^{-2}=\tilde{c}$，即 $u=\dfrac{\pm 2z}{\sqrt{c_1z^2-1}}$. 于是

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z}=u=\frac{\pm 2z}{\sqrt{c_1z^2-1}},\quad t+\ln c_2=\pm\frac{2}{c_1}\sqrt{c_1z^2-1},$$

$$4c_1z^2=c_1^2(t+\ln c_2)^2+4.$$

解为 $4c_1y^2=4c_1\mathrm{e}^tz^2=4x+c_1^2x(\ln x+\ln c_2)^2$，即 $4c_1y^2=4x+x[c_1\ln(c_2x)]^2$.

(c) 方程为广义齐次，对 x,y 齐次，即 $m=1$. 令 $y=xz$，$y'=z+xz'$，$y''=2z'+xz''$，方程化为 $x^3(2z'+xz'')=x^3z'(xz'+1)$. 即 $xz''=xz'^2-z'$. 再令 $p=z'$，方程进一步化为 $p'=-\dfrac{p}{x}+p^2$，是伯努利方程，$n=2\neq 0,1$. 取变换 $u=p^{1-n}=p^{-1}$，从而化为线性方程 $u'=$

$-p^{-2}p' = \frac{p^{-1}}{x} - 1 = \frac{u}{x} - 1$，有解 $u = x(\tilde{c} - \ln x) = -x\ln(c_1 x)$. 即有 $z' = \frac{-1}{x\ln(c_1 x)}$，积分得 $z = \tilde{\tilde{c}} - \ln[\ln(c_1 x)] = -\ln[c_2\ln(c_1 x)]$. 最后得解为

$$y = xz = -x\ln[c_2\ln(c_1 x)].$$

6. (1) 方程为二阶齐次线性方程 $y'' + \frac{3}{x}y' - \frac{3}{x^2}y = 0$. $p(x) = \frac{3}{x}$, $q(x) = -\frac{3}{x^2}$，因 $xp(x) = 3$, $x^2 q(x) = -3$ 可展成 x 的幂级数，根据[书 §4.3.2 - 定理 11]，方程有形如 $y = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{\beta+k}$ 的级数解. 代入得第一项有 $\beta(\beta-1)b_0 + 3\beta b_0 - 3b_0 = 0$, $\beta^2 + 2\beta - 3 = (\beta-1)(\beta+3) = 0$，即可取 $\beta = -3$ 的级数解 $y = a_{-3}x^{-3} + a_{-2}x^{-2} + a_{-1}x^{-1} + a_0 + a_1 x + \cdots$.

方程化为 $x^2y'' + 3xy' - 3y = 0$，将级数解代入，可得

$$\sum_{k=-3}^{\infty}[k(k-1)a_k + 3ka_k - 3a_k]x^k = \sum_{k=-3}^{\infty}(k^2 + 2k - 3)a_k x^k = 0.$$

由 $k^2 + 2k - 3 = (k-1)(k+3)$ 知，当 $k \neq 1, -3$ 时要求 $a_k = 0$，而 $k = 1, -3$ 时 a_k 可取任意值，于是级数解为 $y = \frac{a_{-3}}{x^3} + a_1 x$，其中 a_{-3}, a_1 为任意常数.

(2) 方程化为二阶齐次线性方程 $y'' - \frac{x+4}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$. $p(x) = -\frac{x+4}{x}$, $q(x) = \frac{4}{x^2}$. 因 $xp(x) = -(x+4)$, $x^2q(x) = 4$ 可展成 x 的幂级数，根据[书 §4.3.2 - 定理 11]，方程有形如 $y = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{\beta+k}$ 的级数解. 代入得第一项有 $\beta(\beta-1)b_0 - 4\beta b_0 + 4b_0 = 0$, $\beta^2 - 5\beta + 4 = (\beta-1)(\beta-4) = 0$. 即可取 $\beta = 1$ 的级数解 $y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$+a_4x^4+\cdots$. 将级数解代入方程，可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}[k(k-1)a_k-(k-1)a_{k-1}-4ka_k+4a_k]x^k$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}[(k^2-5k+4)a_k-(k-1)a_{k-1}]x^k=0.$$

由 $k^2-5k+4=(k-1)(k-4)$ 知，当 $k\neq1,4$ 时要求 $a_k=\frac{1}{k-4}a_{k-1}$，而 $k=1,4$ 时要求 $(k-1)a_{k-1}=0$，于是级数解的各项系数取值为，由 $k=4$ 知 $a_3=0$，进而 $a_2=a_1=0$. 从 $k=5$ 开始，当 a_4 取任意值 a 时，$a_5=a_4=a$，$a_6=\frac{a}{2}$，$a_7=\frac{a}{3!}$，$\cdots$，$a_k=\frac{a}{(k-4)!}$，$\cdots$，得级数解

$$y=ax^4\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots\right)=ax^4e^x,$$

其中 a 为任意常数.

（3）引入新变量 $t=2x$，$\frac{dy}{dx}=2\frac{dy}{dt}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=4\frac{d^2y}{dt^2}$，方程化为

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+\left[t^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]y=0,$$

是 $\pm\frac{1}{3}$ 阶贝塞尔方程，有通解 $y=c_1J_{\frac{1}{3}}(t)+c_2J_{-\frac{1}{3}}(t)$. 故原方程的通解为 $y=c_1J_{\frac{1}{3}}(2x)+c_2J_{-\frac{1}{3}}(2x)$.

*（4）引入新变量 $t=x^2$，$\frac{dy}{dx}=2x\frac{dy}{dt}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dy}{dt}+4x^2\frac{d^2y}{dt^2}$，方程化为

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{t}{2}\frac{dy}{dt}+(t^2-1)y=0.$$

再引入新变量 $u=t^{-\frac{3}{4}}y$，有 $y=t^{\frac{3}{4}}u$，

$$\frac{dy}{dt}=\frac{3}{4}t^{-\frac{1}{4}}u+t^{\frac{3}{4}}\frac{du}{dt},\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{3}{16}t^{-\frac{5}{4}}u+\frac{3}{2}t^{-\frac{1}{4}}\frac{du}{dt}+t^{\frac{3}{4}}\frac{d^2u}{dt^2},$$

方程进一步化为

$$t^{2+\frac{3}{4}}\frac{d^2u}{dt^2}+\left(\frac{3}{2}t^{2-\frac{1}{4}}-\frac{t}{2}t^{\frac{3}{4}}\right)\frac{du}{dt}+\left[-\frac{3}{16}t^{2-\frac{5}{4}}-\frac{t}{2}\cdot\frac{3}{4}t^{-\frac{1}{4}}+(t^2-1)t^{\frac{3}{4}}\right]u=0.$$

除以 $t^{\frac{3}{4}}$,得

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2}+t\frac{du}{dt}+\left[t^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2\right]u=0,$$

是 $\pm\frac{5}{4}$阶贝塞尔方程. 通解为 $u=c_1J_{\frac{5}{4}}(t)+c_2J_{-\frac{5}{4}}(t)$,由 $t=x^2$,

$y=t^{\frac{3}{4}}u=x^{\frac{3}{2}}u$,得

$$y=x^{\frac{3}{2}}\left[c_1J_{\frac{5}{4}}(x^2)+c_2J_{-\frac{5}{4}}(x^2)\right].$$

*7. (1) 变换 $z=ax^b, w=yx^c$,因

$$\frac{dw}{dz}=\frac{dw}{dx}\frac{dx}{dz}=\left(x^c\frac{dy}{dx}+cyx^{c-1}\right)\frac{1}{abx^{b-1}}=\frac{x^{c-b+1}}{ab}\frac{dy}{dx}+\frac{cyx^{c-b}}{ab},$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2w}{dz^2}&=\frac{dx}{dz}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dz}\right)\\&=\frac{1}{abx^{b-1}}\left[\frac{x^{c-b+1}}{ab}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{(2c-b+1)x^{c-b}}{ab}\frac{dy}{dx}+\frac{c(c-b)yx^{c-b-1}}{ab}\right]\\&=\frac{x^{c-2b+2}}{a^2b^2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{(2c-b+1)x^{c-2b+1}}{a^2b^2}\frac{dy}{dx}+\frac{c(c-b)yx^{c-2b}}{a^2b^2},\end{aligned}$$

于是贝塞尔方程 $z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}+(z^2-p^2)w=0$ 变为

$$\frac{x^{c+2}}{b^2}\frac{d^2y}{dx^2}+\left[\frac{(2c-b+1)x^{c+1}}{b^2}+\frac{x^{c+1}}{b}\right]\frac{dy}{dx}+\frac{c^2yx^c}{b^2}+[a^2x^{2b}-p^2]yx^c=0.$$

化简得

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(2c+1)x\frac{dy}{dx}+[a^2b^2x^{2b}+(c^2-p^2b^2)]y=0.$$

这便是变换后的新贝塞尔方程. 原贝塞尔方程的通解为 $w=c_1J_p(z)+c_2Y_p(z)$(见[§4.3.2 -(7)]). 新贝塞尔方程的通解可

表为 $y=x^{-c}[c_1\mathrm{J}_p(ax^b)+c_2\mathrm{Y}_p(ax^b)]$. 当 p 不是整数时可表为

$$y=x^{-c}[c_1\mathrm{J}_p(ax^b)+c_2\mathrm{J}_{-p}(ax^b)].$$

(2) 对变换 $By=\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,有 $B\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}-\frac{1}{u^2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2$. 可将特殊里卡蒂方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+By^2=Cx^m$ 变为 $\frac{1}{Bu}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}-\frac{1}{Bu^2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2+B\left(\frac{1}{Bu}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2=Cx^m$, $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}-BCx^mu=0$. 对新方程 $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}-BCx^mu=0$,可设 $m\neq-2$,因当 $m=-2$ 时令 $y=\frac{v}{x}$,则特殊里卡蒂方程直接变为 $\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}-\frac{v}{x^2}+B\left(\frac{v}{x}\right)^2=Cx^{-2}$, $x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+(Bv^2-v)=C$ 属分离变量型方程. 当 $m\neq-2$时可对(1)中的新方程令 $c=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2p}$, $a=1$, $m=\frac{1-2p}{p}$,新方程化为 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{4p^2}x^{\frac{1-2p}{p}}y=0$. 于是有通解 $y=x^{\frac{1}{2}}[c_1\mathrm{J}_p(x^{\frac{1}{2p}})+c_2\mathrm{Y}_p(x^{\frac{1}{2p}})]$. 当 p 不是整数时可表为

$$y=x^{\frac{1}{2}}[c_1\mathrm{J}_p(x^{\frac{1}{2p}})+c_2\mathrm{J}_{-p}(x^{\frac{1}{2p}})].$$

(3) 参看[§2.3.1-16(3)及§2.4.2-16(3)].

8. (1) 方程经拉普拉斯变换后变为

$$s^2X(s)-2sX(s)+X(s)=\frac{1}{s^2}, X(s)=\frac{1}{s^2(s-1)^2}.$$

化为分部分式

$$X(s)=\frac{1}{s^2(s-1)^2}=\frac{a}{s}+\frac{b}{s^2}+\frac{c}{s-1}+\frac{d}{(s-1)^2}$$
$$=\frac{(as+b)(s^2-2s+1)+s^2(cs-c+d)}{s^2(s-1)^2},$$

应满足$(as+b)(s^2-2s+1)+s^2(cs-c+d)=1$,即

$$b=1, a-2b=0, b-2a-c+d=0, a+c=0,$$

解得 $b=1, a=2, c=-2, d=1$. 于是 $X(s)=\frac{2}{s}+\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}$,再经拉普拉斯反变换求得解为

$$x(t)=2+t-2e^t+te^t.$$

(2) 方程经拉普拉斯变换后变为

$$s^2X(s)-s-2a[sX(s)-1]+(a^2+b^2)X(s)=0,$$

$$[s^2-2as+(a^2+b^2)]X(s)=s-2a.$$

有解 $X(s)=\frac{s-2a}{(s-a)^2+b^2}=\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}-\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$. 再经拉普拉斯反变换求得解为

$$x(t)=e^{at}\cos bt-\frac{a}{b}e^{at}\sin bt.$$

(3) 方程经拉普拉斯变换后变为

$$s^2X(s)-2s-sX(s)+2=\frac{2}{s^2+1}, s(s-1)X(s)=-2+2s+\frac{2}{s^2+1},$$

$$X(s)=-\frac{2}{s(s-1)}+\frac{2}{s-1}+\frac{2}{s(s-1)(s^2+1)}.$$

再化为分部分式

$$X(s)=-\frac{2}{s(s-1)}+\frac{2}{s-1}+\frac{2}{s(s-1)(s^2+1)}=\frac{a}{s}+\frac{b}{s-1}+\frac{cs}{s^2+1}+\frac{d}{s^2+1}$$

$$=\frac{a(s^3-s^2+s-1)+b(s^3+s)+c(s^3-s^2)+d(s^2-s)}{s(s-1)(s^2+1)},$$

应满足 $a(s^3-s^2+s-1)+b(s^3+s)+c(s^3-s^2)+d(s^2-s)=-2s^2-2+2(s^3+s)+2$,即

$$a+b+c=2, -a-c+d=-2, a+b-d=2, -a=0,$$

解得 $a=0, b=1, c=1, d=-1$. 于是 $X(s)=\frac{1}{s-1}+\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1}$,再经拉普拉斯反变换求得解为

$$x(t)=e^t+\cos t-\sin t.$$

（4）方程经拉普拉斯变换后变为

$$s^3X(s)+3s^2X(s)+3sX(s)+X(s)=\frac{3!}{(s+1)^4},$$

$$X(s)=\frac{6}{(s+1)^7}=\frac{1}{5!}\cdot\frac{6!}{(s+1)^{6+1}}.$$

再经拉普拉斯反变换求得解为

$$x(t)=\frac{1}{5!}\cdot t^6\mathrm{e}^{-t}.$$

§4.4.3　习题4.1及其解答

1. 设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数，证明：如果在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上有 $\frac{x(t)}{y(t)}\neq$ 常数或 $\frac{y(t)}{x(t)}\neq$ 常数，则 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上线性无关.（提示：用反证法.）

证　反证法. 假设在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上有 $\frac{x(t)}{y(t)}\neq$ 常数，而 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上线性相关. 即存在不全为零的常数 c,d 使得

$$cx(t)+dy(t)\equiv 0,t\in[a,b].$$

显然，因 $y(t)\neq 0$ 故 $c\neq 0$（否则有 $d=0$，与 c,d 不全为零矛盾），即有 $\frac{x(t)}{y(t)}=-\frac{d}{c}$ 为常数，与假设矛盾. 故 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上线性无关.

同样可证，如果在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上有 $\frac{y(t)}{x(t)}\neq$ 常数，则 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上线性无关.

2. 证明非齐次线性微分方程的叠加原理：设 $x_1(t),x_2(t)$ 分别是非齐次线性微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=f_1(t),$$

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=f_2(t)$$

的解，则 $x_1(t)+x_2(t)$ 是方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=f_1(t)+f_2(t)$$

的解.

证 因

$$\frac{d^n x_1(t)}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x_1(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x_1(t)\equiv f_1(t),$$

$$\frac{d^n x_2(t)}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x_2(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x_2(t)\equiv f_2(t).$$

有

$$\frac{d^n[x_1(t)+x_2(t)]}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}[x_1(t)+x_2(t)]}{dt^{n-1}}+\cdots+$$

$$a_n(t)[x_1(t)+x_2(t)]$$

$$\equiv\frac{d^n x_1(t)}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x_1(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x_1(t)+$$

$$\frac{d^n x_2(t)}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x_2(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x_2(t)$$

$$\equiv f_1(t)+f_2(t),$$

即 $x_1(t)+x_2(t)$ 是方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=f_1(t)+f_2(t)$$

的解.

3. 已知齐次线性微分方程的基本解组 x_1,x_2，求下列方程对应的非齐次线性微分方程的通解：

(1) $x''-x=\cos t, x_1=e^t, x_2=e^{-t}$.

解 1　齐次线性微分方程的通解为 $x=c_1\mathrm{e}^t+c_2\mathrm{e}^{-t}$. 用常数变易法，设非齐次线性微分方程的通解为 $x=c_1(t)\mathrm{e}^t+c_2(t)\mathrm{e}^{-t}$. 微分可得

$$x'=c_1(t)\mathrm{e}^t-c_2(t)\mathrm{e}^{-t}+c_1'(t)\mathrm{e}^t+c_2'(t)\mathrm{e}^{-t}.$$

令 $c_1'(t)\mathrm{e}^t+c_2'(t)\mathrm{e}^{-t}=0$，则有 $x'=c_1(t)\mathrm{e}^t-c_2(t)\mathrm{e}^{-t}$. 再微分之

$$x''=c_1(t)\mathrm{e}^t+c_2(t)\mathrm{e}^{-t}+c_1'(t)\mathrm{e}^t-c_2'(t)\mathrm{e}^{-t}.$$

将 x,x'' 代入非齐次方程可得

$$c_1'(t)\mathrm{e}^t-c_2'(t)\mathrm{e}^{-t}=\cos t.$$

与前面所设联立得

$$\begin{cases}c_1'(t)\mathrm{e}^t+c_2'(t)\mathrm{e}^{-t}=0,\\ c_1'(t)\mathrm{e}^t-c_2'(t)\mathrm{e}^{-t}=\cos t,\end{cases}$$

可得

$$c_1'(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\cos t,c_2'(t)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^t\cos t.$$

由公式[附录Ⅱ §3.3-6(54)]得

$$c_1(t)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}(\sin t-\cos t)+\gamma_1,c_2(t)=-\frac{1}{4}\mathrm{e}^t(\sin t+\cos t)+\gamma_2.$$

即非齐次线性微分方程的通解为

$$\begin{aligned}x&=\frac{1}{4}(\sin t-\cos t)+\gamma_1\mathrm{e}^t-\frac{1}{4}(\sin t+\cos t)+\gamma_2\mathrm{e}^{-t}\\&=\gamma_1\mathrm{e}^t+\gamma_2\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}\cos t.\end{aligned}$$

解 2　设 $x=a\cos t+b\sin t$ 为非齐次线性微分方程的一个特解，因

$$x'=-a\sin t+b\cos t,x''=-a\cos t-b\sin t,$$

代入非齐次方程得

$$x''-x=-2a\cos t-2b\sin t=\cos t,a=-\frac{1}{2},b=0.$$

即特解为 $x=-\dfrac{1}{2}\cos t$. 非齐次线性微分方程的通解为

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t.$$

(2) $x'' + \frac{t}{1-t}x' - \frac{1}{1-t}x = t - 1, x_1 = t, x_2 = e^t.$

提示 常数变易法. 解方程组

$$\begin{cases} c_1'(t)t + c_2'(t)e^t = 0, \\ c_1'(t) + c_2'(t)e^t = t - 1, \end{cases}$$

得 $c_1'(t) = -1, c_2'(t) = te^{-t}$, 积分得 $c_1(t) = -t + c_1, c_2(t) = -(t+1)e^{-t} + c_2$. 通解为

$$x = c_1 t + c_2 e^t - t^2 - 1.$$

(3) $x'' + 4x = t\sin 2t, x_1 = \cos 2t, x_2 = \sin 2t.$

提示 1 常数变易法. 解方程组

$$\begin{bmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -2\sin 2t & 2\cos 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t\sin 2t \end{bmatrix},$$

得

$$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}t(\cos 4t - 1) \\ \frac{1}{4}t\sin 4t \end{bmatrix},$$

积分得

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{64}\cos 4t + \frac{1}{16}t\sin 4t - \frac{1}{8}t^2 + \gamma_1 \\ \frac{1}{64}\sin 4t - \frac{1}{16}t\cos 4t + \gamma_2 \end{bmatrix}.$$

通解为

$$x = \gamma_1 \cos 2t + \gamma_2 \sin 2t - \frac{1}{8}t^2 \cos 2t + \frac{1}{16}t\sin 2t.$$

提示 2 直接应用公式[书 §5.2.2 - (5.31)]求特解. 有 $W(t) = 2, W_1(t) = -x_2(t) = -\sin 2t, W_2(t) = x_1(t) = \cos 2t.$

$$\varphi(t)=\cos 2t\int_0^t \frac{s}{4}(\cos 4s-1)\mathrm{d}s+\sin 2t\int_0^t \frac{s}{4}\sin 4s\mathrm{d}s.$$

可得通解

$$x=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t-\frac{t^2}{8}\cos 2t+\frac{t}{16}\sin 2t.$$

(4) $t^2x''-4tx'+6x=36\dfrac{\ln t}{t}, x_1=t^2, x_2=t^3$.

提示 常数变易法. 令 $x=t^2c_1(t)+t^3c_2(t)$，解方程组

$$\begin{cases}t^2c_1'(t)+t^3c_2'(t)=0,\\ 2t^3c_1'(t)+3t^4c_2'(t)=36\dfrac{\ln t}{t},\end{cases}$$

得 $c_1(t)=4t^{-3}+12t^{-3}\ln t+\gamma_1, c_2(t)=-\dfrac{9}{4}t^{-4}-9t^{-4}\ln t+\gamma_2$. 通解为

$$x=t^2\gamma_1+t^3\gamma_2+\frac{7}{4}t^{-1}+3t^{-1}\ln t.$$

(5) $t^2x''-tx'+x=6t+34t^2, x_1=t, x_2=t\ln t$.

提示 常数变易法. 令 $x=c_1(t)t+c_2(t)t\ln t$，解方程组

$$\begin{cases}c_1'(t)t+c_2'(t)t\ln t=0,\\ c'_1(t)t^2+c_2'(t)t^2(1+\ln t)=6t+34t^2,\end{cases}$$

得 $c_2'(t)=6t^{-1}+34, c_1'(t)=-6t^{-1}\ln t-34\ln t$. 积分得

$$c_1(t)=34t-34t\ln t-3\ln^2 t+\gamma_1, c_2(t)=34t+6\ln t+\gamma_2.$$

通解为 $x=\gamma_1t+\gamma_2t\ln t+34t^2+3t\ln^2 t$.

(6) $t^2x''-3tx'+8x=18t^2\sin(\ln t), x_1=t^2\cos(2\ln t), x_2=t^2\sin(2\ln t)$.

提示 常数变易法. 设 $x=c_1(t)t^2\cos(2\ln t)+c_2(t)t^2\sin(2\ln t)$，联合求解

$$\begin{cases}c_1'(t)\cos(2\ln t)+c_2'(t)\sin(2\ln t)=0,\\ -c_1'(t)\sin(2\ln t)+c_2'(t)\cos(2\ln t)=9t^{-1}\sin(\ln t),\end{cases}$$

有解

$$c_1'(t) = -9t^{-1}\sin(2\ln t)\sin(\ln t) = \frac{9}{2}t^{-1}[\cos(3\ln t) - \cos(\ln t)],$$

$$c_1'(t) = 9t^{-1}\cos(2\ln t)\sin(\ln t) = \frac{9}{2}t^{-1}[\sin(3\ln t) - \sin(\ln t)].$$

积分得

$$c_1(t) = \frac{3}{2}\sin(3\ln t) - \frac{9}{2}\sin(\ln t) + \gamma_1,$$

$$c_2(t) = -\frac{3}{2}\cos(3\ln t) + \frac{9}{2}\cos(\ln t) + \gamma_2.$$

其通解可化为

$$x = \gamma_1 t^2\cos(2\ln t) + \gamma_2 t^2\sin(2\ln t) + 6t^2\sin(\ln t).$$

4. 已知方程$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$有基本解组 e^t, e^{-t},试求此方程适合初值条件 $x(0) = 1, x'(0) = 0$ 及 $x(0) = 0, x'(0) = 1$ 的基本解组(称为标准基本解组,即有 $W(0) = 0$),并由此求出方程的适合初值条件 $x(0) = x_0, x'(0) = x_0'$ 的解.

解 由条件和方程$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$有通解 $x(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}$. 由 $x'(t) = c_1e^t - c_2e^{-t}$,当方程适合初值条件 $x(0) = 1, x'(0) = 0$ 时应有 $x(0) = c_1 + c_2 = 1, x'(0) = c_1 - c_2 = 0$. 解得 $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}$. 方程的解为 $x_1(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} = \text{ch } t$.

同样,当方程适合初值条件 $x(0) = 0, x'(0) = 1$ 时应有

$$x(0) = c_1 + c_2 = 0, x'(0) = c_1 - c_2 = 1.$$

解得 $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = -\frac{1}{2}$,方程的解为 $x_2(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} = \text{sh } t$.

因此,方程的标准基本解组 $\{x_1(t), x_2(t)\}$ 为 $x_1(t) = \text{ch } t$, $x_2(t) = \text{sh } t$.

方程的通解可表示为 $x(t) = c_1 \mathrm{ch}\ t + c_2 \mathrm{sh}\ t$. 当方程的初值条件为 $x(0) = x_0, x'(0) = x_0'$ 时有 $c_1 = x_0, c_2 = x_0'$. 即解为

$$x(t) = x_0 \mathrm{ch}\ t + x_0' \mathrm{sh}\ t.$$

5. 设 $x_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 是齐次线性微分方程(4.2)的任意 n 个解,它们所构成的朗斯基行列式记为 $W(t)$. 试证明 $W(t)$ 满足一阶线性微分方程

$$W' + a_1(t) W = 0.$$

因而有

$$W(t) = W(t_0) \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\mathrm{d}s}, t_0, \quad t \in (a,b).$$

证 微分朗斯基行列式,利用行列式微分为逐行微分之和及行列式有两行相同时值为零的性质得

$$W'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1''(t) & x_2''(t) & \cdots & x_n''(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n)}(t) & x_2^{(n)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) \end{vmatrix}$$

$$
=0+\cdots+0+\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n)}(t) & x_2^{(n)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) \end{vmatrix}.
$$

将 $x_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 满足的方程(4.2)代入上面行列式的最后一行有

$$
W'(t)=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1(t)x_1^{(n-1)}-\cdots-a_n(t)x_1 & -a_1(t)x_2^{(n-1)}-\cdots-a_n(t)x_2 & \cdots & -a_1(t)x_n^{(n-1)}-\cdots-a_n(t)x_n \end{vmatrix}.
$$

再将行列式的最后一行加上前面各行分别乘以 $a_n(t),a_{n-1}(t),\cdots,a_2(t)$,可得

$$
W'(t)=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1(t)x_1^{(n-1)}(t) & -a_1(t)x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & -a_1(t)x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}
$$

$$
=-a_1(t)\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}=-a_1(t)W(t).
$$

此即为

$$
W'+a_1(t)W=0.
$$

解此一阶线性方程,有

$$W(t) = W(t_0)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\mathrm{d}s}, t_0, \quad t \in (a,b).$$

6. 假设 $x_1(t) \neq 0$ 是二阶齐次线性微分方程

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0$$

的解，这里 $a_1(t), a_2(t)$ 于区间 $[a,b]$ 上连续. 试证：

(1) $x_2(t)$ 为方程的解的充要条件是

$$W'[x_1, x_2] + a_1(t)W[x_1, x_2] = 0;$$

(2) 方程的通解可表为

$$x = x_1\left[c_1\int \frac{1}{x_1^2}\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t + c_2\right],$$

其中 c_1, c_2 为任意常数，$t_0, t \in [a,b]$.

证 (1) 微分朗斯基行列式，有

$$W'[x_1(t), x_2(t)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1'(t) & x_2'(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x''_1(t) & x''_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x''_1(t) & x''_2(t) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ -a_1(t)x_1'(t) - a_2(t)x_1(t) & -a_1(t)x_2'(t) - a_2(t)x_2(t) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ -a_1(t)x_1'(t) & -a_1(t)x_2'(t) \end{vmatrix}$$

$$= -a_1(t)\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$$

$$= -a_1(t)W[x_1(t), x_2(t)],$$

即

$$W'[x_1, x_2] + a_1(t)W[x_1, x_2] = 0.$$

反之，满足关系式 $W'[x_1, x_2] + a_1(t)W[x_1, x_2] = 0$ 时，由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} + a_1(t)\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x_1(t)x_2'(t)-x_2(t)x_1'(t)]+a_1(t)[x_1(t)x_2'(t)-x_2(t)x_1'(t)]$$

$$=x_1(t)[x_2''(t)+a_1(t)x_2'(t)+a_2(t)x_2(t)]-$$

$$x_2(t)[x_1''(t)+a_1(t)x_1'(t)+a_2(t)x_1(t)]$$

$$=x_1(t)[x''_2(t)+a_1(t)x_2'(t)+a_2(t)x_2(t)]=0.$$

因假设 $x_1(t)\neq 0$ 有

$$x''_2(t)+a_1(t)x_2'(t)+a_2(t)x_2(t)=0,$$

即 $x_2(t)$是方程的解.

(2) 用常数变易法,设 $x=c(t)x_1$ 为方程的解,代入方程得

$$c''x_1+2c'x_1'+cx''_1+a_1(c'x_1+cx_1')+a_2cx_1$$

$$=c''x_1+c'(2x_1'+a_1x_1)+c(x''_1+a_1x_1'+a_2x_1)$$

$$=c''x_1+c'(2x_1'+a_1x_1)=0.$$

令 $y=c'$,可得 $y'x_1+y(2x_1'+a_1x_1)=0, y'=-\left(\frac{2x_1'}{x_1}+a_1\right)y$. 有解

$$c'=y=c_1\exp\left[-\int_{t_0}^{t}\left(\frac{2x_1'}{x_1}+a_1\right)\mathrm{d}t\right]$$

$$=c_1\exp\left(-2\ln x_1-\int_{t_0}^{t}a_1\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{c_1}{x_1^2}\exp\left[-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s\right].$$

再积分得

$$c=\int\frac{c_1}{x_1^2}\exp\left[-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t+c_2=c_1\int\frac{1}{x_1^2}\exp\left[-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t+c_2.$$

方程的解为

$$x=x_1\left[c_1\int\frac{1}{x_1^2}\exp\left[-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t+c_2\right],$$

其中 c_1, c_2 为任意常数, $t_0, t\in[a,b]$. 因解有两个独立的任意常

数，故解为二阶齐次线性微分方程的通解.

7. 试证 n 阶非齐次线性微分方程(4.1)存在且最多存在$n+1$个线性无关解.

证 由[书 §4.1－定理 1]知，非齐次方程(4.1)满足初值条件(4.3)的解 $\varphi(t)$存在且唯一. 而由[书 §4.1.2－定理 5]知齐次方程(4.2)存在 n 个线性无关解 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$. 根据[书 §4.1.3 性质 1]，$\varphi_0=\varphi(t),\varphi_1=x_1(t)+\varphi(t),\cdots,\varphi_n=x_n(t)+\varphi(t)$是(4.1)的 $n+1$ 个解. 现用反证法证明它们线性无关，设它们线性相关，则存在 $n+1$ 个不全为零的常数 $c_0,c_1,\cdots,c_n$，使得 $c_0\varphi_0+c_1\varphi_1+\cdots+c_n\varphi_n\equiv 0$，即$(c_0+c_1+\cdots+c_n)\varphi(t)+c_1x_1(t)+\cdots+c_nx_n(t)\equiv 0$. 显然 $c_0+c_1+\cdots+c_n\neq 0$(否则必有 $c_1,\cdots,c_n$ 不全为零而使 $c_1x_1(t)+\cdots+c_nx_n(t)\equiv 0$，与 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$线性无关矛盾.)于是有

$$\varphi(t)\equiv-\frac{1}{c_0+c_1+\cdots+c_n}[c_1x_1(t)+\cdots+c_nx_n(t)].$$

左边是方程(4.1)的解，右边由[书 §4.1.2－定理 2]是齐次方程的解，产生矛盾. 这证明了方程(4.1)存在 $n+1$ 个线性无关解.

设 $x_i(t)(i=1,2,\cdots,m)$是非齐次微分方程(4.1)的 m 个线性无关解，则 $x_i(t)-x_1(t)(i=2,\cdots,m)$是齐次微分方程(4.2)的 $m-1$个线性无关解. 由于 n 阶齐次线性微分方程(4.2)存在且最多存在 n 个线性无关解. 于是 $m-1\leqslant n$. 故方程(4.1)存在且最多存在 $n+1$ 个线性无关解.

§4.4.4 习题 4.2 及其解答

1. 证明定理 8 和定理 9.

证 先证定理 8. 将复值函数 $x=z=\varphi(t)+\mathrm{i}\psi(t)$代入实系数方程(4.2)中，有

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^n z}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}z}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dz}{dt}+a_n z\\
=&\frac{d^n\varphi}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}\varphi}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{d\varphi}{dt}+a_n\varphi+\\
&i\left(\frac{d^n\psi}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}\psi}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{d\psi}{dt}+a_n\psi\right)\\
=&0+i\cdot 0.
\end{aligned}
$$

分别对比实部和虚部,得

$$
\frac{d^n\varphi}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}\varphi}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{d\varphi}{dt}+a_n\varphi=0,
$$

$$
\frac{d^n\psi}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}\psi}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{d\psi}{dt}+a_n\psi=0.
$$

且对共轭复值函数 $\bar{z}=\varphi(t)-i\psi(t)$ 有

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^n\varphi}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}\varphi}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{d\varphi}{dt}+a_n\varphi-\\
&i\left(\frac{d^n\psi}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}\psi}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{d\psi}{dt}+a_n\psi\right)\\
=&\frac{d^n\bar{z}}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}\bar{z}}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{d\bar{z}}{dt}+a_n\bar{z}=0+i\cdot 0=0.
\end{aligned}
$$

因此,复值函数解 $x=z=\varphi(t)+i\psi(t)$ 的实部 $\varphi(t)$ 和虚部 $\psi(t)$ 及共轭复值函数 $\bar{z}=\varphi(t)-i\psi(t)$ 均为实系数方程(4.2)的解.

再证定理 9. 将复值解 $x=U(t)+iV(t)$ 代入原方程中,有

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x\\
=&\frac{d^n U}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}U}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dU}{dt}+a_n U+\\
&i\left(\frac{d^n V}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}V}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dV}{dt}+a_n V\right)\\
=&u(t)+i\cdot v(t).
\end{aligned}
$$

分别对比方程两端的实部和虚部,得

$$\frac{d^n U}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}U}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dU}{dt}+a_nU=u(t),$$

$$\frac{d^n V}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}V}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dV}{dt}+a_nV=v(t).$$

定理得证.

2. 求解下列常系数线性微分方程:

(1) $x^{(4)}-5x''+4x=0$.

解 常系数线性微分方程的特征方程为

$$\lambda^4-5\lambda^2+4=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+2)=0.$$

有特征根 $\lambda=\pm1,\lambda=\pm2$,即 4 个不相等的单根,故方程的通解为

$$x=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3e^{2t}+c_4e^{-2t}.$$

(2) $x'''-3ax''+3a^2x'-a^3x=0$.

提示 特征方程 $\lambda^3-3a\lambda^2+3a^2\lambda-a^3=(\lambda-a)^3=0$,3 重特征根 $\lambda=a$. 解为 $x=(c_1+c_2t+c_3t^2)e^{at}$.

(3) $x^{(5)}-4x'''=0$.

提示 特征方程 $\lambda^5-4\lambda^3=\lambda^3(\lambda^2-4)=0$,特征根为 3 重特征根 $\lambda=0$ 及单根 $\lambda=\pm2$. 解为 $x=c_1+c_2t+c_3t^2+c_4e^{2t}+c_5e^{-2t}$.

(4) $x''+x'+x=0$.

提示 特征方程 $\lambda^2+\lambda+1=0$,特征根为共轭复根 $\lambda=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 解为 $x=\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}t}$.

(5) $s''-a^2s=t+1$.

提示 特征方程 $\lambda^2-a^2=(\lambda-a)(\lambda+a)=0$,当 $a\neq0$ 特征根为 $\lambda=\pm a$. 方程右端属于 I 型 $k=0,m=1$,特解可设为 $\tilde{s}=ct+d$,代入有 $c=d=-a^{-2}$,解为 $s=c_1e^{at}+c_2e^{-at}-a^{-2}(t+1)$. 当 $a=0$ 时特征根为 2 重特征根 $\lambda=0$,方程右端属于 I 型 $k=2,m=1$,设特解为 $\tilde{s}=t^2(ct+d)$,代入得 $6ct+2d=t+1$,$c=\frac{1}{6}$,$d=\frac{1}{2}$,解为 $s=$

$c_1+c_2t+\frac{1}{6}t^2(t+3)$.

(6) $x'''-4x''+5x'-2x=2t+3$.

提示 特征方程 $\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=(\lambda-2)(\lambda-1)^2=0$. 特征根为单根 $\lambda=2$ 和 2 重根 $\lambda=1$. 方程右端属于 I 型 $k=0,m=1$, 特解可设为 $\tilde{x}=ct+d$,代入比较得 $c=-1,d=-4$. 解为 $x=c_1e^{2t}+(c_2+c_3t)e^t-t-4$.

(7) $x^{(4)}-2x''+x=t^2-3$.

提示 特征方程 $\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2=0$,特征根为两个 2 重根 $\lambda=\pm1$. 方程右端属于 I 型 $k=0,m=2$,特解可设为 $x=ct^2+dt+e$,代入比较得 $-4c+ct^2+dt+e=t^2-3,c=1,d=0,e=1$. 解为 $x=(c_1+c_2t)e^t+(c_3+c_4t)e^{-t}+t^2+1$.

(8) $x'''-x=\cos t$.

提示 特征方程 $\lambda^3-1=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)=0$,特征根为 $\lambda=1$ 和共轭复根 $\lambda=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 方程右端属于 II 型 $k=0,m=0$, 特解可设为 $\tilde{x}=c\cos t+d\sin t$,代入比较得 $c=d=-\frac{1}{2}$. 通解为 $x=c_1e^t+\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}t}-\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)$.

(9) $x''+x'-2x=8\sin 2t$.

提示 特征方程 $\lambda^2+\lambda-2=(\lambda+2)(\lambda-1)=0$,特征根为 $\lambda=1$ 和 $\lambda=-2$. 方程右端属于 II 型 $k=0,m=0$,特解可设为 $\tilde{x}=a\cos 2t+b\sin 2t$,代入比较得 $a=-\frac{2}{5},b=-\frac{6}{5}$. 通解为

$$x=c_1e^t+c_2e^{-2t}-\frac{2}{5}\cos 2t-\frac{6}{5}\sin 2t.$$

(10) $x'''-x=e^t$.

提示 特征方程 $\lambda^3-1=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)=0$,特征根为

$\lambda=1$ 和共轭复根 $\lambda=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. 方程右端对 $\lambda=1$ 属于 I 型 $k=1, m=0$, 特解可设为 $\tilde{x}=ate^t$, 代入得 $a=\frac{1}{3}$. 通解为

$$x=\left(c_1+\frac{1}{3}t\right)e^t+\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}t}.$$

(11) $s''+2as'+a^2s=e^t$.

提示 特征方程 $\lambda^2+2a\lambda+a^2=(\lambda+a)^2=0$, 特征根为 2 重根 $\lambda=-a$. 当 $a\neq-1$ 时方程右端属于 I 型 $k=0, m=0$, 特解可设为 $\tilde{s}=ce^t$, 代入比较得 $c=(a+1)^{-2}$. 解为

$$s=(c_1+c_2t)e^{-at}+(a+1)^{-2}e^t.$$

当 $a=-1$ 时方程右端对 $\lambda=1$ 属于 I 型 $k=2, m=0$, 可设特解为 $\tilde{s}=ct^2e^t$, 代入得 $2ce^t=e^t$, $c=\frac{1}{2}$, 解为 $s=\left(c_1+c_2t+\frac{1}{2}t^2\right)e^t$.

(12) $x''+6x'+5x=e^{2t}$.

提示 特征方程 $\lambda^2+6\lambda+5=(\lambda+1)(\lambda+5)=0$, 特征根为 $\lambda=-1, \lambda=-5$. 方程右端属于 I 型 $k=0, m=0$, 特解可设为 $\tilde{x}=ce^{2t}$, 代入得 $c=\frac{1}{21}$. 解为 $x=c_1e^{-t}+c_2e^{-5t}+\frac{1}{21}e^{2t}$.

(13) $x''-2x'+3x=e^{-t}\cos t$.

提示 特征方程 $\lambda^2-2\lambda+3=0$, 特征根为共轭复根 $\lambda=1\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$. 方程右端属于II型 $k=0, m=0$, 特解可设为 $\tilde{x}=(c\cos t+d\sin t)\cdot e^{-t}$, 代入得 $c=\frac{5}{41}, d=-\frac{4}{41}$. 解为 $x=(c_1\cos\sqrt{2}t+c_2\sin\sqrt{2}t)e^t+\frac{1}{41}(5\cos t-4\sin t)e^{-t}$.

(14) $x''+x=\sin t-\cos 2t$.

提示 特征方程 $\lambda^2+1=0$, 特征根为 $\lambda=\pm\mathrm{i}$. 对方程右端 $\sin t$ 项属于 II 型 $k=1, m=0$, 特解可设为 $\tilde{x}=t(a\cos t+b\sin t)$, 得 $a=$

$-\frac{1}{2}, b=0$. 对方程右端 $-\cos 2t$ 项属于Ⅱ型 $k=0, m=0$，特解可设为 $\tilde{x}=c\cos 2t+d\sin 2t$，可得 $c=\frac{1}{3}, d=0$. 方程的通解为

$$x=c_1\cos t+c_2\sin t-\frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{3}\cos 2t.$$

(15) $x''-4x'+4x=e^t+e^{2t}+1$.

提示 特征方程 $\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2=0$，特征根为2重根 $\lambda=2$. 对非齐次项 e^t+1，属于Ⅰ型 $k=0, m=0$，特解可设为 $\tilde{x}=ce^t+d$，代入比较得 $c=1, d=\frac{1}{4}$. 对非齐次项 e^{2t}，属于Ⅰ型 $k=2$, $m=0$，特解可设为 $\tilde{x}=at^2e^{2t}$，代入得 $a=\frac{1}{2}$. 方程的通解为

$$x=(c_1+c_2t)e^{2t}+\frac{1}{4}+e^t+\frac{1}{2}t^2e^{2t}$$

(16) $x''+9x=t\sin 3t$.

提示 特征方程 $\lambda^2+9=0$，特征根为共轭复根 $\lambda=\pm 3i$. 非齐次项属于Ⅱ型 $k=1, m=0$，特解可设为 $\tilde{x}=t[(at+c)\cos 3t+(bt+d)\sin 3t]$，代入得

$$2a+6d=0, 12b=0, 2b-6c=0, -12a=1,$$

$$b=c=0, a=-\frac{1}{12}, d=\frac{1}{36}.$$

解为 $x=c_1\cos 3t+c_2\sin 3t-\frac{1}{12}t^2\cos 3t+\frac{1}{36}t\sin 3t$.

(17) $x''-2x'+2x=te^t\cos t$.

提示 特征方程 $\lambda^2-2\lambda+2=0$，特征根为共轭复根 $\lambda=1\pm i$. 非齐次项属于Ⅱ型 $k=1, m=0$，特解可设为 $\tilde{x}=te^t[(at+c)\cos t+(bt+d)\sin t]$，代入得

$$2a+2d=0, 4b=1, 2b-2c=0, -4a=0,$$

$$a=d=0, b=c=\frac{1}{4}.$$

解为 $x=e^t(c_1\cos t+c_2\sin t)+\frac{1}{4}te^t(t\sin t+\cos t)$.

(18) $x''+2x'+5x=4e^{-t}+17\sin 2t$.

提示 特征方程 $\lambda^2+2\lambda+5=0$,特征根为共轭复根 $\lambda=-1\pm 2i$. 非齐次项 $4e^{-t}$属于Ⅰ型 $k=0,m=0$,而非齐次项 $17\sin 2t$ 属于Ⅱ型 $k=0,m=0$,特解可设为 $\tilde{x}=ae^{-t}+(b\cos 2t+c\sin 2t)$,代入比较得 $a=1,b=-4,c=1$. 解为

$$x=e^{-t}(c_1\cos 2t+c_2\sin 2t)+e^{-t}-4\cos 2t+\sin 2t.$$

(19) $x''+x=\frac{1}{\sin^3 t}$.

解 特征方程 $\lambda^2+1=0$,特征根为共轭复根 $\lambda=\pm i$. 用常数变易法,设特解 $\tilde{x}=a(t)\cos t+b(t)\sin t$,于是联合解

$$a'(t)\cos t+b'(t)\sin t=0, x''+x\equiv -a'(t)\sin t+b'(t)\cos t=\frac{1}{\sin^3 t}.$$

得

$$a'(t)=-\frac{1}{\sin^2 t}, b'(t)=\frac{\cos t}{\sin^3 t},$$

积分得

$$a(t)=\frac{\cos t}{\sin t}, b(t)=-\frac{1}{2\sin^2 t}.$$

特解为

$$\tilde{x}=\frac{\cos^2 t}{\sin t}-\frac{1}{2\sin t}=-\sin t+\frac{1}{2\sin t}.$$

通解为 $x=c_1\cos t+c_2\sin t+\frac{1}{2\sin t}$,其中 c_1,c_2 为任意常数.

(20) $x''+x=1-\frac{1}{\sin t}$.

解 特征方程 $\lambda^2+1=0$,特征根为共轭复根 $\lambda=\pm i$. 非齐次项 1 属于Ⅰ型 $k=0,m=0$,其特解设为 $\tilde{x}=c$,代入得 $c=1$;非齐次项 $-\frac{1}{\sin t}$不属于Ⅰ、Ⅱ型,用常数变易法,设特解

$$\tilde{x} = a(t)\cos t + b(t)\sin t,$$

于是有

$$a'(t)\cos t + b'(t)\sin t = 0, x'' + x = -a'(t)\sin t + b'(t)\cos t = -\frac{1}{\sin t}.$$

解得 $a'(t) = 1, b'(t) = -\frac{\cos t}{\sin t}$,积分得

$$a(t) = t + c_1, b(t) = -\ln|\sin t| + c_2.$$

通解为 $x = c_1\cos t + c_2\sin t + 1 + t\cos t - \sin t \cdot \ln|\sin t|$,其中 c_1, c_2 为任意常数.

注 如方程右端 $1 - \frac{1}{\sin t}$ 不分项用常数变易法,则有解

$$a'(t) = 1 - \sin t, b'(t) = \cos t - \frac{\cos t}{\sin t},$$

积分得

$$a(t) = t + \cos t + c_1, b(t) = \sin t - \ln|\sin t| + c_2.$$

同样得解 $x = c_1\cos t + c_2\sin t + 1 + t\cos t - \sin t \cdot \ln|\sin t|$.

3. 求下列方程的通解:

(1) $t^2x'' + tx' - x = 0$.

解 欧拉方程. 设方程有解 $x = t^K$,代入得

$$K(K-1) + K - 1 = K^2 - 1 = 0, K = \pm 1.$$

方程的通解为 $x = c_1t + c_2t^{-1}$.

(2) $t^2x'' - 4tx' + 6x = t$.

提示1 欧拉方程. 令 $t = e^s, s = \ln t$,方程可化为 $\frac{d^2x}{ds^2} - 5\frac{dx}{ds} + 6x = e^s$,特征方程为 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$,特征根为 $\lambda = 2, \lambda = 3$. 右端属于 I 型 $k = 0, m = 0$,特解为 $\tilde{x} = \frac{1}{2}e^s$. 通解为 $x = c_1e^{2s} + c_2e^{3s} + \frac{1}{2}e^s$,即 $x = c_1t^2 + c_2t^3 + \frac{1}{2}t$.

提示2 令 $x = t^K$,代入得 $K(K-1) - 4K + 6 = (K-2)(K-3)$

$=0, K=2,3$. 齐次方程的通解为 $x=c_1t^2+c_2t^3$. 令非齐次方程的特解有形式 $\tilde{x}=at$，代入得特解 $\tilde{x}=\frac{1}{2}t$. 通解为 $x=c_1t^2+c_2t^3+\frac{1}{2}t$.

(3) $t^2x''-3tx'-8x=t\ln t$.

提示 令 $t=e^s, s=\ln t$，方程可化为 $\frac{d^2x}{ds^2}-4\frac{dx}{ds}-8x=se^s$，特征方程 $\lambda^2-4\lambda-8=0$，特征根 $\lambda=2\pm2\sqrt{3}$. 右端属于 I 型 $k=0, m=1$，特解为 $\tilde{x}=\left(\frac{2}{121}-\frac{1}{11}s\right)e^s$. 通解为 $x=c_1e^{2(1+\sqrt{3})t}+c_2e^{2(1-\sqrt{3})t}+\frac{1}{121}e^s(2-11s)$，即

$$x=c_1e^{2(1+\sqrt{3})t}+c_2e^{2(1-\sqrt{3})t}+\frac{1}{121}t(2-11\ln t).$$

(4) $t^2x''-tx'+2x=18t\cos(\ln t)$.

解 欧拉方程. 令 $t=e^s, s=\ln t$，方程可化为 $\frac{d^2x}{ds^2}-2\frac{dx}{ds}+2x=18e^s\cos s$，特征方程 $\lambda^2-2\lambda+2=0$，特征根 $\lambda=1\pm i$. 右端属于 II 型 $k=1, m=1$，特解应设为 $\tilde{x}=e^s[(as+c)\cos s+(bs+d)\sin s]$，代入得

$$e^s[(-as+2b+2c)\cos s+(-2a-2c)\sin s]=18e^s\cos s.$$

即 $a=0, 2b+2c=18, a+c=0$，即 $a=c=0, b=9, d$ 可取任意值. 通解为

$$x=e^s(c_1\cos s+c_2\sin s)+9se^s\sin s,$$

即 $x=t[c_1\cos(\ln t)+c_2\sin(\ln t)]+9t\ln t\cdot\sin(\ln t)$，其中 c_1, c_2 为任意常数.

4. 求下列初值问题的解：

(1) $x''+9x=6e^{3t}, x(0)=x'(0)=0$.

解 1 特征方程为 $\lambda^2+9=0$，特征根 $\lambda=\pm3i$，右端属于 I 型 $k=0, m=0$，设特解为 $\tilde{x}=ce^{3t}$. 代入得 $c=\frac{1}{3}$. 通解为 $x=c_1\cos 3t+$

$c_2\sin 3t+\frac{1}{3}e^{3t}$. 代入初值条件有 $c_1=-\frac{1}{3}, c_2=-\frac{1}{3}$. 初值问题的解为 $x=\frac{1}{3}(e^{3t}-\cos 3t-\sin 3t)$.

解 2 用拉普拉斯变换方法. 令 $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$, 方程两端取拉普拉斯变换, 得

$$s^2X(s)+9X(s)=\frac{6}{s-3}.$$

解之

$$X(s)=\frac{6}{(s^2+9)(s-3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s-3}-\frac{s+3}{s^2+9}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\frac{1}{s-3}-\frac{1}{3}\frac{s}{s^2+9}-\frac{1}{s^2+9}.$$

施行拉普拉斯反变换, 查表得解

$$x(t)=\frac{1}{3}e^{3t}-\frac{1}{3}\cos 3t-\frac{1}{3}\sin 3t.$$

(2) $x^{(4)}+x=2e^t, x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=1$.

提示 拉普拉斯变换方法. 有 $s^4X-s^3-s^2-s-1+X=\frac{2}{s-1}$, 即 $X=\frac{1}{s-1}$. 施行拉普拉斯反变换, 查表得解 $x=e^t$.

5. 火车沿水平的道路运动, 火车的重量是 P, 机车的牵引力是 F, 运动时的阻力 $W=a+bV$, 其中 a,b 是常数, 而 V 是火车的速度; S 是走过的路程. 试确定火车的运动规律, 设 $t=0$ 时 $S=0, V=0$.

解 火车的作用力为 $F-W$, 依牛顿第二定律有 $m\frac{d^2S}{dt^2}=F-W$, 由 $m=\frac{P}{g}$ (其中 g 为重力加速度), $W=a+bV, V=\frac{dS}{dt}$, 可得运动方程 $\frac{P}{g}\frac{d^2S}{dt^2}=F-\left(a+b\frac{dS}{dt}\right)$, 即

$$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}+\frac{bg}{P}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{(F-a)g}{P}.$$

这是二阶线性非齐次微分方程,初值条件为 $S(0)=0,S'(0)=V(0)=0$.

解 1 用拉普拉斯变换方法. 令 $X(s)=\mathscr{L}[S(t)]$, $C\equiv\frac{bg}{P}$,在方程两端施以拉普拉斯变换,得

$$s^2X(s)+C\cdot sX(s)=\frac{(F-a)g}{P}\cdot\frac{1}{s}.$$

解之

$$\begin{aligned}X(s)&=\frac{(F-a)g}{P}\cdot\frac{1}{s}\cdot(s^2+Cs)^{-1}\\&=\frac{(F-a)g}{PC}\cdot\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{C}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{C}\cdot\frac{1}{s+C}\right).\end{aligned}$$

施行拉普拉斯反变换,查表得解

$$\begin{aligned}S(t)&=\frac{(F-a)g}{PC}\left(t-\frac{1}{C}+\frac{1}{C}\mathrm{e}^{-Ct}\right)\\&=\frac{(a-F)P}{b^2g}(1-\mathrm{e}^{-\frac{bg}{P}t})+\frac{F-a}{b}t.\end{aligned}$$

解 2 特征方程为 $\lambda^2+\frac{bg}{P}\lambda=\lambda\left(\lambda+\frac{bg}{P}\right)=0$,有特征根 $\lambda=0$, $\lambda=-\frac{bg}{P}$. 右端项对 $\lambda=0$ 属 Ⅰ 型 $k=1,m=0$,特解可设为 $\tilde{S}=ct$. 代入得 $c=\frac{F-a}{b}$. 通解为 $S=c_1+c_2\mathrm{e}^{-\frac{bg}{P}t}+\frac{F-a}{b}t$. 代入初值条件有 $c_1+c_2=0$, $-\frac{bg}{P}c_2+\frac{F-a}{b}=0$,即 $c_2=\frac{(F-a)P}{b^2g}$, $c_1=\frac{(a-F)P}{b^2g}$. 问题的解为

$$S=\frac{(a-F)P}{b^2g}(1-\mathrm{e}^{-\frac{bg}{P}t})+\frac{F-a}{b}t.$$

6. 设 $\varphi(t)$ 是方程 $x''+k^2x=f(t)$ 的解,其中 k 为常数,函数

$f(t)$在 $0\leqslant t<+\infty$ 连续. 试证:

(1) 当 $k\neq 0$ 时,能够选择常数 c_1, c_2 的值,使得

$$\varphi(t)=c_1\cos kt+\frac{c_2}{k}\sin kt+\frac{1}{k}\int_0^t \sin k(t-s)\cdot f(s)\,\mathrm{d}s$$

$(0\leqslant t<+\infty)$;

(2) 当 $k=0$ 时,方程的通解可表为

$$\varphi(t)=c_1+c_2t+\int_0^t (t-s)f(s)\,\mathrm{d}s\quad(0\leqslant t<+\infty),$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

证 1 方程为二阶线性非齐次微分方程. 特征方程为 $\lambda^2+k^2=0$,当 $k\neq 0$ 时特征根为 $\lambda=\pm k\mathrm{i}$,当 $k=0$ 时特征根为 2 重根 $\lambda=0$.

(1) 当 $k\neq 0$ 时,齐次方程有通解 $\varphi(t)=c_1\cos kt+c_2\sin kt$. 用常数变易法. 设 $\varphi(t)=c_1(t)\cos kt+c_2(t)\sin kt$. 可得

$$c_1'(t)\cos kt+c_2'(t)\sin kt=0,$$
$$-kc_1'(t)\sin kt+kc_2'(t)\cos kt=f(t).$$

解出 $c_1'(t), c_2'(t)$后积分得

$$c_1(t)=-\frac{1}{k}\int_0^t \sin ks\cdot f(s)\,\mathrm{d}s+\gamma_1,$$

$$c_2(t)=\frac{1}{k}\int_0^t \cos ks\cdot f(s)\,\mathrm{d}s+\gamma_2.$$

即非齐次线性微分方程的通解为

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=\gamma_1\cos kt+\gamma_2\sin kt+\frac{1}{k}\int_0^t (-\cos kt\cdot\sin ks+\\&\quad\sin kt\cdot\cos ks)\cdot f(s)\,\mathrm{d}s\\&=\gamma_1\cos kt+\gamma_2\sin kt+\frac{1}{k}\int_0^t \sin k(t-s)\cdot f(s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

若令 $\gamma_1=c_1, \gamma_2=\dfrac{c_2}{k}$,则得

$$\varphi(t)=c_1\cos kt+\frac{c_2}{k}\sin kt+\frac{1}{k}\int_0^t \sin k(t-s)\cdot f(s)\,\mathrm{d}s\,(0\leqslant t<+\infty).$$

(2) 当 $k=0$ 时,齐次方程有通解 $\varphi(t)=c_1+c_2t$. 同样用常数变易法,设 $\varphi(t)=c_1(t)+c_2(t)t$,微分可得 $\varphi'(t)=c_2(t)+c_1'(t)+c_2'(t)t$. 令 $c_1'(t)+c_2'(t)t=0$,则有 $\varphi'(t)=c_2(t)$. 再微分得 $\varphi''(t)=c_2'(t)$. 将 $\varphi(t)$,$\varphi''(t)$ 代入非齐次方程可得

$$c_2'(t)=f(t),c_2(t)=\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s+\gamma_2.$$

代入前面所设得

$$c_1'(t)+f(t)t=0,c_1(t)=-\int_0^t sf(s)\,\mathrm{d}s+\gamma_1,$$

即非齐次线性微分方程的通解为

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=\gamma_1+\gamma_2t-\int_0^t sf(s)\,\mathrm{d}s+t\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\\&=\gamma_1+\gamma_2t+\int_0^t (t-s)f(s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

证 2　特征方程为 $\lambda^2+k^2=0$,当 $k\neq0$ 时特征根为 $\lambda=\pm k\mathrm{i}$,当 $k=0$ 时特征根为 2 重根 $\lambda=0$.

(1) 当 $k\neq0$ 时,齐次方程有通解 $\varphi(t)=c_1\cos kt+c_2\sin kt$. 直接应用二阶线性微分方程的常数变易公式求特解:

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=\cos kt\cdot\int_0^t \frac{W_1(s)}{W(s)}f(s)\,\mathrm{d}s+\sin kt\cdot\int_0^t \frac{W_2(s)}{W(s)}f(s)\,\mathrm{d}s\\&=\cos kt\cdot\int_0^t \frac{-\sin ks}{k}f(s)\,\mathrm{d}s+\sin kt\cdot\int_0^t \frac{\cos ks}{k}f(s)\,\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{k}\int_0^t (\sin kt\cdot\cos ks-\cos kt\cdot\sin ks)f(s)\,\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{k}\int_0^t \sin k(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

得非齐次线性微分方程的通解为

$$\varphi(t)=\gamma_1\cos kt+\gamma_2\sin kt+\frac{1}{k}\int_0^t \sin k(t-s)\cdot f(s)\,\mathrm{d}s.$$

若令 $\gamma_1=c_1,\gamma_2=\dfrac{c_2}{k}$,则得

$$\varphi(t)=c_1\cos kt+\frac{c_2}{k}\sin kt+\frac{1}{k}\int_0^t \sin k(t-s)\cdot f(s)\mathrm{d}s(0\leqslant t<+\infty).$$

(2) 当 $k=0$ 时，齐次方程有通解 $\varphi(t)=c_1+c_2t$. 应用二阶线性微分方程的常数变易公式求特解：

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=\int_0^t \frac{W_1(s)}{W(s)}f(s)\mathrm{d}s+t\int_0^t \frac{W_2(s)}{W(s)}f(s)\mathrm{d}s\\&=-\int_0^t sf(s)\mathrm{d}s+t\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\\&=\int_0^t (t-s)f(s)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

非齐次线性微分方程的通解为

$$\varphi(t)=\gamma_1+\gamma_2t+\int_0^t (t-s)f(s)\mathrm{d}s.$$

注 当 $k=0$ 时，方程为 $x''=f(t)$，可利用公式直接求积分得特解

$$x=\int_0^t\left[\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t=\int_0^t (t-s)f(s)\mathrm{d}s.$$

7. 给定方程 $x'''+5x''+6x'=f(t)$，其中 $f(t)$ 在 $-\infty<t<+\infty$ 上连续. 设 $\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$ 是上述方程的两个解，证明极限 $\lim\limits_{t\to\infty}[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)]$ 存在.

证 特征方程为 $\lambda^3+5\lambda^2+6\lambda=\lambda(\lambda+2)(\lambda+3)=0$，有特征根 $\lambda=0,\lambda=-2,\lambda=-3$. 齐次方程有通解 $x=c_1+c_2\mathrm{e}^{-2t}+c_3\mathrm{e}^{-3t}$. 因非齐次方程的两个解之差是齐次方程的解，即应有

$$\varphi_1(t)-\varphi_2(t)=c_1+c_2\mathrm{e}^{-2t}+c_3\mathrm{e}^{-3t},$$

其中 c_1,c_2,c_3 都是常数. 因此存在极限

$$\lim_{t\to\infty}[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)]=\lim_{t\to\infty}[c_1+c_2\mathrm{e}^{-2t}+c_3\mathrm{e}^{-3t}]=c_1.$$

§4.4.5 习题 4.3 及其解答

1. 求解下列方程(这里 $x'=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},x''=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$)：

(1) $x''=\frac{1}{2x'}$.

解 方程不含 t,x. 令 $y=x'$,则方程变为 $y'=\frac{1}{2y}$,可分离变量解之:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2y},2ydy=dt,y^2=t+c_1,y=\pm(t+c_1)^{\frac{1}{2}}.$$

于是

$$x'=y=\pm(t+c_1)^{\frac{1}{2}},x+c_2=\pm\int_0^t(t+c_1)^{\frac{1}{2}}dt=\pm\frac{2}{3}(t+c_1)^{\frac{3}{2}},$$

$$9(x+c_2)^2=4(t+c_1)^3,$$

得方程的解为 $9(x+c_2)^2=4(t+c_1)^3$,其中 c_1,c_2 为任意常数.

(2) $xx''-(x')^2+(x')^3=0$.

提示 方程不含 t. 令 $y=x'$,则方程变为 $xy\frac{dy}{dx}-y^2+y^3=0$,得 $y=0$ 即 $x=c$ 或 $x\frac{dy}{dx}=y(1-y)$,$\frac{dx}{x}=\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y-1}\right)dy$,积分得 $y=\frac{\tilde{c}x}{\tilde{c}x-1}$. 有 $x'=\frac{\tilde{c}x}{\tilde{c}x-1}$,积分得 $x-\frac{1}{\tilde{c}}\ln|x|=t+c_2$. 即方程有解 $x+c_1\ln|x|=t+c_2$ 及 $x=c$.

(3) $x''+\frac{2}{1-x}(x')^2=0$.

提示 方程不含 t. 令 $y=x'$,则方程变为 $y\frac{dy}{dx}+\frac{2}{1-x}y^2=0$,得 $y=0$ 即 $x=c$ 或$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{1-x}y=0$,分离变量解得 $y=\tilde{c}(x-1)^2$. 即 $x'=\tilde{c}(x-1)^2$,积分得$(x-1)^{-1}=c_1t+c_2$. 方程有解$(x-1)(c_1t+c_2)=1$(解 $x=c$ 被包含在通解中).

(4) $x''+\sqrt{1-(x')^2}=0$.

提示1 方程不含 t,x. 令 $y=x'$,则方程变为 $y'+\sqrt{1-y^2}=0$,

可分离变量解之：

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -dt, \arcsin y = c_1 - t, x' = y = \sin(c_1 - t),$$

$$x = \cos(t - c_1) + c_2.$$

方程的解为 $x = \cos(t - c_1) + c_2$. 又 $y^2 = 1, y = \pm 1$ 时 $x' = \pm 1, x = \pm t + c$ 也是解.

提示 2 方程不含 t. 令 $y = x'$，则方程变为 $y\frac{dy}{dx} + \sqrt{1-y^2} = 0$.

即 $\frac{y dy}{\sqrt{1-y^2}} = -dx$，积分得 $y = \pm\sqrt{1-(x+c_1)^2}$. 由 $x' = y = \pm\sqrt{1-(x+c_1)^2}$，再积分有 $x + c_1 = \sin(t + c_2)$ 或 $x + c_1 = \cos(t + c_2)$. 又 $y^2 = 1, y = \pm 1$，即 $x' = \pm 1, x = \pm t + c$ 也是解.

提示 3 方程不含 t. 令 $x' = \sin y$，方程变为 $\cos y \cdot y' + \cos y = 0$，有解

$$\cos y = 0, x' = \sin y = \pm 1, x = \pm t + c,$$

及 $y' = -1, y = -t + c_1, x' = \sin y = \sin(c_1 - t), x = \cos(t - c_1) + c_2$.
方程的解为 $x = \pm t + c$ 及 $x = \cos(t - c_1) + c_2$.

(5) $ax'' + [1 + (x')^2]^{\frac{3}{2}} = 0$（常数 $a \neq 0$）.

提示 1 方程不含 t, x. 令 $y = x', x'' = y' = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = y\frac{dy}{dx}$，则方程变为 $ay\frac{dy}{dx} + (1+y^2)^{\frac{3}{2}} = 0$. 积分得 $-a(1+y^2)^{-\frac{1}{2}} = x - c_1$. 于是有

$$x' = y = \pm\sqrt{\frac{a^2}{(x-c_1)^2} - 1}, \frac{x - c_1}{\sqrt{a^2 - (x-c_1)^2}} dx = \pm dt,$$

$$\sqrt{a^2 - (x-c_1)^2} = \pm t \mp c_2,$$

即解为 $(x - c_1)^2 + (t - c_2)^2 = a^2$，其中 c_1, c_2 为任意常数.

提示 2 方程不含 t, x. 令 $y = x'$，则方程变为 $ay' + (1+y^2)^{\frac{3}{2}} = 0$，再令 $y = \tan z$，则有 $a\sec^2 z \cdot z' + \sec^3 z = 0$，有解 $\sec^2 z = 0$ 和 az'

$+\sec z=0$. 由后一式有 $\mathrm{d}t=-a\cos z\mathrm{d}z$ 及 $\mathrm{d}x=y\mathrm{d}t=\tan z\mathrm{d}t=-a\sin z\mathrm{d}z$,积分得解 $t=c_2-a\sin z$ 及 $x=c_1+a\cos z$. 以上两式可合并为 $(x-c_1)^2+(t-c_2)^2=a^2$,其中 c_1,c_2 为任意常数.

(6) $x''-\frac{1}{t}x'+(x')^2=0$(提示:方程两端除以 x').

提示 1 用 x' 除方程有 $\frac{x''}{x'}+x'=\frac{1}{t}$,化为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x+\ln|x'|)=\frac{1}{t}$. 积分得 $\mathrm{e}^x x'=\tilde{c}t$,再积分有 $\mathrm{e}^x=c_1t^2+c_2$. 方程还有解 $x'=0,x=c$. 故方程的通解为 $\mathrm{e}^x=c_1t^2+c_2$(解 $x=c$ 被含于通解中).

提示 2 方程不含 x. 令 $y=x'$,则方程变为 $y'-\frac{1}{t}y+y^2=0$,是伯努利方程,引入变换 $z=y^{-1}$,可化为线性方程 $z'=-y^{-2}y'=-\frac{1}{t}z+1$. 积分得

$$z=\frac{1}{t}\left(\int t\mathrm{d}t+\tilde{c}\right)=\frac{\tilde{c}}{t}+\frac{1}{2}t,x'=y=\frac{2t}{c_1+t^2},\mathrm{e}^x=c_2(c_1+t^2).$$

方程还有解 $y=0,x'=0,x=c$,含于上解中. 故方程的通解为 $\mathrm{e}^x=c_2(c_1+t^2)$.

2. 用幂级数解法求解下列方程:

(1) $x''+tx'+x=0,x(0)=0,x'(0)=1$.

解 对二阶齐次线性方程 $x''+p(t)x'+q(t)x=0$,当 $p(t)$,$q(t)$ 能展成幂级数时有收敛的幂级数解. 方程中 $p(t)=t,q(t)=1$,故存在幂级数解.

设

$$x=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n+\cdots$$

是方程的解,这里 $a_i(i=0,1,\cdots,n,\cdots)$ 是待定常数. 于是

$$x'=a_1+2a_2t+3a_3t^2+\cdots+na_nt^{n-1}+\cdots,$$

$$x''=2a_2+6a_3t+\cdots+n(n-1)a_nt^{n-2}+\cdots.$$

将 x,x',x'' 的表达式代入方程,比较同次幂系数,可得

$$2a_2+a_0=0,6a_3+2a_1=0,$$
$$k(k-1)a_k+(k-2)a_{k-2}+a_{k-2}=0,k>3.$$

由 $x(0)=0,x'(0)=1$,有

$$a_0=0,a_1=1,a_2=0,a_3=-\frac{1}{3},a_4=0,a_5=\frac{1}{3\cdot 5},\cdots,$$
$$a_{2k}=0,a_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2k+1)}.$$

于是有幂级数解

$$x=t-\frac{t^3}{1\cdot 3}+\frac{t^5}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots+(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!!}+\cdots.$$

(2) $(1-t)x''+x=0.$

提示 方程化为 $x''+\frac{x}{1-t}=0$,因 $tp(t)=0,t^2q(t)=\frac{t^2}{1-t}$,故存在幂级数解.设

$$x=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n+\cdots.$$

将 x,x',x''的表达式代入原方程,比较同次幂系数,可得

$$2a_2+a_0=0,3\cdot 2a_3-2a_2+a_1=0,$$
$$k(k-1)a_k-(k-1)(k-2)a_{k-1}+a_{k-2}=0,k>3.$$

考虑方程的通解,可设 $x(0)=c_1,x'(0)=c_2$,有 $a_0=c_1,a_1=c_2$,

$$a_2=-\frac{1}{2}c_1,a_3=-\frac{1}{3!}c_1-\frac{1}{3!}c_2,a_k=\frac{k-2}{k}a_{k-1}-\frac{1}{k(k-1)}a_{k-2}(k>3).$$

于是可逐次递推求得幂级数解

$$x=c_1\left(1-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3!}t^3-\frac{1}{4!}t^4-\frac{2}{5!}t^5-\frac{7}{6!}t^6-\cdots\right)+$$
$$c_2\left(t-\frac{1}{3!}t^3-\frac{2}{4!}t^4-\frac{5}{5!}t^5-\frac{18}{6!}t^6-\cdots\right).$$

(3) $x''-tx'-x=0.$

提示 $p(t)=-t,q(t)=-1$,故存在幂级数解 $x=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n+\cdots$,将 x,x',x''的表达式代入方程,比较同次幂系数,得

$$2a_2-a_0=0,6a_3-2a_1=0,$$

$$k(k-1)a_k-(k-1)a_{k-2}=0,k>3.$$

即

$$a_2=\frac{a_0}{2},a_3=\frac{a_1}{3},a_k=\frac{a_{k-2}}{k},k>3.$$

设初值条件 $x(0)=a_0=c_1,x'(0)=a_1=c_2$,有

$$a_0=c_1,a_1=c_2,a_2=\frac{c_1}{2},a_3=\frac{c_2}{3},a_4=\frac{c_1}{2\cdot 4},a_5=\frac{c_2}{3\cdot 5},\cdots,$$

$$a_{2k}=\frac{c_1}{2\cdot 4\cdot \cdots \cdot (2k)},a_{2k+1}=\frac{c_2}{3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2k+1)},\cdots.$$

于是有幂级数解

$$x=c_1\left(1+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{2\cdot 4}+\frac{t^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots\right)+c_2\left(t+\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{3\cdot 5}+\frac{t^7}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots\right).$$

3. 求解贝塞尔方程

$$t^2x''+tx'+\left(t^2-\frac{1}{4}\right)x=0.$$

(提示:$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.)

解 方程为 $n=\frac{1}{2}$的贝塞尔方程 $t^2x''+tx'+(t^2-n^2)x=0$. 有通解

$$y=c_1\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(t)+c_2\mathrm{J}_{-\frac{1}{2}}(t).$$

由 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$及 $\sin t=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}t^{2k+1}$可得

$$\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma\left(\frac{1}{2}+k+1\right)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2^{-k}}{k!\ 1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2k+1)}t^{2k+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sin t.$$

同样,由 $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$及 $\cos t=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}t^{2k}$可得

$$\mathrm{J}_{-\frac{1}{2}}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma\left(1-\frac{1}{2}+k\right)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2^{-k}}{k!\ 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2k)}t^{2k}=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos t.$$

即通解亦可写为

$$y=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}(c_1\sin t+c_2\cos t).$$

4. 一个物体在大气中降落,初速度为零,空气阻力与速度的平方成正比例,求该物体的运动规律.

解 以 m,x 分别表示物体的质量和降落的距离,则物体的下降速度为 x',加速度为 x'',按牛顿第二定律,物体降落时的运动方程可写为

$$mx''=mg-k(x')^2,x(0)=0,x'(0)=0,$$

其中 g 为重力加速度,$k>0$ 为比例常数.

若令 $v=x'$,则方程可化为 $mv'=mg-kv^2$. 记 $a=\sqrt{\frac{mg}{k}}$, $b=\sqrt{\frac{kg}{m}}$,积分求解:

$$\frac{m\mathrm{d}v}{mg-kv^2}=\frac{m}{k}\frac{\mathrm{d}v}{a^2-v^2}=\mathrm{d}t,$$

$$\frac{m}{2ka}\ln\left|\frac{a=0+v}{a=0-v}\right|=\frac{1}{2b}\ln\left|\frac{a=0+v}{a=0-v}\right|=t+\tilde{c}.$$

即

$$\frac{a+v}{a-v}=c\mathrm{e}^{2bt},v=\frac{a(c\mathrm{e}^{2bt}-1)}{1+c\mathrm{e}^{2bt}}.$$

利用初值条件 $v(0)=x'(0)=0$ 得 $c=1$,即有

$$x'=v=\frac{a(\mathrm{e}^{2bt}-1)}{1+\mathrm{e}^{2bt}},x=\frac{a}{b}\ln\frac{1+\mathrm{e}^{2bt}}{\mathrm{e}^{bt}}+\tilde{c}.$$

再利用初值条件 $x(0)=0$ 得 $\tilde{c}=0$,有解

$$x=\frac{m}{k}\ln\frac{1+e^{2bt}}{e^{bt}}=\frac{m}{k}\ln[\operatorname{ch}(bt)]=\frac{m}{k}\ln\left[\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right)\right].$$

5. 试证:对于二阶齐次线性微分方程

$$x''+p(t)x'+q(t)x=0,$$

其中 $p(t)$,$q(t)$ 为连续函数.

(1) 若 $p(t)\equiv -tq(t)$,则 $x=t$ 是方程的解;

(2) 若存在常数 m,使得 $m^2+mp(t)+q(t)\equiv 0$,则方程有解 $x=e^{mt}$;

(3) 若 $x_1(t)$,$x_2(t)$ 是方程的两个线性无关的解,则方程的系数 $p(t)$,$q(t)$ 由 $x_1(t)$,$x_2(t)$ 唯一确定,且 $x_1(t)$,$x_2(t)$ 没有共同的零点.

证 (1) 当 $p(t)\equiv -tq(t)$ 时,方程化为 $x''-tq(t)x'+q(t)x=0$,将 $x=t$ 代入方程得 $x''-tq(t)x'+q(t)x=0-tq(t)+q(t)t\equiv 0$,即 $x=t$ 是方程的解.

(2) 将 $x=e^{mt}$ 代入方程得

$$x''+p(t)x'+q(t)x=m^2e^{mt}+mp(t)e^{mt}+q(t)e^{mt}$$

$$=e^{mt}[m^2+mp(t)+q(t)]\equiv 0.$$

故 $x=e^{mt}$ 是方程的解.

(3) 微分由解 x_1,x_2 构成的朗斯基行列式:

$$W'[x_1,x_2]=\begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x''_1 & x''_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -px_1'-qx_1 & -px_2'-qx_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -px_1' & -px_2' \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ qx_1 & qx_2 \end{vmatrix}$$

$$=-p\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix}-q\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}=-pW[x_1,x_2].$$

因 x_1,x_2 线性无关,知在解定义的区间上 $W[x_1,x_2]\neq 0$,故有

$$p=-\frac{W'[x_1,x_2]}{W[x_1,x_2]}.$$

又对 x_1,x_2 不为零的点上有 $q=-\frac{x''_1+px'_1}{x_1}$或 $q=-\frac{x''_2+px'_2}{x_2}$. 这证明了方程的系数 $p(x),q(x)$ 由 $x_1(x),x_2(x)$ 唯一确定.

若存在 x_1,x_2 的共同零点 $\bar{t}$, 即 $x_1(\bar{t})=x_2(\bar{t})=0$. 则由解 x_1,x_2 构成的朗斯基行列式在点 $\bar{t}$ 为零. 这与 x_1,x_2 线性无关, 由解 x_1,x_2 构成的朗斯基行列式恒不为零的性质矛盾. 故 $x_1(t),x_2(t)$ 没有共同的零点.

6. 求解方程 $tx''-2(1+t)x'+(2+t)x=0\quad(t\neq0)$.

解 1 易知方程有解 $x=e^t$. 令 $x=e^ty$, 有 $x'=e^ty'+e^ty$, $x''=e^ty''+2e^ty'+e^ty$. 代入方程得

$$\begin{aligned}&t(e^ty''+2e^ty'+e^ty)-2(1+t)(e^ty'+e^ty)+(2+t)e^ty\\&=te^ty''-2e^ty'+[te^t-2(1+t)e^t+(2+t)e^t]y\\&=te^ty''-2e^ty'=0.\end{aligned}$$

再令 $y'=z$, 方程变为 $tz'-2z=0$. 有解 $\ln|z|=2\ln|t|+\tilde{c}$, $z=3c_1t^2$, 由 $y'=z$ 得 $y'=3c_1t^2$, 再积分得

$$y=c_1t^3+c_2,$$

即原方程有解 $x=ye^t=(c_1t^3+c_2)e^t$, 其中 c_1,c_2 为任意常数, 它是方程的通解.

解 2 方程化为 $x''-2\left(1+\frac{1}{t}\right)x'+\left(1+\frac{2}{t}\right)x=0$. 易知有解 $x=e^t$. 直接应用二阶齐次方程解式(见[书 §4.3.1-(4.70)])得

$$\begin{aligned}x&=x_1\left(c_1+c\int\frac{1}{x_1^2}e^{-\int p(t)dt}dt\right)=e^t\left[c_1+c\int e^{-2t}e^{\int2\left(1+\frac{1}{t}\right)dt}dt\right]\\&=e^t\left(c_1+c\int t^2dt\right)=e^t(c_1+c_2t^3).\end{aligned}$$

方程的通解为 $x=e^t(c_1+c_2t^3)$, 其中 c_1,c_2 为任意常数.

7. 假设 $\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$ 是方程(4.58)的通解，而函数 $\psi(t,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 是 $x^{(k)}=\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$ 的通解，试证 $\psi(t,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 就是方程(4.57)的通解，这里 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-k},\cdots,c_n$ 为任意常数.

证 $\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$ 是方程(4.58)：$F(t,y,y',\cdots,y^{(n-k)})=0$ 的通解，即有

$$F(t,\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-k)})\equiv 0,$$

且 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-k}$ 是彼此独立的常数. 而函数 $\psi(t,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 是 $x^{(k)}=\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$ 的通解，即

$$\psi^{(k)}(t,c_1,c_2,\cdots,c_n)\equiv\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k}).$$

于是

$$\psi(t,c_1,c_2,\cdots,c_n)\equiv\int\cdots\int\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})\mathrm{d}t\cdots\mathrm{d}t+c_{n-k+1}t^{k-1}+c_{n-k+2}t^{k-2}+\cdots+c_n,$$

其中 $c_{n-k+1},c_{n-k+2},\cdots,c_n$ 是彼此独立的常数.

将 $x=\psi(t,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 代入(4.57)：$F(t,x^{(k)},x^{(k+1)},\cdots,x^{(n)})=0$ 中有

$$F(t,\psi^{(k)},\psi^{(k+1)},\cdots,\psi^{(n)})\equiv F(t,\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-k)})\equiv 0,$$

即 $\psi(t,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 是方程(4.57)的解. 且因 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-k}$ 彼此独立，即有

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\psi}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial\psi}{\partial c_{n-k}}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial\psi^{(k-1)}}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial\psi^{(k-1)}}{\partial c_{n-k}}\end{vmatrix}\neq 0,$$

于是

$$
\begin{vmatrix}
\frac{\partial\psi}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial\psi}{\partial c_{n-k}} & \frac{\partial\psi}{\partial c_{n-k+1}} & \cdots & \frac{\partial\psi}{\partial c_n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial\psi^{(k-1)}}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial\psi^{(k-1)}}{\partial c_{n-k}} & \frac{\partial\psi^{(k-1)}}{\partial c_{n-k+1}} & \cdots & \frac{\partial\psi^{(k-1)}}{\partial c_n} \\
\frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial c_{n-k}} & \frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial c_{n-k+1}} & \cdots & \frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial c_n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial\psi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial\psi^{(n-1)}}{\partial c_{n-k}} & \frac{\partial\psi^{(n-1)}}{\partial c_{n-k+1}} & \cdots & \frac{\partial\psi^{(n-1)}}{\partial c_n}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
\frac{\partial\psi}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial\psi}{\partial c_{n-k}} & t^{k-1} & \cdots & 1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial\psi^{(k-1)}}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial\psi^{(k-1)}}{\partial c_{n-k}} & (k-1)! & \cdots & 0 \\
\frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial c_{n-k}} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial\psi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial\psi^{(n-1)}}{\partial c_{n-k}} & 0 & \cdots & 0
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
\frac{\partial\psi}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial\psi}{\partial c_{n-k}} \\
\vdots & & \vdots \\
\frac{\partial\psi^{(k-1)}}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial\psi^{(k-1)}}{\partial c_{n-k}}
\end{vmatrix} \neq 0,
$$

即常数 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-k}, \cdots, c_n$ 彼此独立. $\psi(t, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是方程(4.57)的通解.

第五章　线性微分方程组

§5.1　内 容 提 要

§5.1.1　存在唯一性定理

(1) 矩阵、向量的记号和定义　同含参数 t 的同维数矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$，$\boldsymbol{B}(t)$ 及向量 $\boldsymbol{u}(t)$，$\boldsymbol{v}(t)$，当它们的分量在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 有定义、连续且可微时有性质：

(Ⅰ) $[\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t)]'=\boldsymbol{A}'(t)+\boldsymbol{B}'(t)$，$[\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{v}(t)]'=\boldsymbol{u}'(t)+\boldsymbol{v}'(t)$；

(Ⅱ) $[\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)]'=\boldsymbol{A}'(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}'(t)$；

(Ⅲ) $[\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{u}(t)]'=\boldsymbol{A}'(t)\cdot\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{u}'(t)$.

如定义范数 $\|\boldsymbol{A}\|=\sum|a_{ij}|$，$\|\boldsymbol{u}\|=\sum|u_i|$，则有性质：

(Ⅰ) $\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|+\|\boldsymbol{B}\|$，$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|\leqslant\|\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{v}\|$；

(Ⅱ) $\|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{B}\|$，$\|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{u}\|$.

称 n 维向量序列 $\{\boldsymbol{u}_k\}$ 收敛，若对任一 $i=1,\cdots,n$，数列 $\{u_{ik}\}$ 收敛. 称 n 维函数向量序列 $\{\boldsymbol{u}_k(t)\}$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 收敛（一致收敛），若对任一 $i=1,\cdots,n$，函数序列 $\{u_{ik}(t)\}$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 收敛（一致收敛）.

连续函数向量序列的一致收敛极限向量函数仍是连续的.

当 $\|\boldsymbol{u}_k(t)\|\leqslant M_k\,(a\leqslant t\leqslant b)$，而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}M_k$ 收敛时，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{u}_k(t)$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 一致收敛.

(2) n **阶线性微分方程组** 可用矩阵、向量写成

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t), \tag{①}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}(t)=[a_{ij}(t)]$, $\boldsymbol{f}(t)=(f_1(t),f_2(t),\cdots,f_n(t))^{\mathrm{T}}$ 是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的已知连续函数. 若有在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上定义的、连续且可微的 n 维向量函数 $\boldsymbol{u}(t)$ 满足方程组①,则称 $\boldsymbol{u}(t)$ 是方程组①的解.

n 阶线性微分方程组初值问题

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\eta} \tag{②}$$

的解就是方程组①在包含 t_0 的区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上的解 $\boldsymbol{u}(t)$,使得 $\boldsymbol{u}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$.

n 阶线性微分方程初值问题

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=f(t),\\ &x(t_0)=\eta_1,x'(t_0)=\eta_2,\cdots,x^{(n-1)}(t_0)=\eta_n,\end{aligned} \tag{③}$$

其中 $a_i(t)$,$f(t)$ 是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的已知连续函数,$t_0\in[a,b]$, $\eta_i(i=1,\cdots,n)$ 是已知常数. 可以化为等价的 n 阶线性微分方程组的初值问题②. 此时有形式

$$\begin{bmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_{n-1}'\\ x_n'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&1\\ -a_1(t)&-a_2(t)&\cdots&-a_n(t)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ f(t)\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}x_1(t_0)\\ \vdots\\ x_{n-1}(t_0)\\ x_n(t_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_{n-1}\\ \eta_n\end{bmatrix}.$$

(3) **存在唯一性定理** 如果 $n\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 和 n 维列向量 $\boldsymbol{f}(t)$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上连续,则对区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的任何数 t_0 及任一常数列向量 $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\cdots,\eta_n)^{\mathrm{T}}$,方程组①存在唯一解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$,定义

于整个区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上,且满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$.

可仿照第三章关于一阶方程存在唯一性定理的证明,亦可直接分如下几步证明:

(a) 若 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是方程组②的解,则 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 也是积分方程

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^{t}[\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{x}(s)+\boldsymbol{f}(s)]\mathrm{d}s,a\leqslant t\leqslant b \tag{4}$$

的解. 反之亦然.

(b) 取 $\boldsymbol{\varphi}_0(t)=\boldsymbol{\eta}$,定义 $\boldsymbol{\varphi}_k(t)=\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^{t}[\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_{k-1}(s)+\boldsymbol{f}(s)]\mathrm{d}s,n=1,2,\cdots$. 则对所有正整数 k,$\boldsymbol{\varphi}_k(t)$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上有定义且连续.

(c) 函数序列 $\{\boldsymbol{\varphi}_k(t)\}$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上一致收敛.

(d) 设 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{\varphi}_k(t)=\boldsymbol{\varphi}(t)$,则 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是积分方程④在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续解.

(e) 设 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 是积分方程④在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的另一个连续解,则

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\psi}(t),\quad a\leqslant t\leqslant b.$$

§5.1.2 线性微分方程组的一般理论

(1) 基本概念

齐次线性微分方程组:$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$. ①

非齐次线性微分方程组:$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$. ②

朗斯基行列式:

$$W(t)=W[\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)]=\begin{vmatrix}x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t)\\ \vdots & & \vdots\\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t)\end{vmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{x}_i(t)(i=1,\cdots,n)$ 为在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上定义的 n 维向量函数.

线性相关:对定义在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的向量函数 $\boldsymbol{x}_i(t)(i=1,$

$\cdots,m)$，如果存在不全为零的常数 $c_i(i=1,\cdots,m)$，使得在整个区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上恒成立

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_m\boldsymbol{x}_m(t)=\boldsymbol{0},$$

则称 $\boldsymbol{x}_i(t)(i=1,\cdots,m)$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上线性相关. 不是线性相关的函数 $\boldsymbol{x}_i(t)(i=1,\cdots,m)$ 称为在所给区间上线性无关.

基本解组(基解组)：n 维一阶齐次线性方程组①的一组 n 个线性无关解 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 组成的矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$. 当 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E}$(单位矩阵)时称 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为标准的.

(2) **齐次线性方程基本性质**

(a) 存在唯一性：设矩阵 $\boldsymbol{A}(t)=[a_{ij}(t)](i,j=1,\cdots,n)$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上连续，则对任意 $t_0\in[a,b]$ 及任意初值 $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)^{\mathrm{T}}$，方程组①存在唯一解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 定义于区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上，且满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$.

(b) 叠加原理：方程组①的 k 个解 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_k(t)$ 的线性组合

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_k\boldsymbol{x}_k(t)$$

也是方程组①的解. 其中 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 为任意常数.

(c) 若函数 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上线性相关或无关，则在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上它们的朗斯基行列式 $W(t)\equiv 0$ 或恒不为零.

齐次线性方程组①的基本解组的朗斯基行列式恒不为零.

(d) 通解结构：设 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是齐次线性方程组①的一个基本解组，则齐次线性方程组①的通解可表为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}\equiv c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t), \qquad ③$$

其中 $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$ 为任意常向量. 通解包括了齐次线性方程组①的所有解.

(e) 齐次线性方程组①的 n 个解 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 组成基本解组 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的充要条件为 $\det\boldsymbol{\Phi}(t)\neq 0$.

齐次线性方程组①的两个基本解组 $\boldsymbol{\Phi}(t),\boldsymbol{\Psi}(t)$ 必有关系

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{C}(a\leqslant t\leqslant b),\det \boldsymbol{C}\neq 0.$$

（3）**非齐次线性方程基本性质**

（a）存在唯一性：设 $\boldsymbol{A}(t)=[a_{ij}(t)](i,j=1,\cdots,n)$ 和 $\boldsymbol{f}(t)$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上连续，则对任意 $t_0\in[a,b]$ 及任意初值 $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)^{\mathrm{T}}$，方程组②存在唯一解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 定义于区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上，且满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$.

（b）如果 $\boldsymbol{x}(t),\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ 分别为 n 维一阶线性方程组②，①的解，则 $\boldsymbol{x}(t)+\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ 也是方程组②的解. 如果 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t)$ 均为方程组②的解，则 $\boldsymbol{x}_1(t)-\boldsymbol{x}_2(t)$ 是方程组①的解.

（c）通解结构：设 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是齐次线性方程组①的一个基本解组. $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ 是方程②的某一解（特解），则非齐次线性方程组②的通解可表为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}+\tilde{\boldsymbol{x}}(t),$$

其中 $\boldsymbol{c}$ 为任意 n 维常向量. 反之，对方程组②的任意解，必存在常向量 $\boldsymbol{c}$，使之表为上述形式.

（d）常数变易法：当已知方程组①的一个基本解组 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 时，可用常数变易法求得方程组②的解

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s,\quad t_0,t\in[a,b].$$

上式称为非齐次线性方程组②的常数变易公式.

（e）非齐次线性高阶方程当 $\eta=0$ 时的特解的常数变易公式为

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{n}x_k(t)\int_{t_0}^{t}\frac{W_k[x_1(s),\cdots,x_n(s)]}{W[x_1(s),\cdots,x_n(s)]}f(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 为齐次线性高阶方程的一个基本解组，W 为朗斯基行列式，W_k 为 W 的第 k 列代以 $(0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$ 后所得行列式.

当 $n=2$ 时，常数变易公式变为

$$\varphi(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{x_2(t)x_1(s)-x_1(t)x_2(s)}{W[x_1(s),x_2(s)]}f(s)\mathrm{d}s.$$

非齐次线性高阶方程的通解则可表为

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) + \varphi(t),$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为任意常数.

§5.1.3 常系数线性微分方程组

常系数线性方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$ ①

(1) **矩阵指数** $\exp \boldsymbol{A}$ $n \times n$ 阶常数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵指数定义为

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} \equiv \exp \boldsymbol{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k}{k!} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \frac{\boldsymbol{A}}{2!} + \cdots + \frac{\boldsymbol{A}^m}{m!} + \cdots,$$

其中 $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}$ 为单位矩阵. 矩阵指数 $\exp \boldsymbol{A}$ 有性质:

(a) $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} \equiv \exp(\boldsymbol{A}t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k t^k}{k!}$ 在 t 的任意有限区间上一致收敛;

(b) 当矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 可交换, 即 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ 时有 $\exp(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \exp \boldsymbol{A} \cdot \exp \boldsymbol{B}$;

(c) $(\exp \boldsymbol{A})^{-1}$存在且$(\exp \boldsymbol{A})^{-1} = \exp(-\boldsymbol{A})$;

(d) 如果 $\boldsymbol{T}$ 为非奇异矩阵, 即 $\det \boldsymbol{T} \neq 0$, 则 $\exp(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{T}^{-1}(\exp \boldsymbol{A})\boldsymbol{T}$.

(2) **基解矩阵** $\boldsymbol{\Phi}(t) = \exp(\boldsymbol{A}t)$是常系数线性方程组①的标准基本解组(标准基解矩阵), $\boldsymbol{\Phi}(0) = \boldsymbol{E}$. 方程组①的任一解可表为$[\exp(\boldsymbol{A}t)]\boldsymbol{c}$.

(3) **特征值和特征向量** 对 $n \times n$ 阶(实)常数矩阵 $\boldsymbol{A}$, n 次多项式

$$p(\lambda) \equiv \det(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式. n 次代数方程 $p(\lambda) = 0$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程, 亦称为线性微分方程组①的特征方程. 特征方程的根 λ 称为特征值或特征根. 而线性代数方程组$(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ 的非零解 $\boldsymbol{u}$ 称为对应特征值 λ 的特征向量.

n 次特征方程有 n 个特征值(包括重数). 若 $p(\lambda)$ 含因子 $(\lambda-\lambda_0)^k$ 而不含因子 $(\lambda-\lambda_0)^{k+1}$,则称特征值 λ_0 为 k 重根. $k=1$ 时称 λ_0 为单根. 特征值 λ_0 可以是实的,也可以是复的. λ_0 为复数时,则其共轭复数 $\bar{\lambda}_0$ 也是特征值.

如果 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关特征向量 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$,它们对应的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$(可以相同),则常系数线性方程组①的基解矩阵可表为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=[\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2,\cdots,\mathrm{e}^{\lambda_n t}\boldsymbol{v}_n] \quad (-\infty<t<+\infty),$$

且有 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)$.

(4) **子空间** 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $n_1,\cdots,n_k$ 重特征值,且 $n_1+\cdots+n_k=n$,则线性代数方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^{n_j}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ 的非零解 $\boldsymbol{u}_j$ 的全体构成欧几里得空间 U 的一个 n_j 维子空间 $U_j(j=1,\cdots,k)$. $U=U_1\otimes U_2\otimes\cdots\otimes U_k$,即 $u=u_1+\cdots+u_k$.

在欧几里得空间 U 中将初值向量分解为 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{v}_k$, $\boldsymbol{v}_j\in U_j(j=1,\cdots,k)$,则有 $(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^l\boldsymbol{v}_j=\boldsymbol{0}(l\geqslant n_j,j=1,\cdots,k)$. 常系数线性方程组①有满足 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\sum_{j=1}^{k}\mathrm{e}^{\lambda_j t}\left[\sum_{i=0}^{n_j-1}\frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})^i\right]\boldsymbol{v}_j.$$

当 $\boldsymbol{A}$ 仅有一个特征值 λ 时,有 $\exp(\boldsymbol{A}t)=\mathrm{e}^{\lambda t}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^i$. 此时 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{e}_1+\cdots+\boldsymbol{e}_n$, $\boldsymbol{e}_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{e}_i$ 仅在第 i 个位置为 1.

(5) **若尔当标准型** 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必存在非奇异矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{J}$ 为若尔当标准型:

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{J}_k\end{bmatrix},\boldsymbol{J}_j=\begin{bmatrix}\lambda_j & 1 & & \\ & \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j\end{bmatrix},j=1,\cdots,k,$$

其中 $\boldsymbol{J}_j$ 为 n_j 阶矩阵，$n_1+\cdots+n_k=n$，而 k 为矩阵 $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}$ 的初级因子的个数，$\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 矩阵中未标出的元素均为零. 于是，方程组①的基解矩阵为 $\exp(\boldsymbol{A}t)=\boldsymbol{T}[\exp(\boldsymbol{J}t)]\boldsymbol{T}^{-1}$ 或 $\boldsymbol{\Psi}(t)=\boldsymbol{T}\exp(\boldsymbol{J}t)$，其中

$$\exp(\boldsymbol{J}t)=\begin{bmatrix}\exp(\boldsymbol{J}_1t) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(\boldsymbol{J}_kt)\end{bmatrix},$$

$$\exp(\boldsymbol{J}_jt)=\begin{bmatrix}1 & t & \cdots & \dfrac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \\ & 1 & \cdots & \dfrac{t^{n_j-2}}{(n_j-2)!} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1\end{bmatrix}e^{\lambda_jt}.$$

(6) **解的渐近性态**　对常系数线性方程组①：

(a) 当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均具负实部时，①的任一解当 $t\to+\infty$ 时均趋于零；

(b) 当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值实部均非正且零实部特征值均为简单时，①的任一解当 $t\to+\infty$ 时均保持有界；

(c) 当 $\boldsymbol{A}$ 含有正实部的特征值时，①至少有一解当 $t\to+\infty$ 时趋于无穷.

(7) **拉普拉斯变换**　对向量函数 $\boldsymbol{f}(t)$，如果满足条件 $\|\boldsymbol{f}(t)\|\leqslant Me^{\alpha t}$，则非齐次常系数线性微分方程组初值问题

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{\eta}$$

的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 及其导数 $\boldsymbol{x}'(t)$ 和函数 $\boldsymbol{f}(t)$ 均存在拉普拉斯变换. 因此，对非齐次常系数线性微分方程组的初值问题，可以用拉普拉斯变换化为代数方程组，求解代数方程组后再通过拉普拉斯反变换求得微分方程组满足初值条件的解.

§5.2 学习辅导

§5.2.1 解题指导

(1) 首先要掌握矩阵的表示与运算,能化高阶线性方程为线性方程组,理解齐次线性方程组的基本解组和叠加原理,用矩阵表示齐次和非齐次线性方程组解的通解结构,用矩阵和朗斯基行列式表示非齐次线性方程组的常数变易公式.

(2) 熟悉常数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵指数 $\exp \boldsymbol{A}$ 的定义和运算,掌握矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量的求法及应用于表示常系数线性方程组的基本解组.

(3) 求常系数线性方程组基本解组有

(a) 特征值和特征向量方法求矩阵指数函数;

(b) 指数函数待定系数法(欧拉法);

(c) 化为若尔当标准型矩阵方法(见[书§5.3.2-附注2]);

(d) 微分方程方法(见[书§5.3.2-附注3]);

(e) 消去法化为高阶方程求解;

(f) 可积组合法(见[书§7.3 利用首次积分求解常微分方程组]);

(g) 微分算子法(见[文 17、19、20]等)及拉普拉斯变换法.

核心是重根的判断和处理.只要熟练掌握一种方法即可.实际上除(c)、(d)、(g)较特殊外各种方法均可根椐情况灵活使用.在[§5.3.1 补充习题]及[§5.4.2 补充习题解答]中有关于各种方法的习题做比较.

(4) 能用特征值判断常系数线性方程组的解的渐近性态,包括趋于零、有界及趋于无穷.

(5) 能用拉普拉斯变换方法求解非齐次常系数线性微分方程组初值问题.

§5.2.2 例题选讲

例 1 试将下列微分方程或微分方程组化为一阶微分方程组

(1) $x''-tx'+x=\cos t$;

(2) $x_1'-x_2=\mathrm{e}^t, x_2''+x_1-x_2'-x_2=\sin t$.

解 (1) 令 $y_1=x, y_1'=x'=y_2$,则可将二阶微分方程化为一阶微分方程组

$$\begin{cases} y_1'=y_2, \\ y_2'=ty_2-y_1+\cos t. \end{cases}$$

(2) 令 $y_1=x_1, y_2=x_2, y_2'=y_3$,则可将所给的微分方程组化为一阶微分方程组

$$\begin{cases} y_1'=y_2+\mathrm{e}^t, \\ y_2'=y_3, \\ y_3'=-y_1+y_2+y_3+\sin t. \end{cases}$$

例 2 用常数变易法求解微分方程组

$$\begin{cases} x'=-2x-4y+1+\mathrm{e}^t, \\ y'=y-x+t^2. \end{cases}$$

解 对应的齐次微分方程组

$$\begin{cases} x'=-2x-4y, \\ y'=y-x \end{cases}$$

的特征方程为

$$\det(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda+2 & 4 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+3)=0.$$

有特征值 $\lambda=2, \lambda=-3$.

对应于 $\lambda=2$ 的特征向量 $\boldsymbol{u}=[u_1,u_2]^{\mathrm{T}}$ 满足

$$(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4u_1+4u_2 \\ u_1+u_2 \end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

可取特征向量 $\boldsymbol{u}=[1,-1]^{\mathrm{T}}$. 对应于 $\lambda=-3$ 的特征向量 $\boldsymbol{u}=[u_1,$

$u_2]^{\mathrm{T}}$ 满足

$$(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-u_1+4u_2\\ u_1-4u_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

可取特征向量 $\boldsymbol{u}=[4,1]^{\mathrm{T}}$. 对应的齐次微分方程组有通解

$$\begin{cases}x=c_1\mathrm{e}^{2t}+4c_2\mathrm{e}^{-3t},\\ y=-c_1\mathrm{e}^{2t}+c_2\mathrm{e}^{-3t}.\end{cases}$$

用常数变易法,设非齐次方程组的解为

$$\begin{cases}x=c_1(t)\mathrm{e}^{2t}+4c_2(t)\mathrm{e}^{-3t},\\ y=-c_1(t)\mathrm{e}^{2t}+c_2(t)\mathrm{e}^{-3t}.\end{cases}$$

代入方程组得

$$\begin{cases}c_1'(t)\mathrm{e}^{2t}+4c_2'(t)\mathrm{e}^{-3t}=1+\mathrm{e}^{t},\\ -c_1'(t)\mathrm{e}^{2t}+c_2'(t)\mathrm{e}^{-3t}=t^2.\end{cases}$$

可解得

$$\begin{cases}c_1'(t)=(1-4t^2+\mathrm{e}^{t})\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-2t},\\ c_2'(t)=(1+t^2+\mathrm{e}^{t})\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{3t}.\end{cases}$$

利用积分式[附录Ⅱ §3.3 -3(19)、(21)]积分得

$$\begin{cases}c_1(t)=\dfrac{1}{10}[(1+2t)^2\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-t}]+\tilde{c}_1,\\ c_2(t)=\dfrac{1}{540}[(44-24t+36t^2)\mathrm{e}^{3t}+27\mathrm{e}^{4t}]+\tilde{c}_2,\end{cases}$$

其中 $\tilde{c}_1,\tilde{c}_2$ 为任意常数. 可取 $\tilde{c}_1=\tilde{c}_2=0$ 得非齐次方程组的特解

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{54}(23+12t+36t^2),\\ y=\dfrac{1}{108}[27\mathrm{e}^{t}-(2+48t+36t^2)].\end{cases}$$

非齐次方程组的通解为

$$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + 4c_2 e^{-3t} + \dfrac{1}{54}(23 + 12t + 36t^2), \\ y = -c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} + \dfrac{1}{108}[27e^t - (2 + 48t + 36t^2)], \end{cases}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

例 3 计算矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的指数函数 e^{At}.

解 A 的特征方程为

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 & 5 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 + 1) = 0.$$

有特征值 $\lambda = 0, \lambda = i, \lambda = -i$.

对应于 $\lambda = 0$ 的特征向量 $u = [u_1, u_2, u_3]^T$ 满足

$$(\lambda E - A)u = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_2 \\ 2u_2 + 5u_3 \\ -u_2 - 2u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

可取特征向量 $u = \alpha \cdot [1, 0, 0]^T$,其中 $\alpha \neq 0$ 为任意常数. 对应于 $\lambda = i$ 的特征向量 $v = [v_1, v_2, v_3]^T$ 满足

$$(\lambda E - A)v = \begin{bmatrix} i & -1 & 0 \\ 0 & i + 2 & 5 \\ 0 & -1 & i - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iv_1 - v_2 \\ (i + 2)v_2 + 5v_3 \\ -v_2 + (i - 2)v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

可取特征向量 $v = \beta \cdot [1 + 2i, i - 2, 1]^T$,其中 $\beta \neq 0$ 为任意常数. 对应于 $\lambda = -i$ 的特征向量 $w = [w_1, w_2, w_3]^T$ 满足

$$(\lambda E - A)w = \begin{bmatrix} -i & -1 & 0 \\ 0 & -i + 2 & 5 \\ 0 & -1 & -i - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -iw_1 - w_2 \\ (-i + 2)w_2 + 5w_3 \\ -w_2 + (-i - 2)w_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

可取特征向量 $w = \gamma \cdot [1 - 2i, -2 - i, 1]^T$,其中 $\gamma \neq 0$ 为任意常

数. 对应的齐次微分方程组有基解矩阵(取 $\alpha=\beta=\gamma=1$)

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=[\boldsymbol{u},e^{it}\boldsymbol{v},e^{-it}\boldsymbol{w}]=\begin{bmatrix}1 & (1+2i)e^{it} & (1-2i)e^{-it}\\ 0 & (i-2)e^{it} & -(i+2)e^{-it}\\ 0 & e^{it} & e^{-it}\end{bmatrix}.$$

因为

$$\boldsymbol{\Phi}(0)=\begin{bmatrix}1 & 1+2i & 1-2i\\ 0 & i-2 & -2-i\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\begin{bmatrix}1 & -2 & -5\\ 0 & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2}-i\\ 0 & \frac{i}{2} & \frac{1}{2}+i\end{bmatrix},$$

得

$$\begin{aligned}e^{At}&=\boldsymbol{\Phi}(t)\cdot\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)\\&=\begin{bmatrix}1 & -2+\left(1-\frac{i}{2}\right)e^{it}+\left(1+\frac{i}{2}\right)e^{-it} & -5+\frac{5}{2}e^{it}+\frac{5}{2}e^{-it}\\ 0 & \left(\frac{1}{2}+i\right)e^{it}+\left(\frac{1}{2}-i\right)e^{-it} & \frac{5i}{2}e^{it}-\frac{5i}{2}e^{-it}\\ 0 & -\frac{i}{2}e^{it}+\frac{i}{2}e^{-it} & \left(\frac{1}{2}-i\right)e^{it}+\left(\frac{1}{2}+i\right)e^{-it}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1 & -2+2\cos t+\sin t & -5+5\cos t\\ 0 & \cos t-2\sin t & -5\sin t\\ 0 & \sin t & \cos t+2\sin t\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

例 4 求解例 1(2)化成的微分方程组.

解 例 1(2)化成微分方程组

$$\begin{cases}y_1'=y_2+e^t,\\ y_2'=y_3,\\ y_3'=-y_1+y_2+y_3+\sin t.\end{cases}$$

先求对应的齐次微分方程组的基解矩阵.

(1) 矩阵法. 因

$$
\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&1&1\end{bmatrix},\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^t\\0\\\sin t\end{bmatrix},
$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$
\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0.
$$

有重次分别为 1,2 的特征值 $\lambda=-1,\lambda=1$.

对应于 $\lambda=-1$ 的特征向量 $\boldsymbol{u}=[u_1,u_2,u_3]^{\mathrm{T}}$ 满足

$$
(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\1&-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-u_1-u_2\\-u_2-u_3\\u_1-u_2-2u_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},
$$

可取特征向量 $\boldsymbol{u}=\alpha\cdot[1,-1,1]^{\mathrm{T}}$,其中 $\alpha\neq0$ 为任意常数. 对应于 2 重特征值 $\lambda=1$ 的特殊向量 $\boldsymbol{v}=[v_1,v_2,v_3]^{\mathrm{T}}$ 满足

$$
(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^2\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&1\\-1&2&-1\\1&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}v_1-2v_2+v_3\\-v_1+2v_2-v_3\\v_1-2v_2+v_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},
$$

可取特殊向量 $\boldsymbol{v}=[\beta,\gamma,2\gamma-\beta]^{\mathrm{T}}$,其中 β,γ 为不全为零的任意常数.

注 由重矩阵得到的向量不是特征向量,我们称其为特殊向量.

对初值向量 $\boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{\eta}$,有 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$,即

$$
\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\eta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha+\beta\\-\alpha+\gamma\\\alpha+2\gamma-\beta\end{bmatrix}.
$$

解得

$$\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}(\eta_1-2\eta_2+\eta_3)\\\frac{1}{4}(3\eta_1+2\eta_2-\eta_3)\\\frac{1}{4}(\eta_1+2\eta_2+\eta_3)\end{bmatrix}.$$

于是

$$\boldsymbol{u}=\frac{1}{4}(\eta_1-2\eta_2+\eta_3)\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{v}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3\eta_1+2\eta_2-\eta_3\\\eta_1+2\eta_2+\eta_3\\-\eta_1+2\eta_2+3\eta_3\end{bmatrix}.$$

有解 $\boldsymbol{y}(t)=\mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{Eu}+\mathrm{e}^{t}[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})]\boldsymbol{v}$. 初值 $\boldsymbol{\eta}$ 依次取$[1,0,0]^{\mathrm{T}}$, $[0,1,0]^{\mathrm{T}}$, $[0,0,1]^{\mathrm{T}}$,可得齐次方程组的标准基解矩阵:

$$\exp(\boldsymbol{A}t)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}+(3-2t)\mathrm{e}^{t} & -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{-t}+(-1+2t)\mathrm{e}^{t}\\-\mathrm{e}^{-t}+(1-2t)\mathrm{e}^{t} & 2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{t} & -\mathrm{e}^{-t}+(1+2t)\mathrm{e}^{t}\\\mathrm{e}^{-t}+(-1-2t)\mathrm{e}^{t} & -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{-t}+(3+2t)\mathrm{e}^{t}\end{bmatrix}.$$

(2) 高阶方程法. 令 $y=y_1$,则有 $y'=y_2, y''=y_3, y'''=y_3'$,可将齐次方程组化为高阶方程 $y'''-y''-y'+y=0$. 有重次分别为 1,2 的特征值 $\lambda=-1, \lambda=1$,方程有通解 $y=c_1\mathrm{e}^{-t}+(c_2+tc_3)\mathrm{e}^{t}$,其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数. 于是齐次方程组有通解

$$y_1=c_1\mathrm{e}^{-t}+(c_2+tc_3)\mathrm{e}^{t}, y_2=-c_1\mathrm{e}^{-t}+[c_2+(1+t)c_3]\mathrm{e}^{t},$$

$$y_3=c_1\mathrm{e}^{-t}+[c_2+(2+t)c_3]\mathrm{e}^{t}.$$

其基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{t} & t\mathrm{e}^{t}\\-\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{t} & (1+t)\mathrm{e}^{t}\\\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{t} & (2+t)\mathrm{e}^{t}\end{bmatrix}.$$

由基解矩阵可得标准基解矩阵

$$\exp(\boldsymbol{A}t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\cdot\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} e^{-t} & e^{t} & te^{t} \\ -e^{-t} & e^{t} & (1+t)e^{t} \\ e^{-t} & e^{t} & (2+t)e^{t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} e^{-t}+(3-2t)e^{t} & -2e^{-t}+2e^{t} & e^{-t}+(-1+2t)e^{t} \\ -e^{-t}+(1-2t)e^{t} & 2e^{-t}+2e^{t} & -e^{-t}+(1+2t)e^{t} \\ e^{-t}+(-1-2t)e^{t} & -2e^{-t}+2e^{t} & e^{-t}+(3+2t)e^{t} \end{bmatrix},$$

其逆矩阵为

$$\exp(-\boldsymbol{A}t)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} (3+2t)e^{-t}+e^{t} & 2e^{-t}-2e^{t} & -(1+2t)e^{-t}+e^{t} \\ (1+2t)e^{-t}-e^{t} & 2e^{-t}+2e^{t} & (1-2t)e^{-t}-e^{t} \\ (-1+2t)e^{-t}+e^{t} & 2e^{-t}-2e^{t} & (3-2t)e^{-t}+e^{t} \end{bmatrix}.$$

现用常数变易法求非齐次方程组的特解. 设解为 $\boldsymbol{y}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{c}(t)$,则一方面有 $\boldsymbol{y}'(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{c}'(t)+\boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{c}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{c}'(t)+\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t)$,另一方面解满足 $\boldsymbol{y}'(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t)+\boldsymbol{f}(t)$. 得 $\boldsymbol{c}'(t)=e^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{f}(t)$. 即有 $\boldsymbol{c}(t)=\int e^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{f}(t)\,dt$. 于是

$$\boldsymbol{c}(t)=\int_0^t e^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{f}(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} \int[(3+2t)+e^{2t}-(1+2t)e^{-t}\sin t+e^{t}\sin t]\,dt \\ \int[(1+2t)+e^{2t}+(1-2t)e^{-t}\sin t-e^{t}\sin t]\,dt \\ \int[(-1+2t)+e^{2t}+(3-2t)e^{-t}\sin t+e^{t}\sin t]\,dt \end{bmatrix}.$$

应用积分公式[附录Ⅱ §3.3-6(53)、(55)],最后积分得

$$\boldsymbol{c}(t)$$

$$=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 6t+2t^2+e^{2t}+[(3+2t)e^{-t}-e^{t}]\cos t+[(1+2t)e^{-t}+e^{t}]\sin t+\gamma_1 \\ 2t+2t^2-e^{2t}+[(1+2t)e^{-t}+e^{t}]\cos t+[(1-2t)e^{-t}+e^{t}]\sin t+\gamma_2 \\ -2t+2t^2+e^{2t}-[(1-2t)e^{-t}+e^{t}]\cos t+[(-3+2t)e^{-t}+e^{t}]\sin t+\gamma_3 \end{bmatrix}.$$

非齐次方程组的通解为

$$\boldsymbol{y}(t)=\mathrm{e}^{At}\boldsymbol{c}(t)$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}+(3-2t)\mathrm{e}^{t} & 2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{-t}+(-1+2t)\mathrm{e}^{t}\\ -\mathrm{e}^{-t}+(1-2t)\mathrm{e}^{t} & -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{t} & -\mathrm{e}^{-t}+(1+2t)\mathrm{e}^{t}\\ \mathrm{e}^{-t}+(-1-2t)\mathrm{e}^{t} & 2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{-t}+(3+2t)\mathrm{e}^{t}\end{bmatrix}\cdot$$

$$\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{bmatrix}+\frac{1}{8}\begin{bmatrix}(1+6t-2t^2)\mathrm{e}^{t}+2\cos t+2\sin t\\ (-1+2t-2t^2)\mathrm{e}^{-t}+2\cos t-2\sin t\\ (1-2t-2t^2)\mathrm{e}^{-t}-2\cos t-2\sin t\end{bmatrix},$$

其中 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 为任意常数.

例 5 讨论微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mu x-y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\mu y-z,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\mu z-x \quad (\mu \text{ 为常数})$$

的解当 $t\to+\infty$ 时的渐近性态.

解 线性微分方程组的特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-\mu & 1 & 0\\ 0 & \lambda-\mu & 1\\ 1 & 0 & \lambda-\mu\end{vmatrix}=(\lambda-\mu)^3+1=0.$$

有三个不同特征值 $\lambda=\mu-1,\mu+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\mu+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. 当 $\mu<-\frac{1}{2}$ 时三个 λ 均为负实部,根据[书 §5.3.2 - 定理 11],方程组的任一解当 $t\to+\infty$ 时均趋于零;当 $\mu>-\frac{1}{2}$ 时 λ 存在正实部,方程组有解当 $t\to+\infty$ 时均趋于无穷;当 $\mu=-\frac{1}{2}$ 时三个 λ 为具零实部和负实部的不同特征值,方程组的任一解当 $t\to+\infty$ 时均有界.

§5.2.3 测试练习

1. 试将下列微分方程化为等价的一阶微分方程组:

(1) $\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+2n\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\omega^2\varphi=H\sin pt$;

(2) $\frac{d^2y}{dt^2}+a_1\frac{dy}{dt}+b_1y+c_1\frac{dz}{dt}=0$,

$\frac{d^2z}{dt^2}+a_2\frac{dz}{dt}+b_2z+c_2\frac{dy}{dt}=0$;

(3) $x''+f(x)x'+g(x)=0$.

2. 试将下列微分方程组化为等价的微分方程，并求出方程的解：

(1) $x'=3x-10y, y'=x-4y, x(0)=8, y(0)=1$;

(2) $tx'=-x+ty, t^2y'=-2x+ty$，其中 $x=x(t), y=y(t)$.

3. 能将任意的微分方程组化为等价的微分方程吗？如不能，请举例说明.

4. 试述线性微分方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 解的朗斯基行列式的性质.

5. 求下列矩阵的特征值和特征向量（进一步计算 $\exp(\boldsymbol{A}t)$ 见[§5.3.1-1]）：

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -4 & 1\end{bmatrix}$；(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 2 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 3 & 3 & -1\end{bmatrix}$.

6. 计算下列矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的指数函数 $\exp(\boldsymbol{A}t)$：

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$；(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$；(3) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

7. 求下列常系数线性微分方程组的特解形式（不必具体求解，具体求解见[§5.3.1-2]）

(1) $\begin{cases}x'=3x+y+e^{3t},\\ y'=-2x+2e^{-t};\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x'=y+5t^2,\\ y'=e^{2t},\\ z'=3z+t;\end{cases}$

(3) $\begin{cases} x' = 2x - y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = -3x + y - 2z, \\ x(0) = y(0) = 0, z(0) = 1. \end{cases}$

8. 判断第 5 题中的 $\boldsymbol{A}$ 所确定的常系数线性微分方程组 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的解的渐近性态.

§5.3 补充提高

§5.3.1 补充习题

1. 计算 §5.2.3 第 5 题中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的指数函数 $\exp(\boldsymbol{A}t)$.

2. 具体求出 §5.2.3 第 7 题中常系数线性微分方程组的解.

3. 试用矩阵指数函数法求解下列齐次微分方程组

(1) $\begin{cases} x' = 2x + 4y, \\ y' = -x - 2y; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1' = x_2 - x_3, \\ x_2' = x_1 + x_2, \\ x_3' = x_1 + x_3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 - x_3, \\ x_2' = x_1 + 3x_2 - x_3, \\ x_3' = 3x_1 + 3x_2 - x_3. \end{cases}$

4. 试用指数函数待定系数法(欧拉法)解第 3 题.

5. 试用矩阵变换化为若尔当标准形(见[书 §5.3.2 - 附注 2])解第 3 题.

6. 试用求基解矩阵的微分方程方法(见[书 §5.3.2 - 附注 3])解第 3 题.

7. 试用消去法化为高阶方程解第 3 题.

注 关于用可积组合法求解第 3 题见[§7.3.1 - 2].

8. 试解下列微分方程:

(1) $\begin{cases} x' = 2x + 4y + \cos t, \\ y' = -x - 2y + \sin t; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1' = x_2 - x_3 + e^t, \\ x_2' = x_1 + x_2, \\ x_3' = x_1 + x_3 - e^t; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 - x_3 + 2t, \\ x_2' = x_1 + 3x_2 - x_3 + 1, \\ x_3' = 3x_1 + 3x_2 - x_3. \end{cases}$

9. 试用常数变易公式求解第 8 题(1).

10. 试用拉普拉斯变换方法求解第 8 题(1).

§5.3.2 排疑解惑

(1) **变系数线性方程组** 线性微分方程组虽然存在基本解组和叠加原理,解的结构已知,但仅常系数线性方程组能够完全求解,对变系数线性方程组如何求解仍待解决.

具周期系数的线性齐次方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}(t+\omega) = \boldsymbol{A}(t)$$

可以通过变换 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Z}(t)\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}(t+\omega) = \boldsymbol{Z}(t)$ 化为常系数线性方程组 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$ 求解.

对一般变系数线性方程组 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}$,当 $\boldsymbol{P}(t)$ 连续有界时,佩龙证明存在连续可微正交矩阵 $\boldsymbol{U}(t)$ 使得方程组通过变换 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{U}(t)\boldsymbol{x}$化为

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Q}(t) = \boldsymbol{U}'(t)[\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{U}(t) - \boldsymbol{U}'(t)],$$

而 $\boldsymbol{Q}(t)$ 为三角形矩阵. 利用三角形线性方程组可以逐步求解方程组或判断变系数方程组解的稳定性态.

(2) **矩阵指数** $\exp(\boldsymbol{A}t)$ 线性微分方程组 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的解当 $\boldsymbol{A}$ 是纯量时为 $\boldsymbol{x} = e^{\boldsymbol{A}t} \cdot \boldsymbol{c}$. 而指数函数 $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots$,对 n 阶常数矩阵 $\boldsymbol{A}$,自然提出其方程组 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的解表示为 $e^{\boldsymbol{A}t} \cdot \boldsymbol{c}$ 或 $[\exp(\boldsymbol{A}t)] \cdot \boldsymbol{c}$的问题. 矩阵指数由此成功定义. 其矩阵解 $e^{\boldsymbol{A}t} \equiv$

$\exp(\boldsymbol{A}t)$不仅是方程的基解矩阵，还是标准基解矩阵，$e^{\boldsymbol{A}\cdot 0}=\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵. 矩阵指数 $\exp(\boldsymbol{A}t)$的定义非常便于齐次及非齐次方程的求解.

（3）**已知 k 个解的降阶** ［书 §5.2－定理 6 的推论 2］提出，如果已知 n 阶齐次线性方程组的 k 个线性无关非零解，则可降低 k 阶. 其证明如下：

设方程 $x_i' = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ 有 k 个线性无关非零解 $\varphi_{il}(t)$（$i=1,\cdots,n;l=1,\cdots,k$）. 显然，对 $l=1$，有某 i 使 $\varphi_{i1}\neq 0$，否则，取 $c_1=1,c_i=0(i=2,\cdots,k)$，$k$ 个已知解线性相关. 不妨设 $\varphi_{n1}\neq 0$（必要时调换下标）. 取变换

$$y_n=\frac{1}{\varphi_{n1}}x_n,\ y_i=x_i-\frac{\varphi_{i1}}{\varphi_{n1}}x_n, \qquad (*)$$

则有 $\varphi_{n1}y_n=x_n$，$\varphi_{n1}'y_n+\varphi_{n1}y_n'=x_n'=\sum\limits_{j=1}^{n-1}a_{nj}x_j+a_{nn}x_n$，即

$$\begin{aligned}\varphi_{n1}y_n' &= \sum_{j=1}^{n-1}a_{nj}(y_j+\varphi_{j1}y_n)+a_{nn}\varphi_{n1}y_n-\varphi_{n1}'y_n\\ &= \sum_{j=1}^{n-1}a_{nj}(y_j+\varphi_{j1}y_n)+a_{nn}\varphi_{n1}y_n-\sum_{j=1}^{n}a_{nj}\varphi_{j1}y_n\\ &= \sum_{j=1}^{n-1}a_{nj}y_j.\end{aligned}$$

得 $y_n'=\sum\limits_{j=1}^{n-1}\dfrac{a_{nj}}{\varphi_{n1}}y_j$，而

$$\begin{aligned}y_i' &= x_i'-\varphi_{i1}'y_n-\varphi_{i1}y_n'=\sum_{j=1}^{n-1}a_{ij}x_j+a_{in}x_n-\varphi_{i1}'y_n-\varphi_{i1}y_n'\\ &= \sum_{j=1}^{n-1}a_{ij}y_j+\sum_{j=1}^{n-1}a_{ij}\varphi_{j1}y_n+a_{in}\varphi_{n1}y_n-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\varphi_{j1}y_n-\varphi_{i1}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{a_{nj}}{\varphi_{n1}}y_j\\ &= \sum_{j=1}^{n-1}a_{ij}y_j-\varphi_{i1}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{a_{nj}}{\varphi_{n1}}y_j\\ &= \sum_{j=1}^{n-1}\left(a_{ij}-a_{nj}\frac{\varphi_{i1}}{\varphi_{n1}}\right)y_j, \quad i=1,\cdots,n-1.\end{aligned}$$

得到不含 y_n 的 $n-1$ 阶线性方程组 $y_i' = \sum_{j=1}^{n-1}\left(a_{ij} - a_{nj}\frac{\varphi_{i1}}{\varphi_{n1}}\right)y_j, i = 1,\cdots,n-1$. 变换(*)使 k 个线性无关解 $\varphi_{il}(t)(i=1,\cdots,n;l=1,\cdots,k)$ 变为

$$\psi_{nl} = \frac{1}{\varphi_{n1}}\varphi_{nl}, \psi_{il} = \varphi_{il} - \frac{\varphi_{i1}}{\varphi_{n1}}\varphi_{nl}, \quad i=1,\cdots,n-1;l=1,\cdots,k.$$

而对 $l=1$ 有 $\psi_{n1}=1, \psi_{i1}=0, i=1,\cdots,n-1$. 即解 $\varphi_{i1}(t)(i=1,\cdots,n)$ 变为单位向量解. 如设 $\{\psi_{il}\}$ 线性相关,即存在 $c_l(l=1,\cdots,k)$ 使得 $\sum_{l=1}^{k} c_l\psi_{il} = 0(i=1,\cdots,n)$, 则由 ψ_{il} 的定义知有 $\sum_{l=1}^{k} c_l\psi_{nl} = \sum_{l=1}^{k} c_l\frac{\varphi_{nl}}{\varphi_{n1}} = 0$, 于是

$$\sum_{l=1}^{k} c_l\psi_{il} = \sum_{l=1}^{k} c_l\varphi_{il} - \sum_{l=1}^{k} c_l\frac{\varphi_{i1}}{\varphi_{n1}}\varphi_{nl} = \sum_{l=1}^{k} c_l\varphi_{il} = 0, i=1,\cdots,n-1.$$

这与原假设 $\{\varphi_{il}\}$ 线性无关矛盾. 故 $\{\psi_{il}\}$ 也线性无关.

可仍将 y_i 记为 x_i,新方程仍记为 $x_i' = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_j$,线性无关解 $\psi_{il}(t)$ 记为 $\varphi_{il}(t)$,只是 n,k 分别变为 $n-1,k-1$. 同样对 $l=2$,有某 $i(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 使 $\varphi_{i2}\neq 0$,否则,有 $\varphi_{il}=0(i=1,\cdots,n-1;l=1,2)$ 取 $c_1=\varphi_{n2}, c_2=-\varphi_{n1}\neq 0$, φ_{i1} 与 φ_{i2} 线性相关,矛盾. 于是可再一次施行变换,仅将新的 $x_i(i=1,\cdots,n-1)$ 变换为 $y_i(i=1,\cdots,n-1)$,而 x_n 则不变,取 $y_n=x_n$,每次变换降低一阶. 最后得到 $n-k$ 阶线性方程组,由[书 §5.2 - 定理6]有 $n-k$ 个线性无关解,经反变换可构成原方程的 $n-k$ 个线性无关解.

当已知 $n-1$ 个线性无关解时,经 $n-1$ 次变换最后剩下一阶线性方程,可直接分离变量积分之.

(4) **指数函数待定系数法(欧拉法)** 求解常系数齐次线性微分方程的欧拉待定指数函数法(见[书 §4.2.2])同样适用于微分方程组,每个特解对应每个特征值. 但对重特征值,计算较为复

杂.对方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 如有 m 重特征值 λ,可设解为 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{c}_0t^{m-1}+\boldsymbol{c}_1t^{m-2}+\cdots+\boldsymbol{c}_{m-1})\mathrm{e}^{\lambda t}$,此时有

$$\begin{aligned}&[\lambda(\boldsymbol{c}_0t^{m-1}+\boldsymbol{c}_1t^{m-2}+\cdots+\boldsymbol{c}_{m-1})+\\&[(m-1)\boldsymbol{c}_0t^{m-2}+(m-2)\boldsymbol{c}_1t^{m-3}+\cdots+\boldsymbol{c}_{m-2}]]\mathrm{e}^{\lambda t}\\=&\boldsymbol{A}(\boldsymbol{c}_0t^{m-1}+\boldsymbol{c}_1t^{m-2}+\cdots+\boldsymbol{c}_{m-1})\mathrm{e}^{\lambda t},\end{aligned}$$

$$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{c}_0=\boldsymbol{0},(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{c}_k+(m-k)\boldsymbol{c}_{k-1}=\boldsymbol{0},k=1,2,\cdots,m-1.$$

设 $\boldsymbol{c}_{-1}=\boldsymbol{0}$,则向量 $\boldsymbol{c}_k,k=0,1,\cdots,m$($m$ 为重次)可通过逐次解代数方程

$$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{c}_k=-(m-k)\boldsymbol{c}_{k-1},\quad k=0,1,\cdots,m$$

得到.可能出现因 $\boldsymbol{c}_{k-1}$ 而 $\boldsymbol{c}_k$ 不可解的情形,此时可改令 $\boldsymbol{c}_{k-1}=\boldsymbol{0}$,而取线性无关的满足方程的多个向量代替 $\boldsymbol{c}_k$.如此求得与特征值 λ 对应的特解.对应所有特征值的全部特解便组成常系数齐次线性微分方程组的基解矩阵.例子见[§5.3.1-4]及[§5.4.2-4].

求得的向量 $\boldsymbol{c}_k$ 称为特殊向量.这与用矩阵法有重特征值时求得的重矩阵的向量相同.

对非齐次线性微分方程组,当非齐次(向量)项的各分量都具同一类型时也可应用欧拉法待定系数求解,但这较特殊.如非齐次项 $[t,\mathrm{e}^t]^{\mathrm{T}},[\mathrm{e}^t,\mathrm{e}^{2t}]^{\mathrm{T}},[1,\sin t]^{\mathrm{T}}$ 均无法应用欧拉法.非齐次线性微分方程组一般应用常数变易法求解.

(5) **若尔当(Jordan)标准型** 根据线性代数理论,两个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$,若有非奇异矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$,记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.相似是一种等价关系.两矩阵相似的充要条件是它们的特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A},\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 等价.方法是对特征矩阵进行行(列)互换、数乘及乘 $h(\lambda)$(多项式)加到另一行(列)的初等变换而将其变为对角或三角形矩阵(若尔当块).形如 $(\lambda-\lambda_j)^{n_j}$ 的多项式(初级因子)可以唯一确定 n_j 阶若尔当块 $\boldsymbol{J}_j$,见[书§5.3.2-(5.55)].

对线性微分方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,令 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$,则有 $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$.即线性微分方程可以通过相似变换化为若

尔当标准型解之. 若尔当块相互独立,对应于若尔当块 J_j 的解可以由方程 $y_j' = J_j y_j$ 直接解出(见[书 §5.3.2 -(5.57)]).

(6) **线性算子的分解** 可以在实或复线性空间上作算子分解来求解常系数线性方程组的基解矩阵. 对 $x' = Ax, A \in L(E), E = \mathbf{R}^n$,向量空间 E 可分解为直和 $E = E_1 \otimes \cdots \otimes E_r$,对应线性算子 A 有 $A = A_1 \otimes \cdots \otimes A_r, A_k \in L(E_k)$. 而 A_k 可唯一分解为 $A_k = S_k + N_k$; $S_k, N_k \in L(E_k)$,其中 S_k 为半单算子(实或复对角化),N_k 为幂零算子(有 m 使 $N_k^m = 0$),且可交换: $S_kN_k = N_kS_k$. 利用这一性质,有

$$A = S + N, \text{其中 } S = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n), N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix}, \lambda_k \text{ 为 } A$$

的实或复特征值,从而得到若尔当型算子及实标准型. 并进一步利用对角矩阵和交换矩阵的性质求出算子指数解 e^{At}. 线性算子的分解理论和例子见[文 21 §6].

(7) **求基解矩阵的微分方程方法** 方法由 E. J. Putzer 提出,发表在《美国数学月刊》(见[文 35])上.

Putzer 定理 $e^{At} = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t)P_j$,其中

$$P_0 = E; P_j = \prod_{k=1}^{j} (A - \lambda_k E), j = 1, \cdots, n,$$

而 $r_1(t), \cdots, r_n(t)$ 是下列微分方程的解

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = \lambda_1 r_1, \\ \dot{r}_j = r_{j-1} + \lambda_j r_j & (j = 2, \cdots, n), \\ r_1(0) = 1, r_j(0) = 0 & (j = 2, \cdots, n). \end{cases}$$

证 令 $\Phi(t) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t)P_j$,定义 $r_0(t) \equiv 0$. 则有

$$\dot{\Phi} - \lambda_n \Phi = \sum_{j=0}^{n-2} [P_{j+1} + (\lambda_{j+1} - \lambda_n)P_j] r_{j+1}.$$

利用关系式 $\boldsymbol{P}_{j+1} \equiv (\boldsymbol{A} - \lambda_{j+1}\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}_j$，上式化为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\Phi}} - \lambda_n \boldsymbol{\Phi} &= (\boldsymbol{A} - \lambda_n \boldsymbol{E})[\boldsymbol{\Phi} - r_n(t)\boldsymbol{P}_{n-1}] \\ &= (\boldsymbol{A} - \lambda_n \boldsymbol{E})\boldsymbol{\Phi} - r_n(t)\boldsymbol{P}_n.\end{aligned}$$

而由哈密顿－凯莱定理（见后），$\boldsymbol{P}_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的化零特征多项式，有 $\boldsymbol{P}_n = F(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$. 于是 $\dot{\boldsymbol{\Phi}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}$. 因 $\boldsymbol{\Phi}(0) = \boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$.

哈密顿－凯莱定理　对数域 K 上的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，其特征多项式 $F(\lambda) = \det(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i \lambda^i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的化零多项式，即 $F(\boldsymbol{A}) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i \boldsymbol{A}^i = \boldsymbol{O}$.

哈密顿－凯莱定理的证明可参见[文 21 §6.1－定理 3].

(8) **拉普拉斯变换**　拉普拉斯变换是求解常系数线性微分方程的有力工具，在以前的教材中往往重点讲授. 由于计算机软件的发展，现已可由计算机自动求解. 拉普拉斯变换方法实际上是将微分方程化为代数方程求解. 可以由拉普拉斯变换的定义（见[书 §4.2.3－(2)，§5.3.3]）及格朗沃尔不等式（见[书习题 3.1－6]）证明：

定理　如果对向量函数 $\boldsymbol{f}(t)$，存在正常数 M, σ，成立 $\|\boldsymbol{f}(t)\| \leqslant M\mathrm{e}^{\sigma t}$ (*). 则初值问题 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t)$，$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{\eta}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 及其导数 $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ 亦满足不等式(*)，从而它们均存在拉普拉斯变换.

§5.3.3　应用实例

(1) **炮弹的运动轨迹**　设大炮发射炮弹的发射角为 θ_0，炮弹的初速度为 v_0. 在没有空气阻力、地面为平面、地球不动的假设下求炮弹的飞行轨道.

在平面直角坐标系 Oxy 中设炮弹开始射出时位于原点，地面为 x 轴. 由牛顿运动定律，可列出炮弹的运动方程（m 为炮弹质量）

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=0, \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-mg. \end{cases}$$

初值条件为 $x(0)=0$, $y(0)=0$, $\dfrac{\mathrm{d}x(0)}{\mathrm{d}t}=v_0\cos\theta_0$, $\dfrac{\mathrm{d}y(0)}{\mathrm{d}t}=v_0\sin\theta_0$.

方程可解得 $x(t)=c_2t+c_1, y(t)=-\dfrac{1}{2}gt^2+c_4t+c_3$. 代入初值条件,炮弹的运动轨道为

$$\begin{cases} x(t)=v_0t\cos\theta_0, \\ y(t)=v_0t\sin\theta_0-\dfrac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

当 $y(t)=0$ 时 $t_1=0, t_2=\dfrac{2}{g}v_0\sin\theta_0$,其中 t_1 为炮弹发射时间,t_2 为炮弹落地的时间. 由此知大炮射程为 $x(t_2)=\dfrac{1}{g}v_0^2\sin 2\theta_0$,当 $\theta_0=45°$时射程最远,达到$\dfrac{v_0^2}{g}$. 炮弹最大高度由$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$ 计算得出,$t_3=\dfrac{1}{g}v_0\sin\theta_0$,炮弹最大高度为 $y(t_3)=\dfrac{1}{2g}v_0^2\sin^2\theta_0$.

消去解中的 t,得

$$y=x\tan\theta_0-\frac{1}{2v_0^2}gx^2\sec^2\theta_0.$$

此即为炮弹的飞行轨道,为一条抛物线. 如图 5.1.

(2) **药物动力学的房室模型** 药物动力学研究药物在机体内被吸收、分布和排除的动态过程. 通常将机体分成几个房室,药物在房室内呈均匀分布,血液浓度为常数,而在不同房室之间按一定规律进行药物转移. 现考虑二房室模型,如图 5.2(a):一是血液较丰富的中心室(第 1 室),如心、肺等器官;一是血液较贫乏的周边

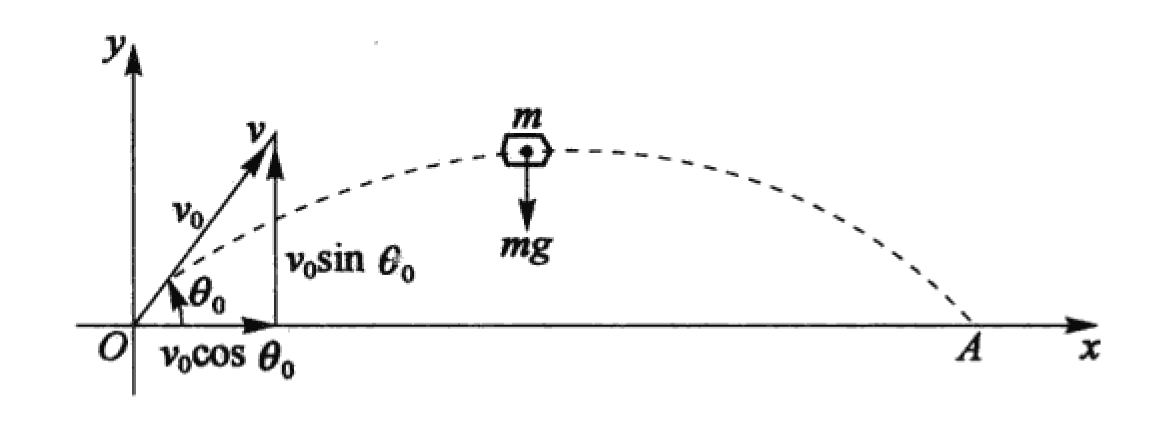


图 5.1　炮弹的飞行轨道

室(第 2 室),如四肢、肌肉组织等.药物从中心室往周边室转移.设 $c_i(t)$,$x_i(t)$,$V_i(i=1,2)$分别表示第 i 室的血液浓度、药量和容积,k_{12},k_{21}为两室之间的药物转移速率系数,k_{13}为从第 1 室向体外排除的速率系数,$f_0(t)$为给药速率.这种速率系数为常数的房室模型称为乳突状模型.模型的药物运动方程为

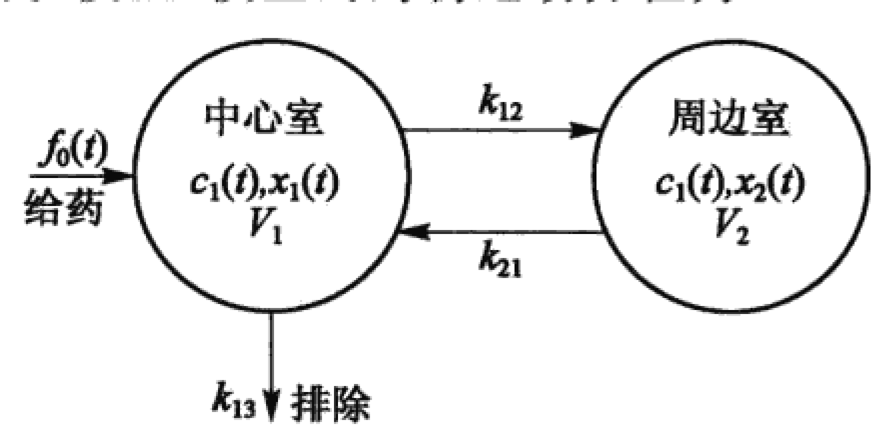


图 5.2(a)　二房室模型

$$x_1'(t) = -k_{12}x_1(t) - k_{13}x_1(t) + k_{21}x_2(t) + f_0(t),$$
$$x_2'(t) = k_{12}x_1(t) - k_{21}x_2(t).$$

利用关系式 $x_i(t) = V_ic_i(t)$,$i=1,2$,方程变为

$$c_1'(t) = -(k_{12}+k_{13})c_1(t) + \frac{V_2}{V_1}k_{21}c_2(t) + \frac{f_0(t)}{V_1},$$

$$c_2'(t) = \frac{V_1}{V_2}k_{12}c_1(t) - k_{21}c_2(t).$$

这是非齐次常系数微分方程组,易解得通解为

$$c_1(t) = A_1e^{-\alpha t} + B_1e^{-\beta t}, c_2(t) = A_2e^{-\alpha t} + B_2e^{-\beta t},$$

其中 α,β 由 $\alpha+\beta=k_{12}+k_{21}+k_{13},\alpha\beta=k_{21}k_{13}$ 确定. 进一步讨论给药方式以确定方程组的初值条件及其解.

(a) **快速静脉注射** 初值条件为 $f_0(t)=0,c_1(0)=\frac{D_0}{V_1},c_2(0)=0$,其中 D_0 为药物剂量. 方程组的解为

$$c_1(t)=Ae^{-\alpha t}+Be^{-\beta t},c_2(t)=\frac{D_0k_{12}}{V_2(\beta-\alpha)}(e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}),$$

其中 $A=\frac{D_0(k_{21}-\alpha)}{V_1(\beta-\alpha)},B=\frac{D_0(\beta-k_{21})}{V_1(\beta-\alpha)}$. 显然, 当 $t\to+\infty$ 时 $c_1(t)\to 0,c_2(t)\to 0$.

(b) **恒速静脉滴注** 设静脉滴注速率为常数 k_0,即 $f_0(t)=k_0$,初值条件为 $c_1(0)=0,c_2(0)=0$. 方程组的解为

$$c_1(t)=A_1e^{-\alpha t}+B_1e^{-\beta t}+\frac{k_0}{k_{13}V_1},c_2(t)=A_2e^{-\alpha t}+B_2e^{-\beta t}+\frac{k_{12}k_0}{k_{21}k_{13}V_2},$$

$$A_2=\frac{V_1(k_{12}+k_{13}-\alpha)}{k_{21}V_2}A_1,B_2=\frac{V_1(k_{12}+k_{13}-\beta)}{k_{21}V_2}B_1,$$

其中 A_1,B_1 由初值条件 $c_1(0)=0,c_2(0)=0$ 确定. 当 $t\to+\infty$ 时 $c_1(t),c_2(t)$趋于常值. 若当 $t=T$ 时停止滴注,则 $c_1(t),c_2(t)$中的药量从 $c_1(T),c_2(T)$开始按指数规律衰减到零.

(c) **口服或肌肉注射** 这时中心室前先有一个将药物吸收入血液的过程,可称为吸收室,如图 5.2(b). 设 $x_0(t),k_{01}$为吸收室的药量及由吸收室进入中心室的转移速率系数. $x_0(t)$的速率方程为

$$x_0'(t)=-k_{01}x_0(t),x_0(0)=D_0.$$

有解 $x_0(t)=D_0e^{-k_{01}t}$. 而药物进入中心室的速率为

$$f_0(t)=k_{01}x_0(t)=D_0k_{01}e^{-k_{01}t}.$$

此时应有 $c_1(t)=Ae^{-\alpha t}+Be^{-\beta t}+Ee^{-k_{01}t}$(当 $k_{01}\neq\alpha,\beta$ 时). 其系数由初值条件 $c_1(0)=0,c_2(0)=0$ 确定.

进一步还可讨论房室模型的参数估计,见[文 15 §5.4].

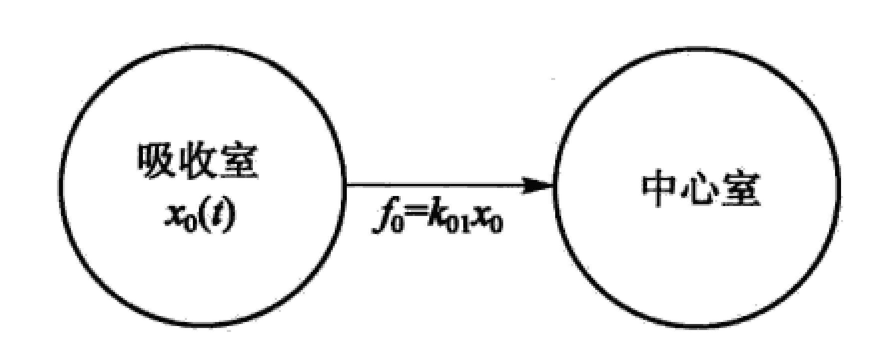


图 5.2(b)　吸收房 - 中心室模型

*(3) **糖尿病检测**　糖尿病是新陈代谢疾病,因病人体内不能提供足够的胰岛素,从而不能消耗完体内所有的糖,使病人血液和尿液中含有过多的糖. 检测糖尿病的常用方法是葡萄糖耐量检查(GTT),通过禁食后输入大剂量葡萄糖然后在不同时间检测葡萄糖浓度(G)和激素净浓度(H),视它们的变化情况作出判断. 20 世纪 60 年代美国 Ackerman 提出简易检测模型(见[文 9 §7,文 14 §11,文 20 §4.4]). 如图 5.3. 设

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}=F_1(G,H)+J(t),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=F_2(G,H),\end{cases}$$

其中 $J(t)$ 为引起血糖浓度增加的外部速率. 开始时达平衡状态

$$\begin{cases}F_1(G_0,H_0)=0,\\ F_2(G_0,H_0)=0.\end{cases}$$

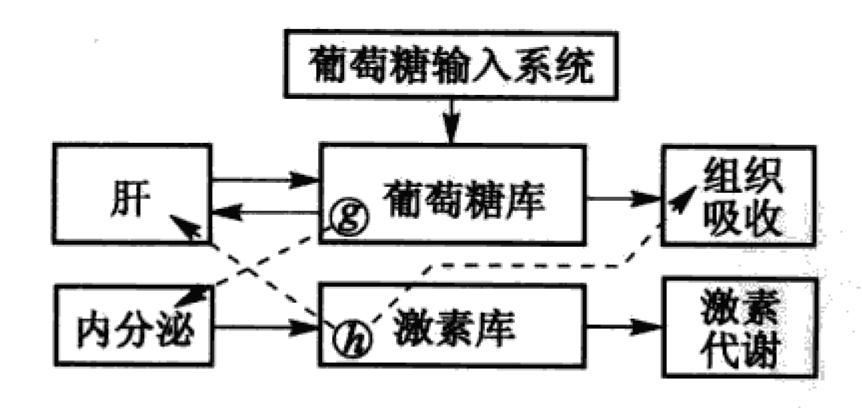


图 5.3　血糖调节系统

作变换 $g=G-G_0$, $h=H-H_0$ 以考虑其偏差值,得

$$\begin{cases}\dfrac{dg}{dt}=F_1(G_0+g,H_0+h)+J(t),\\ \dfrac{dh}{dt}=F_2(G_0+g,H_0+h).\end{cases}$$

考虑将右端函数展开简化

$$F_1(G_0+g,H_0+h)=F_1(G_0,H_0)+\frac{\partial F_1(G_0,H_0)}{\partial G}g+\frac{\partial F_1(G_0,H_0)}{\partial H}h+\varepsilon_1,$$

$$F_2(G_0+g,H_0+h)=F_2(G_0,H_0)+\frac{\partial F_2(G_0,H_0)}{\partial G}g+\frac{\partial F_2(G_0,H_0)}{\partial H}h+\varepsilon_2.$$

忽略小偏差项 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$，并记

$$m_1=-\frac{\partial F_1(G_0,H_0)}{\partial G},m_2=-\frac{\partial F_1(G_0,H_0)}{\partial H},$$

$$m_4=\frac{\partial F_2(G_0,H_0)}{\partial G},m_3=-\frac{\partial F_2(G_0,H_0)}{\partial H},$$

则方程可化为

$$\begin{cases}\dfrac{dg}{dt}=-m_1g-m_2h+J(t),\\ \dfrac{dh}{dt}=-m_3h+m_4g,\end{cases}$$

其中 m_i 均为正常数. 这便是糖尿病检测模型.

若取摄入葡萄糖完毕以后的某时刻作为初始时刻 $t=0$，则有 $J(t)\equiv 0(t>0)$. 上述模型可进一步化为 g 的二阶方程，对第一个方程求导，再消去方程中的 h，有

$$\frac{d^2g}{dt^2}+(m_1+m_3)\frac{dg}{dt}+(m_1m_3+m_2m_4)g=0,$$

即有形式

$$\frac{d^2g}{dt^2}+2a\frac{dg}{dt}+\omega_0^2g=0.$$

此为二阶线性齐次方程. 因 $a>0$，当 $t\to+\infty$ 时解 $g(t)\to 0$ 即趋于平衡值，这与实际相符.

经实际数据检验,可用二阶线性齐次方程的自然周期 $T_0 = 2\pi/\omega_0$ 进行检测:当 $T_0 < 4$ 时为正常,而当 $T_0 > 4$ 时表示有轻微糖尿病.

由于模型是按泰勒级数展开简化的,仅适用于小偏差情形,因此此模型结论仅适合检测是否有轻微糖尿病.

(4) **兰彻斯特战斗理论** 1915 年英国工程师兰彻斯特(L. W. Lanchester)曾提出第一次世界大战的空战模型,首先提出用常微分方程组描述敌我双方兵力消灭过程,后来形成兰彻斯特战斗理论或战斗动态理论,用于描述各种战争,从孤立的战斗到整个战争,也包括常规战、游击战及混合战等.

设两支部队交战,$x(t)$ 和 $y(t)$ 分别表示 t 时刻两支部队的力量,可折算为兵员数量. t 以天计,力量包括士兵数量与士气、武器数量与质量、指挥员素质、人员与物资的补给等因素. 实际上每支部队的力量变化应由自然损失率(OLR)、战斗损失率(CLR)及补充率(RR)组成,即 $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -(OLR + CLR) + RR$,对另一支部队也一样.

对于常规战,兰彻斯特作战模型为

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -ax - by + P(t), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -cx - dy + Q(t), \end{cases}$$

其中 a, b, c, d 为非负常数. 当双方没有自然损失和增援情况下为

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -by, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -cx, \end{cases}$$

有解

$$by^2 - cx^2 = by_0^2 - cx_0^2 = K,$$

称为平方律模型或双曲模型. 如图 5.4(a). 双方战斗成败决定于

$K = by_0^2 - cx_0^2$：$K > 0$，y 获胜；$K < 0$，x 获胜；$K = 0$ 时为平局. 因 $b = r_y p_y$，$c = r_x p_x$，r 为射击率，p 为命中率. 由 $K > 0$ 得 $\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{c}{b} = \frac{r_x p_x}{r_y p_y}$，兵员的平方影响着兵力.

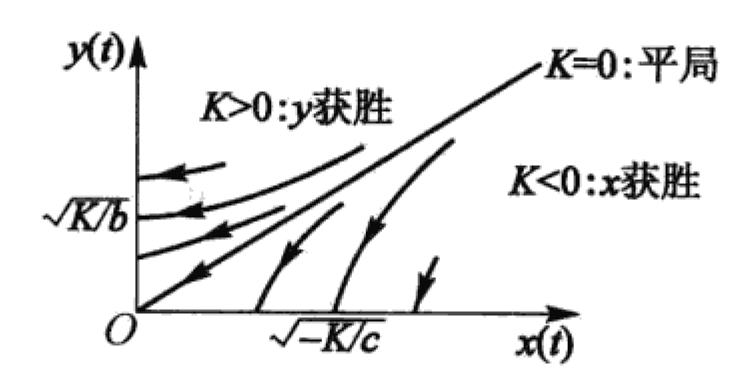


图 5.4(a)　平方律模型或双曲模型

对于两支游击战部队，因战斗损失率不但决定于对方兵员，也与己方兵员数量成正比. 因此游击战模型为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -ax - gxy + P(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -dy - hxy + Q(t), \end{cases}$$

其中 a, g, d, h 为非负常数. g, h 称为战斗效果系数. 当双方没有自然损失和增援情况下为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -gxy, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -hxy, \end{cases}$$

有解

$$gy - hx = gy_0 - hx_0 = L,$$

称为线性律模型，虽然模型本身是非线性的. 如图 5.4(b). 双方战斗成败决定于 $L = gy_0 - hx_0$：$L > 0$，y 获胜；$L < 0$，x 获胜；$L = 0$ 时为平局. 因 $g = r_y p_y = r_y \frac{s_y}{A_x}$，$h = r_x p_x = r_x \frac{s_x}{A_y}$，其中命中率 p 由一次射击

的有效面积 s 除以对方活动面积 A. $L>0$ 时 $\frac{y_0}{x_0}>\frac{h}{g}=\frac{r_x s_x A_x}{r_y s_y A_y}$,增加活动面积和增加兵员作用一样.

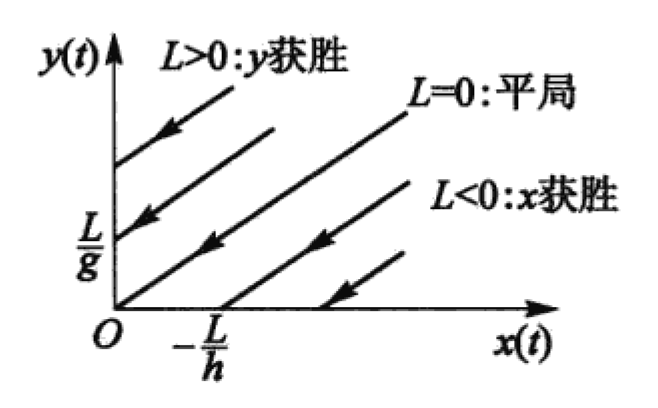


图 5.4(b) 线性律模型

当两支部队一支为游击队一支为常规部队时,形成混合作战模型

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-ax-gxy+P(t),\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-cx-dy+Q(t),\end{cases}$$

其中 a,g,c,d 为非负常数. 当双方没有自然损失和增援情况下为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-gxy,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-cx,\end{cases}$$

有解

$$gy^2-2cx=gy_0^2-2cx_0=M,$$

称为抛物律模型. 如图 5.4(c). 双方战斗成败决定于 $M=gy_0^2-2cx_0$:$M>0$,y 获胜;$M<0$,x 获胜;$M=0$ 时为平局. 因 $c=r_xp_x$,$g=r_yp_y=r_y\frac{s_y}{A_x}$,故 $M>0$ 时有

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2>\frac{2c}{g}\cdot\frac{1}{x_0}=2\frac{r_x}{r_y}\cdot\frac{p_xA_x}{s_y}\cdot\frac{1}{x_0}.$$

假设 $r_y=2r_x$,$p_x=0.1$,$s_y=1\ \mathrm{m}^2$,$A_x=10^5\ \mathrm{m}^2$,$x_0=100$,有

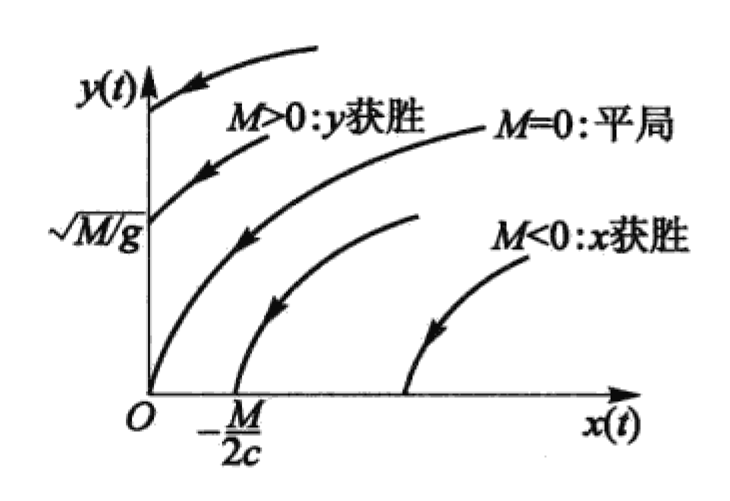


图 5.4(c) 抛物律模型

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > 2\frac{r_x}{r_y}\cdot\frac{p_x A_x}{s_y}\cdot\frac{1}{x_0}=\frac{2\times 0.1\times 10^5}{2\times 1\times 100}=100,$$

表明只有常规部队人数10倍于游击队人数才能获胜.

美国 Deithman 分析了第二次世界大战后至1962年所发生的混合型常规－游击战的平均兵力比,说明常规部队与游击队兵力比最少为8∶1时局势才有利于常规部队.对越南战争中1959、1968、1973 三次战役亦作了分析.与前面的结果接近.参见[文9 §8].

(5) **质点动力学和三体问题** 单个质点的运动可由牛顿运动三定律确定.设质点的质量为 m;x,y,z 为其坐标;v_x,v_y,v_z 为其速度$\boldsymbol{v}$ 的分量;质点的动量 $m\boldsymbol{v}$ 分量为 mv_x,mv_y,mv_z.则由牛顿第二定律有$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}$,当 m 为常数时有 $m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F}$ 或$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=X,m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=Y,m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=Z$,其中 X,Y,Z 为作用于 m 上的力 $\boldsymbol{F}$ 的分量,而 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$.力 $\boldsymbol{F}$ 对点 P 之矩为$\overrightarrow{PA}\times\boldsymbol{F}$,其中 A 是力 $\boldsymbol{F}$ 作用线上任一点,如图5.5.力 $\boldsymbol{F}$ 对坐标原点之矩 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ 称为力矩 $\boldsymbol{M}$,其分量 $M_x=yZ-zY,M_y=zX-xZ,M_z=xY-yX$ 称为力矩 $\boldsymbol{M}$ 的分量或力对坐标轴之矩.动量矩为 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$,有$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$.其作用线通过原点的中心力有 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$,得动量矩

守恒定律或面积定律. 即行星绕太阳运动的开普勒第二定律. 参见[§4.3.3 -(6)].

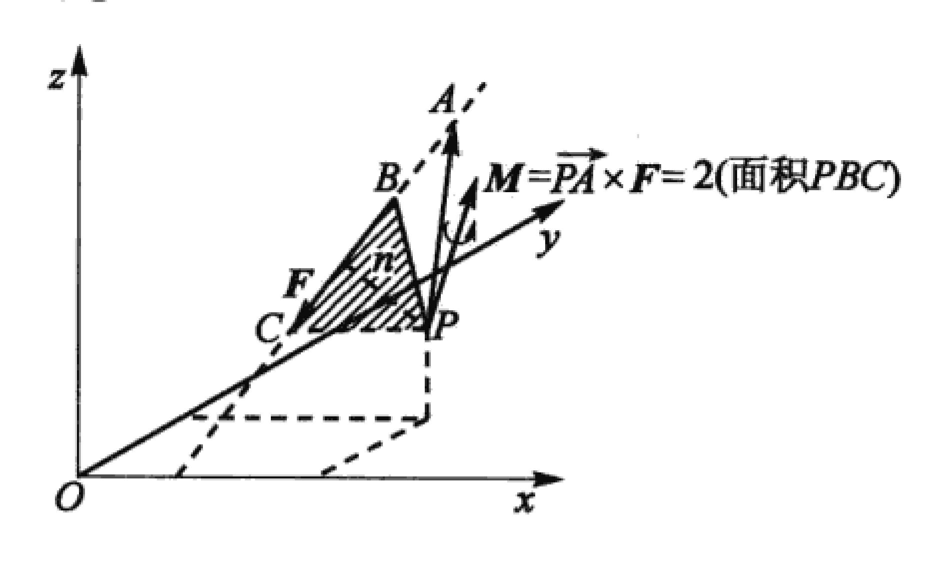


图 5.5　力 $\boldsymbol{F}$ 对点 P 之矩

设 n 个质点中第 i 个质点的质量为 m_i，向径为 $\boldsymbol{r}_i$，速度为$\boldsymbol{v}_i$，外力为 $\boldsymbol{F}_i$，而 $\boldsymbol{F}_{ik}$表示质点 m_i 作用于质点 m_k 上的力(内力). 由牛顿运动定律对质点系有$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum m_i\boldsymbol{v}_i=\sum\boldsymbol{F}_i$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum m_i(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{v}_i)=\sum\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i$，即总动量和总动量矩均与内力无关. 可用坐标、向径分别为

$$x_C=\frac{\sum m_ix_i}{\sum m_i},y_C=\frac{\sum m_iy_i}{\sum m_i},z_C=\frac{\sum m_iz_i}{\sum m_i},\boldsymbol{r}_C=\frac{\sum m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum m_i}$$

的点 C(重心)代替. 有 $m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_C}{\mathrm{d}t^2}=\sum\boldsymbol{F}_i$，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_C}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}_C$，这里总质量 $m=\sum m_i$. 记 $\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{r}_i'$，质点系对重心的动量矩 $\boldsymbol{H}_C=\sum(\boldsymbol{r}_i'\times m_i\boldsymbol{v}_i)$，则质点系的总动量矩为 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_C+\boldsymbol{r}_C\times\sum m_i\boldsymbol{v}_i$，且有$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_C}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}_C$，这里 $\boldsymbol{M}_C=\sum(\boldsymbol{r}_i'\times\boldsymbol{F}_i)$为外力对重心的矩.

考虑单纯移动的坐标系 $O_{\xi\eta\zeta}$，设其原点为 Q，Q 的速度为$\boldsymbol{v}_Q$. 在此运动系统中任一质点 m 的向径为 $\boldsymbol{r}$，则 m 对一固定坐标系的速度为$\boldsymbol{v}_Q+\boldsymbol{v}$，这里$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$. 由牛顿第二定律有 $m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}-m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_Q}{\mathrm{d}t}$. 即牛顿第二定律对一相对移动坐标系的运动仍成立，但要加一附

加力 $-m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_Q}{\mathrm{d}t}$. 对 n 个质点系统,此附加力 $-m_i\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_Q}{\mathrm{d}t}$对所有质点相互平行,即对重心有 $m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t}=\sum\boldsymbol{F}-m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_Q}{\mathrm{d}t}$. 且 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}=\widetilde{\boldsymbol{M}}-m\left(\boldsymbol{r}_C\times\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_Q}{\mathrm{d}t}\right)$,这里 $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ 为力系对原点 Q 的主矩. 于是当重心选为原点 $\boldsymbol{r}_C=\boldsymbol{0}$ 时,或动的坐标系以不变速度移动 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_Q}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{0}$ 时,有$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}=\widetilde{\boldsymbol{M}}$.

假设坐标系以等角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 绕一固定轴转动,则质点 m 的绝对速度为$\boldsymbol{v}_a=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$. 绝对加速度为 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_a}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_a=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}+2\boldsymbol{\Omega}\times\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$,其第一项为相对于转动坐标系的加速度,其余项由参考坐标系的转动引起. 为符合牛顿第二定律,须假定一个等于 $-m\left[2\boldsymbol{\Omega}\times\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}\right]$ 的力作用于每一质点上,第一项称为利里奥利(Coriolis)力,第二项称为离心力.

对 $n=2$ 的二体问题,可以其中一个质点 M 为坐标原点,另一个质点 m 的向径为 $\boldsymbol{r}$,则两质点间引力为 $\boldsymbol{F}=k\dfrac{mM}{\boldsymbol{r}^2}$,其中 k 为万有引力常数. 质点 m 的运动方程为 $m\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=-\boldsymbol{F}=-k\dfrac{mM}{\boldsymbol{r}^2}$. 如[§4.3.3-(7)]那样求出一质点(人造卫星)相对于另一质点的运行轨道. 或如[书§4.3.3]那样利用初值条件求出其初始积分.

对 $n=3$ 的三体问题,其运动方程为

$$
\begin{cases}
m_i \dfrac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2} = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{3} \dfrac{m_i m_j}{r_{ij}} (x_j - x_i) = -\dfrac{\partial V}{\partial x_i}, \\
m_i \dfrac{\mathrm{d}^2 y_i}{\mathrm{d}t^2} = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{3} \dfrac{m_i m_j}{r_{ij}} (y_j - y_i) = -\dfrac{\partial V}{\partial y_i}, i = 1,2,3, \\
m_i \dfrac{\mathrm{d}^2 z_i}{\mathrm{d}t^2} = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{3} \dfrac{m_i m_j}{r_{ij}} (z_j - z_i) = -\dfrac{\partial V}{\partial z_i},
\end{cases}
$$

其中 $V = -\left(\dfrac{m_1 m_2}{r_{12}} + \dfrac{m_2 m_3}{r_{23}} + \dfrac{m_3 m_1}{r_{31}}\right)$ 为三体问题的位函数. 运动方程是 18 阶的方程组,利用能量守恒、线动量守恒、角动量(动量矩)守恒等可求出 10 个首次积分. 参看[文 18(上) §3.4.8].

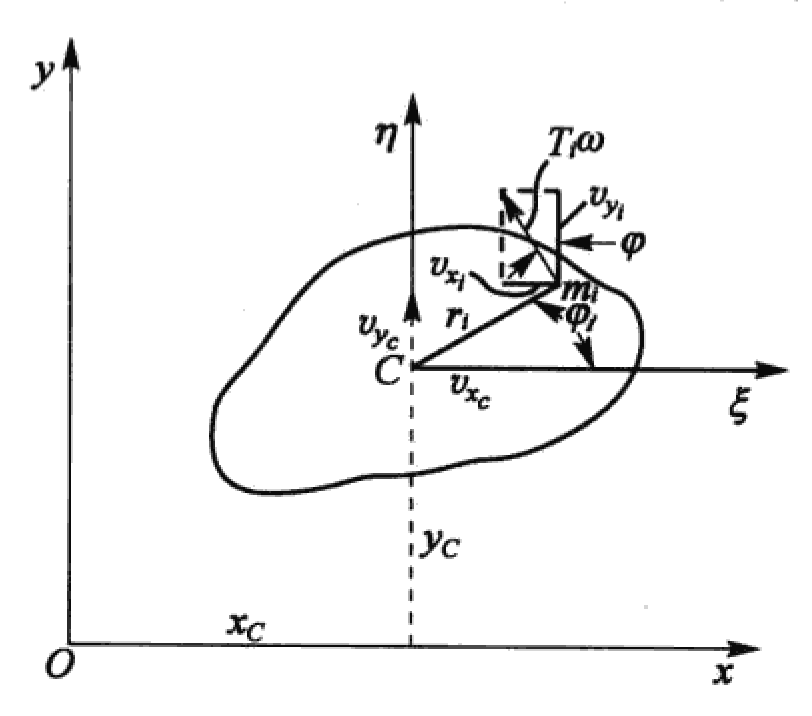


图 5.6　刚体平面运动

*(6) **刚体运动与陀螺仪**　设 n 个质点的质点系,如果质点系中质点之间的距离不变,则称为刚性系统,如前面[§5.3.3-(5)]中所述,刚性系统的运动由方程 $m\dfrac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_C}{\mathrm{d}t^2} = \sum \boldsymbol{F}_i, \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_C}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_C$ 所表示的重心的移动和转动描述. 考虑刚体的平面运动,即刚体内所有点在平行于平面 Oxy 的平面内运动. 如图 5.6,引入平行于固定坐标系 $Oxyz$ 而原点固定于刚体重心 C 的活动坐标系 $C_{\xi\eta\zeta}$. 刚体的

运动可由速度分量 $v_{x_C}=\dfrac{\mathrm{d}x_C}{\mathrm{d}t}$，$v_{y_C}=\dfrac{\mathrm{d}y_C}{\mathrm{d}t}$及刚体绕 ζ 轴的旋转角速度 $\omega=\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$决定. 由于动量分量为$\{mv_{x_C},mv_{y_C},0\}$，其中 m 为刚体质量. 动量矩仅 z 轴分量不为零，对重心 C 而言它为 $H_\zeta=\sum r_i m_i r_i\omega=\omega\sum m_i r_i^2=\omega I_\zeta$，其中 r_i 是任一点到 ζ 轴的距离，$I_\zeta=\sum m_i r_i^2$ 是刚体对 ζ 轴的转动惯量. 这样刚体的运动方程为$m\dfrac{\mathrm{d}v_{x_C}}{\mathrm{d}t}=X$，$m\dfrac{\mathrm{d}v_{y_C}}{\mathrm{d}t}=Y$，$I\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=M_C$，其中 X,Y 为合力的分量，M_C 为刚体对 ζ 轴的主矩. 对刚体绕一固定点的运动同样可选固定点作为原点，并视为绕通过该点的一瞬时轴的纯转动. $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ 表示其转动的角速度，则对刚体中的任一点有$\tilde{\boldsymbol{v}}_i=\tilde{\boldsymbol{\omega}}\times\tilde{\boldsymbol{r}}_i$，而对此点的动量矩为 $\tilde{\boldsymbol{H}}=\sum m_i(\tilde{\boldsymbol{r}}_i\times\tilde{\boldsymbol{v}}_i)=\sum m_i[\tilde{\boldsymbol{r}}_i\times(\tilde{\boldsymbol{\omega}}\times\tilde{\boldsymbol{r}}_i)]=\tilde{\boldsymbol{\omega}}\sum m_i\tilde{\boldsymbol{r}}_i^2-\sum m_i\tilde{\boldsymbol{r}}_i(\tilde{\boldsymbol{r}}_i\cdot\tilde{\boldsymbol{\omega}})$，写成分量为

$$
\begin{aligned}
H_x&=I_x\omega_x-I_{xy}\omega_y-I_{xz}\omega_z,\\
H_y&=-I_{yx}\omega_x+I_y\omega_y-I_{yz}\omega_z,\\
H_z&=-I_{zx}\omega_x-I_{zy}\omega_y+I_z\omega_z,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
I_x&=\sum m_i(y_i^2+z_i^2),I_{xy}=I_{yx}=\sum m_i x_i y_i,\\
I_y&=\sum m_i(z_i^2+x_i^2),I_{yz}=I_{zy}=\sum m_i y_i z_i,\\
I_z&=\sum m_i(x_i^2+y_i^2),I_{zx}=I_{xz}=\sum m_i z_i x_i.
\end{aligned}
$$

I_x,I_y,I_z 称为对应轴的转动惯量，I_{xy},I_{yz},I_{zx}称为对应轴的惯性积. 刚体运动方程为$\dfrac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{H}}}{\mathrm{d}t}=\tilde{\boldsymbol{M}}$，即$\dfrac{\mathrm{d}H_x}{\mathrm{d}t}=M_x$，$\dfrac{\mathrm{d}H_y}{\mathrm{d}t}=M_y$，$\dfrac{\mathrm{d}H_z}{\mathrm{d}t}=M_z$（$\tilde{\boldsymbol{M}}$ 为刚体对固定点的主矩）. 这些转动惯量是对空间的固定轴而言，故随时间而变. 欧拉证明随刚体旋转的活动坐标系也成立，得到 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ 与转动惯量均与时间无关的欧拉方程.

对关于轴对称的旋转刚体，用附标 1，2，3 代表固定于刚体上的坐标轴（刚体轴），刚体对这些轴的转动惯量 I_1,I_2,I_3 和惯性积

I_{12}, I_{23}, I_{31}由固定点位置、坐标系方向和刚体质量分布决定. 可以证明,对质量的任一种分布,均可找到三个相互垂直的轴,使其惯性积为零. 这样的轴称为惯性主轴,对应的转动惯量 A, B, C 称为主转动惯量. 当 $A=B$ 时称为对称陀螺或对称迴转仪,第三主轴称为陀螺的对称轴. 陀螺或迴转仪是航海、航空导航的重要工具. 对称陀螺的最重要的运动形式为进动,即物体绕其对称轴以角速度 Ω 转动,同时又使物体的对称轴以角速度 μ 绕空间一固定轴(如 z 轴)转动,则可得到进动. 此时如图 5.7(a),对称轴画出一圆锥面,其顶角为 2θ,$\tilde{\omega}$ 是 Ω 与 μ 之和,它绕 z 轴转动. 引入原点在固定点的活动坐标系 ξ, η, ζ,ζ 轴为对称轴,ξ 轴正交于 ζ 并位于 $z\zeta$ 平面内. 当没有外力作用时力矩为零,动量矩保持不变,这要求 $\tilde{\boldsymbol{H}}$ 与 z 轴重合,如图 5.7(b),这时应满足条件 $C(\Omega+\mu\cos\theta)\sin\theta - A\mu\sin\theta\cdot\cos\theta=0$,即 $\mu=-\frac{\Omega}{\cos\theta}\cdot\frac{C}{C-A}$,此即为没有外力而能保持进动运动的条件,称为自由进动条件. 现计算进动运动保持角速度 μ 不变需要的力矩 M,对陀螺进动有 $\tilde{\boldsymbol{M}}=\tilde{\boldsymbol{\mu}}\times\tilde{\boldsymbol{H}}$,即 $\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{H}}}{\mathrm{d}t}=\tilde{\boldsymbol{M}}=\tilde{\boldsymbol{\mu}}\times\tilde{\boldsymbol{H}}$. 如图 5.7(c),因 $\tilde{\boldsymbol{H}}$ 由 H_ζ, H_ξ 组成,于是 $M=C(\Omega+\mu\cos\theta)\sin\theta-A\mu^2\sin\theta\cdot\cos\theta$. 力矩 M 绕 η 轴作用,而 η 轴正交于 $z\zeta$ 平面. 当 $\theta=90°$ 时 $M=C\Omega\mu$,即如果陀螺的对称轴与进动轴正交,则保持进动所需要的力矩等于 $C\Omega\mu$. $-M$ 称为进动力矩或迴转力矩. 参看[文 11 §3.6 和 §3.7].

*(7) **飞机的运动** 将飞机视为一个刚体,对称于一垂直平面,假设它的运动由其重心在此平面内的一个移动及绕一垂直对称平面的轴的一个转动组成. 如图 5.8(a),运动方程由质量与加速度分量的乘积等于诸外力合力的对应分量及角动量的改变率等于诸力对重心之矩给出. 以 v 表示重心速度,θ 为轨道斜率(向下为正),$-D, L$ 分别表示空气在运动方向的阻力及其正交方向的升力,M 表示其对重心的矩. m 为飞机质量,I 为其对重心的转动惯

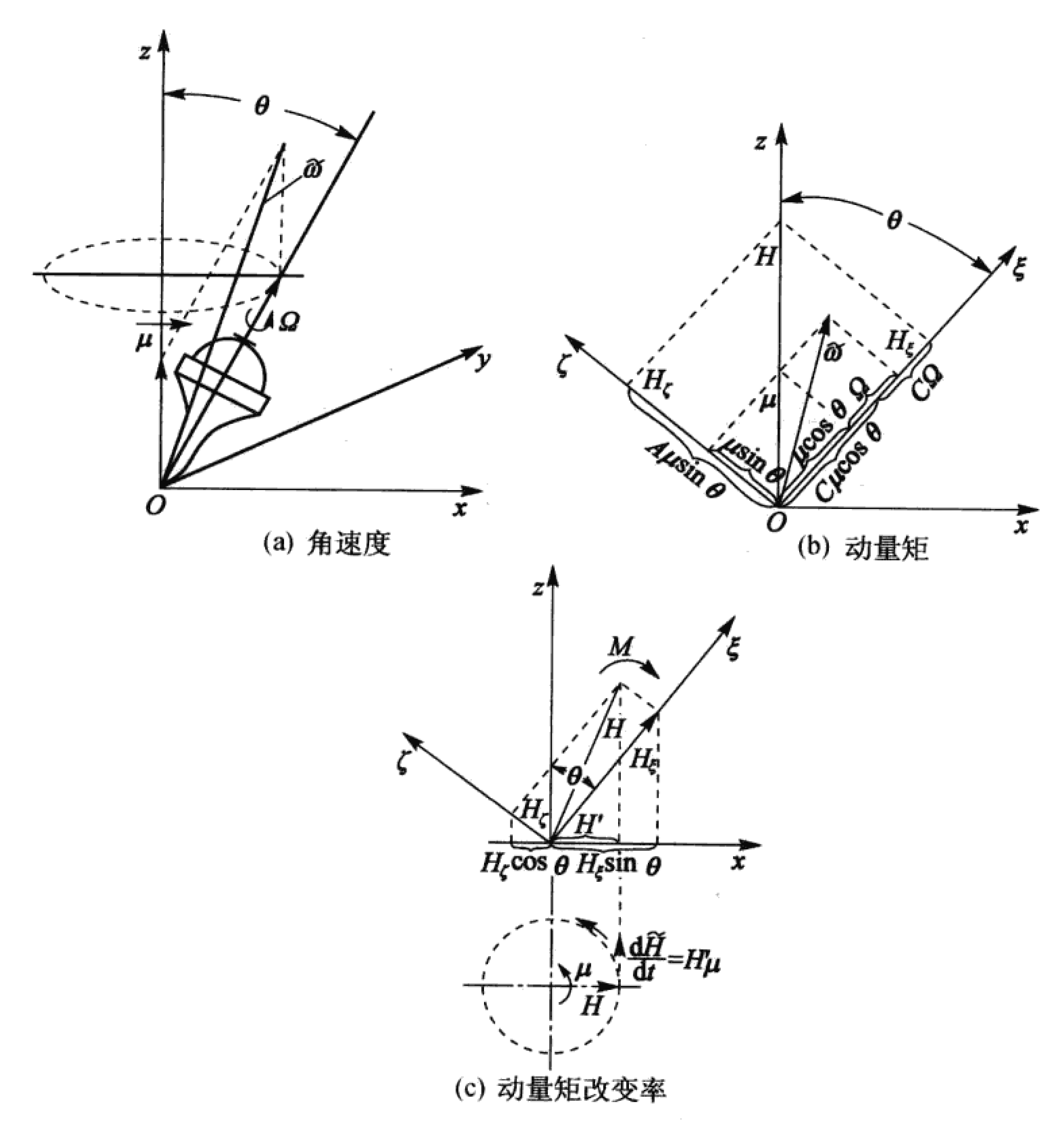


图 5.7　对称陀螺的进动

量. φ 表示飞机飞行倾斜角(冲击角). 如图 5.8(b). 因加速度的两个分量为$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$及 $v\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$,后式相当于向心加速度$\frac{v^2}{R}$,而 R 是曲率半径,即$\frac{1}{R}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$,$s$ 为沿轨道弧长,即可用 $v^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$代替 $v\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$. 于是飞机的运动方程为

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -D + mg\sin\theta, \\ mv^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = -L + mg\cos\theta, \\ I\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -M. \end{cases}$$

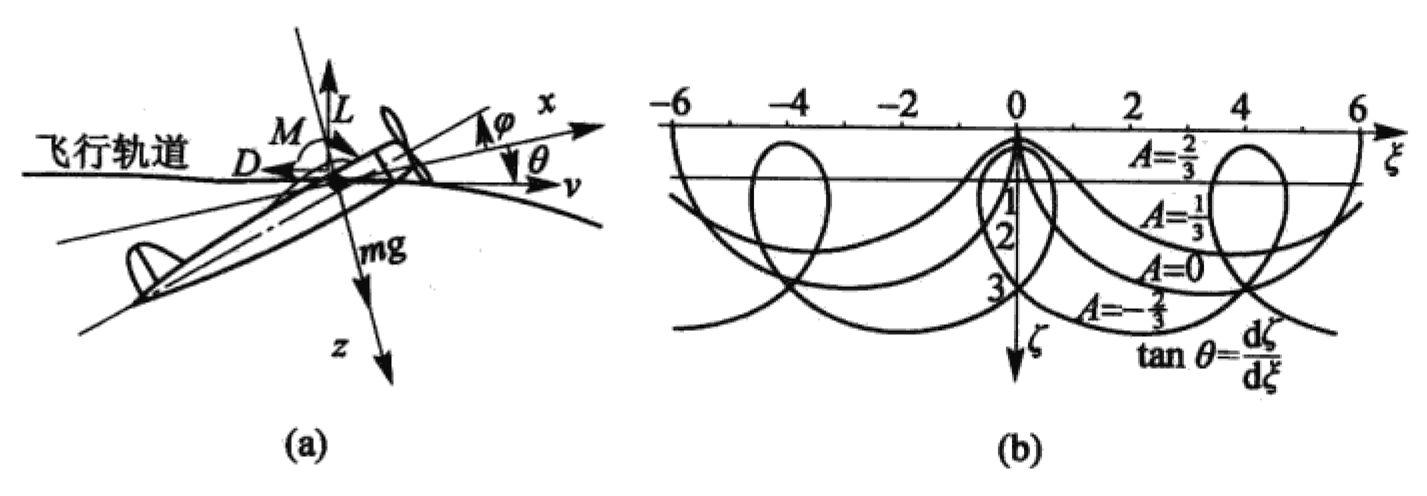


图 5.8　飞机的运动

当任一瞬间推进力等于牵引力即 $D=0$ 且力矩 M 足够大使冲击角为常量时,飞机产生的运动称为起伏运动. 此时有 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{v^2}{2}\right) = gv\sin\theta = g\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$,这里 z 是重心的垂直坐标(向下为正). 如取速度为零时的高度 z 为原点,则上式可积分得 $v=\sqrt{2gz}$. 因冲击角为常量,升力 L 可表示为 $L = mg\left(\dfrac{v}{v_0}\right)^2 = m\dfrac{v^2}{2H}$,其中 v_0 为均匀水平飞行的速度,$v_0^2=2gH$,H 为速度高度. 将其代入运动方程并考虑到 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}\sin\theta$, 得到 $2z\sin\theta\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z} = -\dfrac{z}{H} + \cos\theta$. 令 $\zeta = \dfrac{z}{H}$ 即 $\dfrac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}\zeta} = -\dfrac{\cos\theta}{2\zeta} + \dfrac{1}{2}$, 容易积分得 $\cos\theta = \mathrm{e}^{-\int\frac{\mathrm{d}\zeta}{2\zeta}}\left(\int\dfrac{1}{2}\sqrt{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta + A\right) = \dfrac{\zeta}{3} + \dfrac{A}{\sqrt{\zeta}}$. 这便是起伏运动飞机的一切飞行轨迹. 如图 5.6(b),当

水平飞行 $\cos\theta=1$ 时 $\zeta=1, A=\frac{2}{3}$. 只当 $\zeta>0$, $-1\leqslant\cos\theta\leqslant1$ 时有物理意义.

还可从飞机的运动方程出发进一步讨论飞机的纵向运动的稳定性,它属于非保守系统的微幅振动. 可参考[文 11 §6.8].

*(8) **电子电路的微分方程** 斯梅尔(S. Smale)曾用动力系统、微分方程的现代数学观点建立电子电路的一般理论,给出求一类电网络或电路的常微分方程方法. 考虑在 $\mathbf{R}^3$ 中由线性有向图表示的电阻器、电容器和电感器组成的网络,图中含有 a 个点(称为结点)的结点有限集 A 和 b 个线段(称为支路)的支路有限集 B,支路的端点为结点,不同支路只能在结点相交,支路有向,每个支路 β 从端点 β^- 到端点 β^+, $\beta\in B$ 的边界是集 $\partial\beta=\beta^-\cup\beta^+$. 将结点集和支路集排序,以序号对应之.

定义网络的电流状态是某点 $i(i_1,\cdots,i_b)\in\mathbf{R}^b$, i_k 表示某时刻通过第 k 个支路的电流,此时的 $\mathbf{R}^b$ 可写为 $\mathscr{I}$. 记 $\mathscr{D}$ 为笛卡儿空间 $\mathbf{R}^a$,定义线性映射 $d:\mathscr{I}\to\mathscr{D}$,其中 $(di)_\alpha=\sum\limits_{\beta\in B}\varepsilon_{\alpha\beta}i_\beta$, $\varepsilon_{\alpha\beta}=1(\beta^+=\alpha)$, $-1(\beta^-=\alpha)$, 0(其他),即由 β 流入(流出)结点 α 的电流. 于是基尔霍夫电流定律(KCL)等价于 $di=0$.

同样,定义网络的电压状态为一点 $v(v_1,\cdots,v_b)\in\mathbf{R}^b$, v_k 表示第 k 个支路两端的电压降,此时 $\mathbf{R}^b$ 写为 $\mathscr{U}$. 基尔霍夫电压定律(KVL)等价于存在实函数 $V:A\to\mathbf{R}$,使得对每个 $\beta\in B$, $v_\beta=V(\beta^+)-V(\beta^-)$.

考虑网络中的装置,对第 ρ 个支路的电阻器的电流、电压有函数关系 $v_\rho=f(i_\rho)$,称此为广义欧姆定律. 设 λ 是电感器支路,则其 i_λ, v_λ 应满足条件 $L_\lambda(i_\lambda)\frac{\mathrm{d}i_\lambda}{\mathrm{d}t}=v_\lambda$, L_λ 称为电感. 而对第 γ 个支路的电容器,则应满足 $C_\gamma(v_\gamma)\frac{\mathrm{d}v_\gamma}{\mathrm{d}t}=i_\gamma$, C_γ 称为电容.

把空间 $\mathscr{U}$ 和由 $\mathscr{I}$定义的对偶(伴随)空间 $\mathscr{I}^*$ 等同起来,并定义满足 KCL、KVL 和广义欧姆定律条件的状态构成的子空间 $\Sigma=\{(i,v)\in\mathscr{I}\times\mathscr{I}^*\}$. 在一般的条件下,$\Sigma$ 是一个流形,微分方程可以在流形上定义. 电路网络中的电容器和电感器决定 Σ 上的微分方程,其对应的流(轨线)$\Phi_t:\Sigma\to\Sigma$ 描述了状态是怎样随时间变化. 详细内容可参看[文 21 § 10.5]或斯梅尔在《微分几何杂志》(美)上发表的文章.

§ 5.3.4 历史与人物

(1) **简史(微分方程组)** 线性常微分方程和线性常微分方程组理论是常微分方程理论中基本上完整、在实际问题中应用广泛的一部分. n 阶齐次线性常微分方程组的解满足叠加原理,其通解构成 n 维线性空间. 其基解矩阵具有若尔当标准形式.

早期,除了个别情形外,有关方程组的研究主要是讨论天文学问题. 二体或 n 体问题本质上是求解常微分方程组,虽然往往化为求解单独一个方程的问题. 牛顿虽然解决了二体问题,但他是用几何方法解决的. 直至 1734 年丹尼尔 · 伯努利(约翰的儿子)才用分析方法研究二体问题并得到法国科学院的奖金. 后来欧拉研究行星和彗星的运动时就完全用分析方法了. 1772 年拉格朗日的得奖论文是《论三体问题》. 拉普拉斯的大半生都致力于天体力学的研究,包括 n 体问题和太阳系的稳定性,并创造了很多数学方法. 哈密顿也研究天体力学并担任爱尔兰皇家天文台台长,提出著名的哈密顿力学原理. 欧拉和克莱罗曾因难于求得一般三体问题的精确解而转向研究其近似解.

(2) **拉格朗日**(J. L. Lagrange,1736—1813) 生于都灵,为法意混血后代. 19 岁时即被聘为皇家炮兵学院数学教授. 不喜欢几何,但在变分法和分析力学方面有杰出发现. 在很多方面推进和改进了欧拉的工作,如解等周问题的乘子方法. 其杰作《分析力学》(1788)把普通力学统一起来,是"一种科学诗篇"(哈密顿语).

1776 年欧拉离开柏林去彼得堡时建议聘请拉格朗日接替他的工作. 拉格朗日在柏林工作 20 年后转聘到巴黎,曾领导建立了米制度量衡.

(3) **拉普拉斯**(P. S. Laplace,1749—1827) 法国数学家兼理论天文学家. 24 岁时就已应用牛顿引力定律深入研究整个太阳系. 曾著有五卷巨著《天体力学》(1799—1825),书中的位势论述影响深远. 另一部七百多页的巨著是《关于概率的解析理论》(1812),书中信手运用拉普拉斯变换、生成函数等复杂数学工具. 他在论述中往往不提前人成果,但也慷慨帮助年轻科学家. 他还热衷活跃于法国政坛.

(4) **哈密顿**(W. R. Hamilton,1805—1865) 爱尔兰数学家和数学物理学家. 是个出名的神童,据说 13 岁时就掌握了 13 种语言. 当他还在都柏林的三一学院求学时,就被任命为该学院的天文学教授,并自动成为爱尔兰皇家天文台台长. 在 30 岁时即提出一个单独的原理,并表明光学和力学只不过是变分法的两个侧面. 曾独立于高斯给出复数的严密理论,并发现了四元数.

(5) **若尔当**(C. Jordan. 1838—1922) 法国数学家,法国科学院院士. 主要工作在分析和群论方面,证明了单闭曲线将平面分成两个区域,系统地发展了有限群论,是使伽罗瓦理论显著增色的第一人. 他的《分析教程》是 19 世纪后期分析的标准读本. 他的著名的学生有 F. 克莱因和 M. S. 李等.

历史人物尚有:牛顿([§1.3.4 - (1)]),欧拉([§1.3.4 - (2)]),伯努利家族([§2.3.4 - (3)]),克莱罗([§3.3.4 - (5)]).

§5.4 习题与习题解答

§5.4.1 测试练习解答

1. (1) 设 $x_1 = \varphi, x_2 = x_1' = \varphi'$,方程化为

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -\omega^2 x_1 - 2n x_2 + H\sin pt. \end{cases}$$

（2）设 $x_1 = y, x_2 = x_1' = y', x_3 = z, x_4 = z'$,方程化为

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -a_1 x_2 - b_1 x_1 - c_1 x_4, \\ x_3' = x_4, \\ x_4' = -a_2 x_4 - b_2 x_3 - c_2 x_2. \end{cases}$$

（3）设 $y_1 = x, y_2 = y_1' = x'$,方程化为

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -g(y_1) - f(y_1) y_2. \end{cases}$$

2.（1）由第 2 式得 $x = 4y + y'$,再取导数有 $x' = 4y' + y''$. 将得到的 x, x'代入第 1 式便得 $4y' + y'' = 3(4y + y') - 10y, y'' + y' - 2y = 0$. 再利用第 2 式及初值条件知 $y'(0) = 8 - 4 = 4$. 最后得到等价的微分方程为

$$y'' + y' - 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 4.$$

上面二阶方程的特征方程为 $\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$,有根 $\lambda = -2, 1$. 方程的通解为 $y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t$. 满足初值条件的解为 $y = -e^{-2t} + 2e^t$ 及 $x = -2e^{-2t} + 10e^t$.

（2）由第 1 式有 $y = \dfrac{x}{t} + x', y' = -\dfrac{x}{t^2} + \dfrac{x'}{t} + x''$. 代入第 2 式得

$$-x + tx' + t^2 x'' = -2x + x + tx', t^2 x'' = 0.$$

等价的微分方程为 $x'' = 0$. 它有通解 $x = c_1 t + c_2, y = 2c_1 + \dfrac{c_2}{t}$.

或由第 2 式有 $x = \dfrac{1}{2}(ty - t^2 y'), x' = \dfrac{1}{2}(y - ty' - t^2 y'')$. 代入第 1 式可得

$$\frac{t}{2}(y - ty' - t^2 y'') = -\frac{1}{2}(ty - t^2 y') + ty, t^2(ty'' + 2y') = 0.$$

等价的微分方程为 $ty''+2y'=0$. 令 $z=y'$，可化为 $tz'+2z=0$，$z=\frac{-c_1}{t^2}$，有 $y'=\frac{-c_1}{t^2}$. 通解为 $y=\frac{c_1}{t}+c_2$. 进而 $x=\frac{1}{2}(ty-t^2y')$ $=c_1+\frac{tc_2}{2}$.

3. 不一定能将微分方程组化为等价的微分方程，如两个各自独立的微分方程组 $x'=f(t,x)$，$y'=g(t,y)$ 便不能合并化为等价的微分方程.

4. 线性微分方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 解的朗斯基行列式的性质：

(1) 其基本解组的朗斯基行列式恒不为零；

(2) 若方程的解线性无关，则在方程定义的区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上它们的朗斯基行列式 $W(t)\neq 0$；

(3) 若方程的解线性相关，则在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上 $W(t)\equiv 0$；

(4) 方程的任意 n 个解所构成的朗斯基行列式有 $W(t)=W(t_0)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}[a_{11}(s)+a_{22}(s)+\cdots+a_{nn}(s)]\mathrm{d}s}$，其中 $\boldsymbol{A}(t)=[a_{ij}(t)]$. 见[书习题 5.2-2].

5. (1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda+3 & -2\\ 4 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2+2\lambda+5=0.$$

有共轭复根 $\lambda_{1,2}=-1\pm 2\mathrm{i}$. $\lambda_1=-1+2\mathrm{i}$ 的特征向量 $\boldsymbol{u}=[u_1,u_2]^{\mathrm{T}}$ 满足

$$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}2+2\mathrm{i} & -2\\ 4 & -2+2\mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(2+2\mathrm{i})u_1-2u_2\\ 4u_1+(-2+2\mathrm{i})u_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{u}=\alpha[1,1+\mathrm{i}]^{\mathrm{T}}$，其中 $\alpha\neq 0$ 为任意常数. 同样，$\lambda_2=-1-2\mathrm{i}$ 的特征向量 $\boldsymbol{v}=[v_1,v_2]^{\mathrm{T}}$ 满足

$$(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2-2\mathrm{i} & -2\\ 4 & -2-2\mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(2-2\mathrm{i})v_1-2v_2\\ 4v_1+(-2-2\mathrm{i})v_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{v}=\beta[1,1-\mathrm{i}]^{\mathrm{T}}$，其中 $\beta\neq 0$ 为任意常数.

(2) 特征方程为

$$\det(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ -1 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}=\lambda^{3}+2\lambda^{2}+\lambda=\lambda(\lambda+1)^{2}=0.$$

有单根 $\lambda_1=0$ 和 2 重根 $\lambda_{2,3}=-1$. 特征根 $\lambda_1=0$ 的特征向量 $\boldsymbol{u}=[u_1,u_2,u_3]^{\mathrm{T}}$ 满足

$$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -u_2+u_3 \\ -u_1+u_2+u_3 \\ -u_2+u_3 \end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

有解 $\boldsymbol{u}=\alpha[2,1,1]^{\mathrm{T}}$,其中 $\alpha\neq 0$ 为任意常数. 同样,2 重根 $\lambda_{2,3}=-1$的特殊向量$\boldsymbol{v}=[v_1,v_2,v_3]^{\mathrm{T}}$ 满足

$$(\lambda_{2,3}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{2}\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{2}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2v_1-2v_3 \\ v_1-v_3 \\ v_1-v_3 \end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

即$\boldsymbol{v}=[\beta,\gamma,\beta]^{\mathrm{T}}$,其中 β,γ 是不全为零的任意常数.

(3) 特征方程为

$$\det(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 & 2 \\ -1 & \lambda-3 & 1 \\ -3 & -3 & \lambda+1 \end{vmatrix}=\lambda^{3}-6\lambda^{2}+12\lambda-8=(\lambda-2)^{3}=0.$$

有 3 重特征根 $\lambda=2$. 设其特殊向量为 $\boldsymbol{u}=[u_1,u_2,u_3]^{\mathrm{T}}$,它满足

$$(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{3}\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}^{3}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

有解 $\boldsymbol{u}=[\alpha,\beta,\gamma]^{\mathrm{T}}$,其中 α,β,γ 是不全为零的任意常数.

6. (1) **解 1** $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\2&0\end{bmatrix}$,后两个矩阵可交换

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

利用 $\exp \boldsymbol{A}$ 展开式及$\begin{bmatrix}0&0\\2&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$,有

$$\begin{aligned}\exp(\boldsymbol{A}t)&=\exp\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}t\cdot\exp\begin{bmatrix}0&0\\2&0\end{bmatrix}t\\&=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^t&0\\0&\mathrm{e}^t\end{bmatrix}\left(\boldsymbol{E}+\begin{bmatrix}0&0\\2&0\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}0&0\\2&0\end{bmatrix}^2\frac{t^2}{2!}+\cdots\right)\\&=\mathrm{e}^t\begin{bmatrix}1&0\\2t&1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

解 2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-1&0\\-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2=0,$$

有 2 重特征根 $\lambda_1=1$. 因只有一个子空间 U_1, $n_1=2$,代入公式得

$$\exp(\boldsymbol{A}t)=\mathrm{e}^t[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})]=\mathrm{e}^t\left(\boldsymbol{E}+t\begin{bmatrix}0&0\\2&0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{e}^t\begin{bmatrix}1&0\\2t&1\end{bmatrix}.$$

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1\\2&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-2)(\lambda-1)=0.$$

有特征根 $\lambda_1=2,\lambda_2=1$. $\lambda_1=2$ 的特征向量 $\boldsymbol{u}=[u_1,u_2]^{\mathrm{T}}$ 满足

$$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}-1&-1\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-u_1-u_2\\2u_1+2u_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{u}=\alpha[1,-1]^{\mathrm{T}}$,其中 $\alpha\neq0$ 为任意常数. 同样,$\lambda_2=1$ 的特征向量 $\boldsymbol{v}=[v_1,v_2]^{\mathrm{T}}$ 满足

$$(\lambda_2 E - A)v = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2v_1 - v_2 \\ 2v_1 + v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

即$v = \beta[-1,2]^{\mathrm{T}}$,其中$\beta \neq 0$为任意常数.

显然,$u = \alpha[1,-1]^{\mathrm{T}}$和$v = \beta[-1,2]^{\mathrm{T}}$是对应$\lambda_1$和$\lambda_2$的两个线性无关的特征向量,于是有基解矩阵(取$\alpha = 1, \beta = 1$)

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & -e^{t} \\ -e^{2t} & 2e^{t} \end{bmatrix}.$$

由$\Phi^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,得

$$\exp(At) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0) = \begin{bmatrix} e^{2t} & -e^{t} \\ -e^{2t} & 2e^{t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{2t} - e^{t} & e^{2t} - e^{t} \\ -2e^{2t} + 2e^{t} & -e^{2t} + 2e^{t} \end{bmatrix}.$$

(3) 矩阵A的特征方程为

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 3) = 0.$$

有2重根$\lambda_{1,2} = 0$和单根$\lambda_3 = 3$. 2重特征根$\lambda_{1,2} = 0$的特殊向量$u = [u_1, u_2, u_3]^{\mathrm{T}}$满足

$$(\lambda_{1,2}E - A)^2 u = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

有解$u = [\alpha, \beta, 0]^{\mathrm{T}}$,其中$\alpha, \beta$是不全为零的任意常数. 特征根$\lambda_3 = 3$的特征向量$v = [v_1, v_2, v_3]^{\mathrm{T}}$满足

$$(\lambda_3 E - A)^2 v = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3v_1 - v_2 \\ 3v_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

即$\boldsymbol{v}=[0,0,\gamma]^{T}$，其中 $\gamma\neq0$ 为任意常数.

显然，$\boldsymbol{u}=[\alpha,\beta,0]^{T}$ 和$\boldsymbol{v}=[0,0,\gamma]^{T}$ 是对应 $\lambda_{1,2}$和 λ_3 的两个线性无关的向量，由 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ 知有

$$\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}.$$

根据公式有满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=e^{0}(\boldsymbol{E}+t\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}+e^{3}\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{v}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & t & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1+3t\end{bmatrix}\boldsymbol{u}+e^{3t}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}\alpha+t\beta\\ \beta\\ e^{3t}\gamma\end{bmatrix}.$$

依次令 $\boldsymbol{\eta}$ 为$(1,0,0)^{T}$，$(0,1,0)^{T}$，$(0,0,1)^{T}$，可得三个线性无关的解，以其为列，有

$$\exp(\boldsymbol{A}t)=\begin{bmatrix}1 & t & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & e^{3t}\end{bmatrix}.$$

7. (1) 方程可表为

$$\boldsymbol{z}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}e^{3t}\\ 2e^{-t}\end{bmatrix}.$$

由第 6 题(2)知对应齐次方程有基解矩阵

$$\exp(\boldsymbol{A}t)=\begin{bmatrix}2e^{2t}-e^{t} & e^{2t}-e^{t}\\ -2e^{2t}+2e^{t} & -e^{2t}+2e^{t}\end{bmatrix}.$$

利用非齐次线性方程的常数变易公式

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\exp(\boldsymbol{A}t)\boldsymbol{\eta}+\int_0^t\exp[\boldsymbol{A}(t-s)]\boldsymbol{f}(s)\,ds$$

知解为指数函数组合形式.

(2) 方程可表为

$$u' = Au + f(t), u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, f(t) = \begin{bmatrix} 5t^2 \\ e^{2t} \\ t \end{bmatrix}.$$

由第 6 题(3)知对应齐次方程有基解矩阵

$$\exp(At) = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.$$

利用非齐次线性方程的常数变易公式

$$\varphi(t) = \exp(At)\eta + \int_0^t \exp[A(t-s)]f(s)\,ds$$

知解为 t 的多项式及指数函数组合形式.

(3) 方程可表为

$$u' = Au, u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, u(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

其特征方程

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 3 & -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda$$

$$= \lambda(\lambda+1)(\lambda-1) = 0.$$

有特征根 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$. 特征根 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量 $u = [u_1, u_2, u_3]^T$ 满足

$$(\lambda_1 E - A)u = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2u_1 + u_2 - u_3 \\ -u_1 - u_3 \\ 3u_1 - u_2 + 2u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

有解 $u = \alpha[1, 1, -1]^T$,其中 $\alpha \neq 0$ 为任意常数. 同样,特征根 $\lambda_2 = -1$ 的特征向量 $v = [v_1, v_2, v_3]^T$ 满足

$$(\lambda_2 \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3v_1+v_2-v_3\\ -v_1-v_2-v_3\\ 3v_1-v_2+v_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

即$\boldsymbol{v}=\beta[1,1,-2]^{\mathrm{T}}$,其中$\beta\neq 0$为任意常数. $\lambda_3=1$的特征向量$\boldsymbol{r}=[r_1,r_2,r_3]^{\mathrm{T}}$满足

$$(\lambda_3 \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{r}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_1\\ r_2\\ r_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-r_1+r_2-r_3\\ -r_1+r_2-r_3\\ 3r_1-r_2+3r_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

即$\boldsymbol{r}=\gamma[1,0,-1]^{\mathrm{T}}$,其中$\gamma\neq 0$为任意常数.

方程组的一个基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}1 & \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{t}\\ 1 & \mathrm{e}^{-t} & 0\\ -1 & -2\mathrm{e}^{-t} & -\mathrm{e}^{t}\end{bmatrix}.$$

进一步可求$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)$,从而得到标准基解矩阵$\exp(\boldsymbol{A}t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)$,再利用初值条件$\boldsymbol{u}(0)$求得指数形式的特解$\boldsymbol{\varphi}(t)=[\exp(\boldsymbol{A}t)]\boldsymbol{u}(0)$.

8. (1) 特征方程有共轭复根$\lambda_{1,2}=-1\pm 2\mathrm{i}$,实部为负,其任一解当$t\to+\infty$时均趋于零. 方程零解渐近稳定.

(2) 特征方程有单根$\lambda_1=0$和2重根$\lambda_{2,3}=-1$,实部均非正,且零实部根为单根. 方程的解有界. 方程零解稳定.

(3) 特征方程有3重特征根$\lambda=2$,实部为正. 方程的非零解当$t\to+\infty$时均趋于无穷. 方程零解不稳定.

§5.4.2 补充习题解答

1. (1) 由[§5.2.3-5(1)],矩阵$\boldsymbol{A}$有特征值$\lambda_{1,2}=-1\pm 2\mathrm{i}$及特征向量$\boldsymbol{u}=\alpha[1,1+\mathrm{i}]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{v}=\beta[1,1-\mathrm{i}]^{\mathrm{T}}$. 其基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})t} & \mathrm{e}^{(-1-2\mathrm{i})t}\\ (1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})t} & (1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{(-1-2\mathrm{i})t}\end{bmatrix}.$$

因 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i}\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\begin{bmatrix}-1+\mathrm{i} & 1\\ 1+\mathrm{i} & -1\end{bmatrix}$，得标准基解矩阵

$$\exp(\boldsymbol{A}t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})t} & \mathrm{e}^{(-1-2\mathrm{i})t}\\ (1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})t} & (1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{(-1-2\mathrm{i})t}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1+\mathrm{i} & 1\\ 1+\mathrm{i} & -1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix}(1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{2t\mathrm{i}}+(1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{-2t\mathrm{i}} & -\mathrm{i}\mathrm{e}^{2t\mathrm{i}}+\mathrm{i}\mathrm{e}^{-2t\mathrm{i}}\\ 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{2t\mathrm{i}}-2\mathrm{i}\mathrm{e}^{-2t\mathrm{i}} & (1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{2t\mathrm{i}}+(1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{-2t\mathrm{i}}\end{bmatrix}$$

$$=\mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix}-\sin 2t+\cos 2t & \sin 2t\\ -2\sin 2t & \sin 2t+\cos 2t\end{bmatrix}.$$

(2) 由[§5.2.3 -5(2)]，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有单特征值 $\lambda_1=0$ 和 2 重特征值 $\lambda_{2,3}=-1$，特征向量为 $\boldsymbol{u}=\alpha[2,1,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{v}=[\beta,\gamma,\beta]^{\mathrm{T}}$. 由初值向量 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ 可得

$$\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2\alpha+\beta\\ \alpha+\gamma\\ \alpha+\beta\end{bmatrix},$$

$$\alpha=\eta_1-\eta_3,\beta=-\eta_1+2\eta_3,\gamma=-\eta_1+\eta_2+\eta_3.$$

于是满足条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{E}\boldsymbol{u}+\mathrm{e}^{-t}[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})]\boldsymbol{v}$$

$$=\begin{bmatrix}2\eta_1-2\eta_3\\ \eta_1-\eta_3\\ \eta_1-\eta_3\end{bmatrix}+\mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix}1+t & t & -t\\ t & 1 & -t\\ 0 & t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\eta_1+2\eta_3\\ -\eta_1+\eta_2+\eta_3\\ -\eta_1+2\eta_3\end{bmatrix}.$$

依次令 $\boldsymbol{\eta}$ 为 $(1,0,0)^{\mathrm{T}},(0,1,0)^{\mathrm{T}},(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 可得到三个线性无关的解，以其为列最后得标准基解矩阵

$$\exp(\boldsymbol{A}t)=\begin{bmatrix}2-(1+t)\mathrm{e}^{-t} & t\mathrm{e}^{-t} & -2+(2+t)\mathrm{e}^{-t}\\ 1-\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-t} & -1+\mathrm{e}^{-t}\\ 1-(1+t)\mathrm{e}^{-t} & t\mathrm{e}^{-t} & -1+(2+t)\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}.$$

(3) 由[§5.2.3 -5(3)],矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 重特征值 $\lambda=2$. 利用公式(见[书 §5.3.2 -(5.53)])有

$$\exp(\boldsymbol{A}t)=\mathrm{e}^{2t}\left[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})+\frac{t^2}{2!}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^2\right]$$

$$=\mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix}1+2t & 2t & -2t\\ t & 1+t & -t\\ 3t & 3t & 1-3t\end{bmatrix}.$$

2. (1) 由[§5.2.3 -7(1)],有

$$\boldsymbol{z}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{3t}\\ 2\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}$$

及

$$\exp(\boldsymbol{A}t)=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}\\ -2\mathrm{e}^{2t}+2\mathrm{e}^{t} & -\mathrm{e}^{2t}+2\mathrm{e}^{t}\end{bmatrix},$$

于是

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\exp(\boldsymbol{A}t)\boldsymbol{\eta}+\int_0^t\exp[\boldsymbol{A}(t-s)]\boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}s$$

$$=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{2t}\eta_1-\mathrm{e}^{t}\eta_1+\mathrm{e}^{2t}\eta_2-\mathrm{e}^{t}\eta_2\\ -2\mathrm{e}^{2t}\eta_1+2\mathrm{e}^{t}\eta_1-\mathrm{e}^{2t}\eta_2+2\mathrm{e}^{t}\eta_2\end{bmatrix}+$$

$$\int_0^t\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{2t+s}-\mathrm{e}^{t+2s}+2\mathrm{e}^{2t-3s}-2\mathrm{e}^{t-2s}\\ -2\mathrm{e}^{2t+s}+2\mathrm{e}^{t+2s}-2\mathrm{e}^{2t-3s}+4\mathrm{e}^{t-2s}\end{bmatrix}\mathrm{d}s$$

$$=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{2t}\eta_1-\mathrm{e}^{t}\eta_1+\mathrm{e}^{2t}\eta_2-\mathrm{e}^{t}\eta_2\\ -2\mathrm{e}^{2t}\eta_1+2\mathrm{e}^{t}\eta_1-\mathrm{e}^{2t}\eta_2+2\mathrm{e}^{t}\eta_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\mathrm{e}^{3t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}\\ -\mathrm{e}^{3t}-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{4}{3}\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{t}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\mathrm{e}^{3t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}+\left(2\eta_1+\eta_2-\frac{4}{3}\right)\mathrm{e}^{2t}-\left(\eta_1+\eta_2+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{t}\\ -\mathrm{e}^{3t}-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-t}+\left(-2\eta_1-\eta_2+\frac{4}{3}\right)\mathrm{e}^{2t}+(2\eta_1+2\eta_2+1)\mathrm{e}^{t}\end{bmatrix}.$$

(2) 由[§5.2.3 -7(2)],有

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} 5t^2 \\ e^{2t} \\ t \end{bmatrix}, \exp(\boldsymbol{A}t) = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix},$$

于是

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & t-s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3(t-s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5s^2 \\ e^{2s} \\ s \end{bmatrix} ds$$

$$= \begin{bmatrix} \eta_1 + t\eta_2 \\ \eta_2 \\ e^{3t}\eta_3 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 5s^2 + (t-s)e^{2s} \\ e^{2s} \\ se^{3(t-s)} \end{bmatrix} ds$$

$$= \begin{bmatrix} \eta_1 + t\eta_2 \\ \eta_2 \\ e^{3t}\eta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{5}{3}t^3 - \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{4}(e^{2t} - 1) \\ \dfrac{1}{2}(e^{2t} - 1) \\ \dfrac{1}{9}(-3t - 1 + e^{3t}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \eta_1 + t\eta_2 + \dfrac{5}{3}t^3 - \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{4}(e^{2t} - 1) \\ \eta_2 + \dfrac{1}{2}(e^{2t} - 1) \\ \left(\eta_3 + \dfrac{1}{9}\right)e^{3t} - \dfrac{1}{9}(3t + 1) \end{bmatrix}.$$

（3）由[§5.2.3 -7(3)]，有

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}1 & e^{-t} & e^{t}\\ 1 & e^{-t} & 0\\ -1 & -2e^{-t} & -e^{t}\end{bmatrix},$$

可得

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & -2 & -1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

利用初值条件 $\boldsymbol{u}(0)=[0,0,1]^{\mathrm{T}}$,有

$$\begin{aligned}[\exp(\boldsymbol{A}t)]\boldsymbol{u}(0)&=[\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)]\boldsymbol{u}(0)\\ &=\begin{bmatrix}1 & e^{-t} & e^{t}\\ 1 & e^{-t} & 0\\ -1 & -2e^{-t} & -e^{t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}* & * & 1-e^{-t}\\ * & * & 1-e^{-t}\\ * & * & -1+2e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-e^{-t}\\ 1-e^{-t}\\ -1+2e^{-t}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

3. (1) 特征方程

$$\begin{vmatrix}\lambda-2 & -4\\ 1 & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^2=0$$

有 2 重特征根 $\lambda=0$. 直接利用矩阵指数函数式(见[书 §5.3.2-(5.53)])

$$\exp(\boldsymbol{A}t)=\boldsymbol{E}+t\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1+2t & 4t\\ -t & 1-2t\end{bmatrix}.$$

通解为$[\exp(\boldsymbol{A}t)]\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}(1+2t)c_1+4tc_2\\ -tc_1+(1-2t)c_2\end{bmatrix}$或 $x=(1+2t)c_1+4tc_2$, $y=-tc_1+(1-2t)c_2$. 其中 c_1,c_2 为任意常数.

(2) 特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 1\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)^2=0,$$

得单根 $\lambda=0$,2 重特征值 $\lambda=1$. 对应 $\lambda=0$ 的特征向量满足

$$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&-1&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-u_2+u_3\\-u_1-u_2\\-u_1-u_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{u}=\alpha\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},$$

其中 $\alpha\neq0$ 为任意常数. 对应 2 重特征值 $\lambda=1$ 的特殊向量满足

$$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^2\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\-1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}v_1-v_2+v_3\\-v_1+v_2-v_3\\-v_1+v_2-v_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}\beta\\\gamma\\\gamma-\beta\end{bmatrix},$$

其中 β,γ 是不全为零的任意常数.

对初值条件 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{\eta}$ 有 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$,即

$$\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}-\alpha+\beta\\\alpha+\gamma\\\alpha-\beta+\gamma\end{bmatrix},\boldsymbol{u}=\alpha\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}=(-\eta_1+\eta_2-\eta_3)\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}\beta\\\gamma\\\gamma-\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta_2-\eta_3\\\eta_1+\eta_3\\\eta_1-\eta_2+2\eta_3\end{bmatrix}.$$

由矩阵指数函数式(见[书§5.3.2-(5.52)])得方程满足初值条件 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}+\mathrm{e}^t[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})]\boldsymbol{v}$$

$$=(-\eta_1+\eta_2-\eta_3)\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}+\mathrm{e}^t\begin{bmatrix}1-t&t&-t\\t&1&0\\t&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_2-\eta_3\\\eta_1+\eta_3\\\eta_1-\eta_2+2\eta_3\end{bmatrix}$$

$$= (-\eta_1+\eta_2-\eta_3)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} \eta_2-\eta_3 \\ \eta_1+\eta_3+t(\eta_2-\eta_3) \\ \eta_1-\eta_2+2\eta_3+t(\eta_2-\eta_3) \end{bmatrix}.$$

依次取 $\boldsymbol{\eta}$ 为 $(1,0,0)^{\mathrm{T}},(0,1,0)^{\mathrm{T}},(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 可得

$$\exp(\boldsymbol{A}t) = \begin{bmatrix} 1 & -1+e^t & 1-e^t \\ -1+e^t & 1+te^t & -1+(1-t)e^t \\ -1+e^t & 1+(-1+t)e^t & -1+(2-t)e^t \end{bmatrix}.$$

(3) 特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda-3 & 1 \\ -3 & -3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4 = (\lambda-2)^2(\lambda-1)=0,$$

得单根 $\lambda=1$,2 重特征值 $\lambda=2$. 对应 $\lambda=1$ 的特征向量满足

$$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2u_1-u_2+u_3 \\ -u_1-2u_2+u_3 \\ -3u_1-3u_2+2u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0},\ \boldsymbol{u} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

其中 $\alpha\neq0$ 为任意常数. 对应 2 重特征值 $\lambda=2$ 的特殊向量 $\boldsymbol{v}$ 满足

$$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^2\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -v_1-v_2+v_3 \\ -v_1-v_2+v_3 \\ -3v_1-3v_2+3v_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \\ \beta+\gamma \end{bmatrix},$$

其中 β,γ 是不全为零的任意常数.

对初值条件 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{\eta}$ 有 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$,即

$$\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha+\gamma\\ 3\alpha+\beta+\gamma\end{bmatrix},\boldsymbol{u}=\alpha\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}=(-\eta_1-\eta_2+\eta_3)\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}\beta\\ \gamma\\ \beta+\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\eta_1+\eta_2-\eta_3\\ \eta_1+2\eta_2-\eta_3\\ 3\eta_1+3\eta_2-2\eta_3\end{bmatrix}.$$

由矩阵指数函数式(见[书§5.3.2 -(5.52)])得方程满足初值条件 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=\mathrm{e}^t\boldsymbol{u}+\mathrm{e}^{2t}[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})]\boldsymbol{v}\\ &=(-\eta_1-\eta_2+\eta_3)\mathrm{e}^t\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}+\mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix}1+t&t&-t\\ t&1+t&-t\\ 3t&3t&1-3t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\eta_1+\eta_2-\eta_3\\ \eta_1+2\eta_2-\eta_3\\ 3\eta_1+3\eta_2-2\eta_3\end{bmatrix}\\ &=(-\eta_1-\eta_2+\eta_3)\mathrm{e}^t\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}+\mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix}2\eta_1+\eta_2-\eta_3\\ \eta_1+2\eta_2-\eta_3\\ 3\eta_1+3\eta_2-2\eta_3\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

依次取 $\boldsymbol{\eta}$ 为 $(1,0,0)^{\mathrm{T}},(0,1,0)^{\mathrm{T}},(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 可得

$$\exp(\boldsymbol{A}t)=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^t&\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^t&-\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^t\\ \mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^t&2\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^t&-\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^t\\ 3\mathrm{e}^{2t}-3\mathrm{e}^t&3\mathrm{e}^{2t}-3\mathrm{e}^t&-2\mathrm{e}^{2t}+3\mathrm{e}^t\end{bmatrix}.$$

4. (1) 特征方程 $\lambda^2=0$ 有 2 重特征根 $\lambda=0$. 设方程有基本解为

$$x=at+c,y=bt+d,$$

代入方程有

$$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4\\-1&-2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}c\\ \mathrm{d}\end{bmatrix}\right).$$

可化为解两个代数方程组

$$\begin{bmatrix}2&4\\-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=0,\begin{bmatrix}2&4\\-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}.$$

由第 1 个方程组得到关系式 $a+2b=0$. 由第 2 个方程组可得 $2c+4d=a=-2b$. 可取 $a=4c_1, b=-2c_1, c=2c_2, d=c_1-c_2$, 则得方程的基本解 $x=4c_1t+2c_2, y=-2c_1t+c_1-c_2$, 即

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 4t \\ 1-2t \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(2) 特征方程为 $\lambda(\lambda-1)^2=0$, 有单根 $\lambda=0$, 2 重特征值 $\lambda=1$. 对应 $\lambda=0$, 方程有解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}\mathrm{e}^{\lambda t}$, 其特征向量 $\boldsymbol{u}$ 满足

$$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -u_2+u_3 \\ -u_1-u_2 \\ -u_1-u_3 \end{bmatrix}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

对应 2 重特征值 $\lambda=1$, 方程有解 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{v}t+\boldsymbol{w})\mathrm{e}^{\lambda t}$, 其向量 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 满足 (见[§5.3.2 - (4)])

$$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0},\ (\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{v}.$$

即

$$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} v_1-v_2+v_3 \\ -v_1 \\ -v_1 \end{bmatrix}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ \beta \end{bmatrix}.$$

及

$$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{v},\ \begin{bmatrix} w_1-w_2+w_3 \\ -w_1 \\ -w_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \\ -\beta \end{bmatrix},\ \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \\ \gamma-\beta \end{bmatrix}.$$

即方程有解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}=(\boldsymbol{v}t+\boldsymbol{w})\mathrm{e}^t$, 微分方程组的通解为(取 $\alpha=c_1$, $\beta=c_2, \gamma=c_3$)

$$\begin{cases} x_1=-c_1+c_2\mathrm{e}^t, \\ x_2=c_1+(c_3+c_2t)\mathrm{e}^t, \\ x_3=c_1+(c_3-c_2+c_2t)\mathrm{e}^t. \end{cases}$$

(3) 特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda-3 & 1 \\ -3 & -3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=(\lambda-2)^2(\lambda-1)=0.$$

得单根 $\lambda=1$,2 重特征值 $\lambda=2$. 对应 $\lambda=1$ 的特征向量满足

$$(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2u_1-u_2+u_3 \\ -u_1-2u_2+u_3 \\ -3u_1-3u_2+2u_3 \end{bmatrix}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

对应 2 重特征值 $\lambda=2$,方程有解 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{v}t+\boldsymbol{w})\mathrm{e}^{2t}$,其特征向量 $\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{w}$ 满足(见[§5.3.2-(4)])

$$(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0},\ (\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{v}.$$

即

$$(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0},\ v_1+v_2-v_3=0.$$

和

$$(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{v},$$

$$\begin{bmatrix} -w_1-w_2+w_3 \\ -w_1-w_2+w_3 \\ -3w_1-3w_2+3w_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{bmatrix}.$$

上面两式只有零解. 可取 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$,而对 $\boldsymbol{w}$ 则由 $w_1+w_2-w_3=0$ 中取两组线性无关组 $\bar{\boldsymbol{w}}=[1,0,1]^{\mathrm{T}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{w}}=[0,1,1]^{\mathrm{T}}$,从而得到对应 2 重特征值 $\lambda=2$ 的两个解 $\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{w}}\mathrm{e}^{2t}$,$\boldsymbol{x}=\tilde{\boldsymbol{w}}\mathrm{e}^{2t}$. 于是方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1=c_1\mathrm{e}^t+c_2\mathrm{e}^{2t}, \\ x_2=c_1\mathrm{e}^t+c_3\mathrm{e}^{2t}, \\ x_3=3c_1\mathrm{e}^t+(c_2+c_3)\mathrm{e}^{2t}, \end{cases}$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数.

5. (1) 方程有 2 重特征值 $\lambda=0$,对方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 可取非奇异变换 $\boldsymbol{S}$ 使得 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{J}$,其中 $\boldsymbol{J}$ 为 $\lambda=0$ 的若尔当标准形,现用特定系数法求 $\boldsymbol{S}$,由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{J}$ 可列出方程组:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}-\boldsymbol{S}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{O},\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{S}=[s_{ij}],$$

$$\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{bmatrix}[s_{ij}]-[s_{ij}]\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{O},$$

$$\begin{bmatrix}2s_{11}+4s_{21} & 2s_{12}+4s_{22}-s_{11}\\ -s_{11}-2s_{21} & -s_{12}-2s_{22}-s_{21}\end{bmatrix}=\boldsymbol{O}.$$

得两个独立方程 $s_{11}+2s_{21}=0,2s_{12}+4s_{22}=s_{11}$,可取 $\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$,即 $\boldsymbol{S}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$. 于是

$$\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}'=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1t+c_2\\ c_1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\boldsymbol{S}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1(2t-1)+2c_2\\ c_1(-t+1)-c_2\end{bmatrix}.$$

得到方程的通解为 $x=c_1(2t-1)+2c_2, y=c_1(-t+1)-c_2$. 其中 c_1, c_2 为任意常数.

(2) 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 存在非奇异矩阵 $\boldsymbol{S}$,使得 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$ 为若尔当标准形

$$\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}\equiv\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\equiv\boldsymbol{J}.$$

令 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{x}$ 时有 $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{J}\boldsymbol{y}$,积分得 $y_1=c_1, y_2=(c_2+c_3t)\mathrm{e}^t, y_3=c_3\mathrm{e}^t$. 即

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&1&0\\1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\(c_2+c_3t)\mathrm{e}^t\\c_3\mathrm{e}^t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-c_1+c_3\mathrm{e}^t\\c_1+(c_2+c_3t)\mathrm{e}^t\\c_1+(c_2-c_3+c_3t)\mathrm{e}^t\end{bmatrix},$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

(3) 对矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 进行相似变换化为若尔当标准形

$$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda-3&-1&1\\-1&\lambda-3&1\\-3&-3&\lambda+1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&0&1\\-\lambda+2&\lambda-2&1\\-\lambda^2+2\lambda&\lambda-2&\lambda+1\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda-2&-\lambda+2\\0&\lambda-2&-\lambda^2+2\lambda\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda-2&0\\0&0&-(\lambda-2)(\lambda-1)\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda-2&0\\0&0&(\lambda-2)(\lambda-1)\end{bmatrix}.$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有初等因子 $\lambda-1,\lambda-2,\lambda-2$. 若尔当标准形及相似变换分别为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix},\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\3&1&1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{S}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\2&1&-1\\1&2&-1\end{bmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{x}$ 时有 $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{J}\boldsymbol{y}$, 积分得 $y_1=c_1\mathrm{e}^t,y_2=c_2\mathrm{e}^{2t},y_3=c_3\mathrm{e}^{2t}$. 即

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\3&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\mathrm{e}^t\\c_2\mathrm{e}^{2t}\\c_3\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\mathrm{e}^t+c_2\mathrm{e}^{2t}\\c_1\mathrm{e}^t+c_3\mathrm{e}^{2t}\\3c_1\mathrm{e}^t+c_2\mathrm{e}^{2t}+c_3\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix},$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

6. (1) 方程有 2 重特征值 $\lambda=0$. 求解初值问题

$$\begin{cases} r_1' = 0, \\ r_2' = r_1, \\ r_1(0) = 1, r_2(0) = 0. \end{cases}$$

解得 $r_1 = 1, r_2 = t$. 而 $\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{A}$. 最后得

$$\exp(\boldsymbol{A}t) = r_1\boldsymbol{P}_0 + r_2\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{E} + t\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1+2t & 4t \\ -t & 1-2t \end{bmatrix}.$$

(2) 方程有单根 $\lambda_1 = 0$,2 重特征值 $\lambda_{2,3} = 1$. 求解初值问题

$$\begin{cases} r_1' = 0, \\ r_2' = r_1 + r_2, \\ r_3' = r_2 + r_3, \\ r_1(0) = 1, r_2(0) = 0, r_3(0) = 0. \end{cases}$$

解得 $r_1 = 1, r_2 = e^t - 1, r_3 = (t-1)e^t + 1$. 而 $\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})$. 最后得

$$\begin{aligned} \exp(\boldsymbol{A}t) &= r_1\boldsymbol{P}_0 + r_2\boldsymbol{P}_1 + r_3\boldsymbol{P}_2 \\ &= \boldsymbol{E} + (e^t - 1)\boldsymbol{A} + [(t-1)e^t + 1]\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) \\ &= \boldsymbol{E} + (e^t - 1)\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + [(t-1)e^t + 1]\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{E} + (e^t - 1)\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + [(t-1]e^t + 1]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 + e^t & 1 - e^t \\ -1 + e^t & 1 + te^t & -1 - (t-1)e^t \\ -1 + e^t & 1 + (t-1)e^t & -1 - (t-2)e^t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(3) 方程有单根 $\lambda_1 = 1$,2 重特征值 $\lambda_{2,3} = 2$. 求解初值问题

$$\begin{cases} r_1' = r_1, \\ r_2' = r_1 + 2r_2, \\ r_3' = r_2 + 2r_3, \\ r_1(0) = 1, r_2(0) = 0, r_3(0) = 0. \end{cases}$$

解得 $r_1 = e^t, r_2 = e^{2t} - e^t, r_3 = (t+1)e^{2t} - e^t$. 而 $\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}, \boldsymbol{P}_2 = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})$. 最后得

$$
\begin{aligned}
\exp(\boldsymbol{A}t) &= r_1\boldsymbol{P}_0 + r_2\boldsymbol{P}_1 + r_3\boldsymbol{P}_2 \\
&= e^t\boldsymbol{E} + (e^{2t} - e^t)(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) + [(t+1)e^{2t} - e^t](\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}) \\
&= e^t\boldsymbol{E} + (e^{2t} - e^t)\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix} + \\
&\quad [(t+1)e^{2t} - e^t]\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \\
&= e^t\boldsymbol{E} + (e^{2t} - e^t)\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix} + \\
&\quad [(t+1)e^{2t} - e^t]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2e^{2t} - e^t & e^{2t} - e^t & -e^{2t} + e^t \\ e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t & -e^{2t} + e^t \\ 3e^{2t} - 3e^t & 3e^{2t} - 3e^t & -2e^{2t} + 3e^t \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

7. (1) 由 $x'' = 2x' + 4y' = 0$ 有 $x = c_1 + c_2 t$, 于是 $y = \frac{1}{4}(x' - 2x) = \frac{1}{4}(c_2 - 2c_1 - 2c_2 t)$. 方程的通解为 $x = c_1 + c_2 t, y = \frac{1}{4}(c_2 - 2c_1 - 2c_2 t)$, 其中 c_1, c_2 为任意常数.

(2) 由 $x_1'' = x_2' - x_3' = x_2 - x_3 = x_1'$, 得方程 $x_1'' = x_1'$, 得解 $x_1' = c_1 e^t, x_1 = c_1 e^t + c_2$. 而由 $x_2' = x_2 + x_1 = x_2 + c_1 e^t + c_2$, 可解得 $x_2 = (c_1 t + c_3)e^t - c_2$. 再由第 1 式得 $x_3 = x_2 - x_1' = [c_1(t-1) + c_3]e^t - c_2$. 方程的通解可表为

$$x = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t-1 \end{bmatrix} + c_3 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数. 显然,各解线性无关.

(3) 由 $x_1'' = 3x_1' + x_2' - x_3' = 3x_1' - 2x_1$,得方程 $x_1'' - 3x_1' + 2x_1 = 0$,特征方程 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$ 有根 $\lambda = 1, 2$. 方程通解为 $x_1 = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$. 而由原方程组有 $(x_2 - x_3)' = -2x_1 = -2c_1 e^t - 2c_2 e^{2t}$,积分得 $x_2 - x_3 = -2c_1 e^t - c_2 e^{2t}$. 将以上两式代入原方程组第 2 式有 $x_2' = 2x_2 + x_1 + (x_2 - x_3) = 2x_2 - c_1 e^t$,可积分得 $x_2 = c_1 e^t + c_3 e^{2t}$. 从而 $x_3 = x_2 + 2c_1 e^t + c_2 e^{2t} = 3c_1 e^t + (c_2 + c_3) e^{2t}$. 即有通解

$$x_1 = c_1 e^t + c_2 e^{2t}, x_2 = c_1 e^t + c_3 e^{2t},$$
$$x_3 = 3c_1 e^t + (c_2 + c_3) e^{2t},$$

或

$$x = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数. 其各解线性无关.

8. (1) 因非齐次项属于 Ⅱ 型 $k = 0, m = 0$,可设特解为 $\tilde{x} = a\cos t + b\sin t, \tilde{y} = c\cos t + d\sin t$. 代入方程组,对比同类项有

$$b = 2a + 4c + 1, \quad -a = 2b + 4d,$$
$$d = -a - 2c, \quad -c = -b - 2d + 1.$$

由第 1,3 个方程得 $b = -2d + 1$,代入第 2 个方程有 $a = -2$. 再由第 2,4 个方程得 $c = 0$. 于是 $b = -3, d = 2$. 特解为 $\tilde{x} = -2\cos t - 3\sin t, \tilde{y} = 2\sin t$. 结合第 3 题(1)的齐次方程的通解,得非齐次方程的通解 $x = (1 + 2t)c_1 + 4tc_2 - 2\cos t - 3\sin t, y = -tc_1 + (1 - 2t)c_2 + 2\sin t$.

(2) 由方程的第 2 式减第 3 式,得

$$(x_2 - x_3)' = (x_2 - x_3) + e^t,$$

$$x_2 - x_3 = e^t\left(\int e^{t-t}dt + c_1\right) = (t + c_1)e^t.$$

将其代入第1式有 $x_1' = (t + c_1 + 1)e^t, x_1 = (t + c_1)e^t + c_2$. 而由第2式

$$x_2' = x_2 + (t + c_1)e^t + c_2,$$

$$x_2 = e^t\left\{\int [(t + c_1)e^t + c_2]e^{-t}dt + c_3\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{2}t^2 + c_1 t + c_3\right)e^t - c_2.$$

于是 $x_3 = x_2 - (t + c_1)e^t = \left[\frac{1}{2}t^2 + (c_1 - 1)t - c_1 + c_3\right]e^t - c_2$. 解为

$$\begin{cases} x_1 = (t + c_1)e^t + c_2, \\ x_2 = \left(\frac{1}{2}t^2 + c_1 t + c_3\right)e^t - c_2, \\ x_3 = \left[\frac{1}{2}t^2 + (c_1 - 1)t - c_1 + c_3\right]e^t - c_2, \end{cases}$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数.

(3) 非齐次项属于 I 型 $k = 0, m = 0$, 可设特解为 $\tilde{x}_1 = a_1 t + b_1$, $\tilde{x}_2 = a_2 t + b_2, \tilde{x}_3 = a_3 t + b_3$, 代入方程组, 对比同次项有

$$3a_1 + a_2 - a_3 = -2, 3b_1 + b_2 - b_3 = a_1,$$

$$a_1 + 3a_2 - a_3 = 0, b_1 + 3b_2 - b_3 = a_2 - 1,$$

$$3a_1 + 3a_2 - a_3 = 0, 3b_1 + 3b_2 - b_3 = a_3.$$

由第1,3,5个方程求解 a_1, a_2, a_3 得

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = 0, a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{4} = 1,$$

$$a_3=\frac{\begin{vmatrix}3&1&-2\\1&3&0\\3&3&0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&1&-1\\1&3&-1\\3&3&-1\end{vmatrix}}=\frac{12}{4}=3.$$

再由第 2,4,6 个方程求解 b_1,b_2,b_3 得

$$b_1=\frac{\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&3&-1\\3&3&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&1&-1\\1&3&-1\\3&3&-1\end{vmatrix}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2},b_2=\frac{\begin{vmatrix}3&0&-1\\1&0&-1\\3&3&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&1&-1\\1&3&-1\\3&3&-1\end{vmatrix}}=\frac{3}{2},$$

$$b_3=\frac{\begin{vmatrix}3&1&0\\1&3&0\\3&3&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&1&-1\\1&3&-1\\3&3&-1\end{vmatrix}}=6.$$

于是特解为 $\tilde{x}_1=\frac{3}{2},\tilde{x}_2=t+\frac{3}{2},\tilde{x}_3=3t+6$. 结合第 3 题(3)的齐次方程的通解,得非齐次方程的通解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=[\exp(\boldsymbol{A}t)]\boldsymbol{c}+\tilde{\boldsymbol{x}}\\&=\begin{bmatrix}2e^{2t}-e^t&e^{2t}-e^t&-e^{2t}+e^t\\e^{2t}-e^t&2e^{2t}-e^t&-e^{2t}+e^t\\3e^{2t}-3e^t&3e^{2t}-3e^t&-2e^{2t}+3e^t\end{bmatrix}\boldsymbol{c}+\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\t+\frac{3}{2}\\3t+6\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

9. 由第 3 题(1)的结果有

$$\exp(\boldsymbol{A}t) = \begin{bmatrix} 1+2t & 4t \\ -t & 1-2t \end{bmatrix},$$

$$\exp(-\boldsymbol{A}t) = \frac{1}{\det[\exp(\boldsymbol{A}t)]}\begin{bmatrix} 1-2t & -4t \\ t & 1+2t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-2t & -4t \\ t & 1+2t \end{bmatrix}.$$

再应用常数变易公式(见[书 §5.2.2-(5.27)])

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \exp(\boldsymbol{A}t)\cdot \boldsymbol{c} + \exp(\boldsymbol{A}t)\int_0^t \exp(-\boldsymbol{A}s)\cdot \begin{bmatrix} \cos s \\ \sin s \end{bmatrix} ds$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2t & 4t \\ -t & 1-2t \end{bmatrix}\boldsymbol{c} + \begin{bmatrix} 1+2t & 4t \\ -t & 1-2t \end{bmatrix}\int_0^t \begin{bmatrix} (1-2s)\cos s - 4s\sin s \\ s\cos s + (1+2s)\sin s \end{bmatrix} ds$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2t & 4t \\ -t & 1-2t \end{bmatrix}\boldsymbol{c} +$$

$$\begin{bmatrix} 1+2t & 4t \\ -t & 1-2t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2-3\sin t - 2\cos t - 2t\sin t + 4t\cos t \\ 2\sin t + t\sin t - 2t\cos t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2t & 4t \\ -t & 1-2t \end{bmatrix}\boldsymbol{c} + \begin{bmatrix} 2+4t-2\cos t - 3\sin t \\ -2t + 2\sin t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2t & 4t \\ -t & 1-2t \end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{c}} + \begin{bmatrix} -2\cos t - 3\sin t \\ 2\sin t \end{bmatrix}.$$

10. 记 $X(s) = \mathscr{L}[x(t)]$, $Y(s) = \mathscr{L}[y(t)]$, 对方程施行拉普拉斯变换

$$\begin{cases} sX - x_0 = 2X + 4Y + \dfrac{s}{s^2+1}, \\ sY - y_0 = -X - 2Y + \dfrac{1}{s^2+1}. \end{cases}$$

解出 X, Y:

$$\begin{cases} (s-2)X - 4Y = x_0 + \dfrac{s}{s^2+1}, \\ X + (s+2)Y = y_0 + \dfrac{1}{s^2+1}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{s^2}\left[x_0(s+2) + \dfrac{s(s+2)}{s^2+1} + 4y_0 + \dfrac{4}{s^2+1} \right], \\ Y = \dfrac{1}{s^2}\left[-x_0 + y_0(s-2) - \dfrac{2}{s^2+1} \right]. \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} X = \dfrac{2+x_0}{s} + \dfrac{2x_0+4y_0+4}{s^2} - \dfrac{3}{s^2+1} - \dfrac{2s}{s^2+1}, \\ Y = \dfrac{y_0}{s} - \dfrac{x_0+2y_0+2}{s^2} + \dfrac{2}{s^2+1}. \end{cases}$$

再施行拉普拉斯反变换得解

$$\begin{cases} x = 2 + x_0 + t(2x_0+4y_0+4) - 3\sin t - 2\cos t, \\ y = y_0 - t(x_0+2y_0+2) + 2\sin t. \end{cases}$$

§5.4.3 习题 5.1 及其解答

1. 给定方程组

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \qquad (*)$$

(1) 试验证 $\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$ 分别是方程组 (*)的满足初值条件 $\boldsymbol{u}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的解.

证 $\boldsymbol{u}'(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos t) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\sin t) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{v}'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin t)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\ -1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1\\ -1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{v}(0)=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}.$$

故 $\boldsymbol{u}(t)=\begin{bmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}(t)=\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}$分别是方程组(*)的满足初值条件 $\boldsymbol{u}(0)=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}(0)=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ 的解.

(2) 试验证 $\boldsymbol{w}(t)=c_1\boldsymbol{u}(t)+c_2\boldsymbol{v}(t)$是方程组(*)的满足初值条件 $\boldsymbol{w}(0)=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$的解,其中 c_1,c_2是任意常数.

证 因 $\boldsymbol{w}(t)=c_1\boldsymbol{u}(t)+c_2\boldsymbol{v}(t)=\begin{bmatrix}c_1\cos t+c_2\sin t\\ -c_1\sin t+c_2\cos t\end{bmatrix}$,有

$$\boldsymbol{w}'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}c_1\cos t+c_2\sin t\\ -c_1\sin t+c_2\cos t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c_1\cos t+c_2\sin t)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-c_1\sin t+c_2\cos t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-c_1\sin t+c_2\cos t\\ -c_1\cos t-c_2\sin t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\ -1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\cos t+c_2\sin t\\ -c_1\sin t+c_2\cos t\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1\\ -1&0\end{bmatrix}\left(c_1\begin{bmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}0&1\\ -1&0\end{bmatrix}[c_1u(t)+c_2v(t)]$$

$$=\begin{bmatrix}0&1\\ -1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{w}(t),\ \boldsymbol{w}(0)=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}.$$

故 $\boldsymbol{w}(t)=c_1\boldsymbol{u}(t)+c_2\boldsymbol{v}(t)$ 是方程组(*)的满足初值条件 $\boldsymbol{w}(0)=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$ 的解,其中 c_1,c_2 是任意常数.

2. 将下面的初值问题化为与之等价的一阶方程组的初值问题:

(1) $x''+2x'+7tx=\mathrm{e}^{-t},x(1)=7,x'(1)=-2.$

解 令 $\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix},y_1=x,y_2=y_1'=x'$. 则方程化为

$$y_2'=y_1''=x''=\mathrm{e}^{-t}-2x'-7tx=\mathrm{e}^{-t}-2y_2-7ty_1.$$

即有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}'&=\begin{bmatrix}y_1'\\y_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_2\\\mathrm{e}^{-t}-2y_2-7ty_1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0&1\\-7t&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0&1\\-7t&-2\end{bmatrix}\boldsymbol{y}+\begin{bmatrix}0\\\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{y}(1)=\begin{bmatrix}y_1(1)\\y_2(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-2\end{bmatrix}.$$

(2) $x^{(4)}+x=t\mathrm{e}^t,x(0)=1,x'(0)=-1,x''(0)=2,x'''(0)=0.$

提示 令 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix},u_1=x,u_2=u_1'=x',u_3=u_2'=x'',u_4=u_3'=x'''$. 则方程化为

$$\boldsymbol{u}'=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\t\mathrm{e}^t\end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix}.$$

(3) $\begin{cases} x'' + 5y' - 7x + 6y = e^t, \\ y'' - 2y + 13y' - 15x = \cos t. \end{cases}$

$x(0) = 1, x'(0) = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$

提示 令 $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}, w_1 = x, w_2 = w_1' = x', w_3 = y, w_4 = w_3' = y'.$

则方程组化为

$$w_2' = x'' = e^t - 5y' + 7x - 6y = e^t - 5w_4 + 7w_1 - 6w_3,$$

$$w_4' = y'' = \cos t + 2y - 13y' + 15x = \cos t + 2w_3 - 13w_4 + 15w_1,$$

即有

$$\boldsymbol{w}' = \begin{bmatrix} w_2 \\ e^t - 5w_4 + 7w_1 - 6w_3 \\ w_4 \\ \cos t + 2w_3 - 13w_4 + 15w_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 15 & 0 & 2 & -13 \end{bmatrix} \boldsymbol{w} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \\ \cos t \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{w}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. 试用逐步逼近法求方程组

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

满足初值条件

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

的第三次近似解.

解 令方程组的解为 $\boldsymbol{\varphi}(t)$，取 $\boldsymbol{\varphi}_0(t) = \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，于是第

一次近似解为

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t)=\boldsymbol{\varphi}_0(t)+\int_0^t \boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_0(s)\mathrm{d}s=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\mathrm{d}s$$

$$=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\mathrm{d}s=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\1\end{bmatrix}.$$

第二次近似解为

$$\boldsymbol{\varphi}_2(t)=\boldsymbol{\varphi}_0(t)+\int_0^t \boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_1(s)\mathrm{d}s=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\1\end{bmatrix}\mathrm{d}s$$

$$=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}1\\-s\end{bmatrix}\mathrm{d}s=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t\\-\dfrac{t^2}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\1-\dfrac{t^2}{2}\end{bmatrix}.$$

第三次近似解为

$$\boldsymbol{\varphi}_3(t)=\boldsymbol{\varphi}_0(t)+\int_0^t \boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_2(s)\mathrm{d}s=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\1-\dfrac{s^2}{2}\end{bmatrix}\mathrm{d}s$$

$$=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}1-\dfrac{s^2}{2}\\-s\end{bmatrix}\mathrm{d}s=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t-\dfrac{t^3}{3!}\\-\dfrac{t^2}{2!}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t-\dfrac{t^3}{3!}\\1-\dfrac{t^2}{2!}\end{bmatrix}.$$

§5.4.4 习题 5.2 及其解答

1. 试验证

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}t^2&t\\2t&1\end{bmatrix}$$

是方程组

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}0&1\\-\dfrac{2}{t^2}&\dfrac{2}{t}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

在任何不包含原点的区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的基解矩阵.

证 令 $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2]$，则有

$$\boldsymbol{\varphi}_1' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} t^2 \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t^2 \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_1,$$

$$\boldsymbol{\varphi}_2' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_2,$$

即 $\boldsymbol{\Phi}$ 是解矩阵. 又在任何不包含原点的区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上有 $\det \boldsymbol{\Phi} = \begin{vmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{vmatrix} = -t^2 \neq 0$，故 $\boldsymbol{\Phi}$ 是基解矩阵.

2. 考虑方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}, \qquad (*)$$

其中 $\boldsymbol{A}(t)$ 是区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的连续 $n \times n$ 矩阵，它的元为 $a_{ij}(t)(i,j = 1,2,\cdots,n)$.

(1) 如果 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 是 $(*)$ 的任意 n 个解，那么它们的朗斯基行列式 $W[\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)] \equiv W(t)$ 满足下面的一阶线性微分方程

$$W' = [a_{11}(t) + a_{22}(t) + \cdots + a_{nn}(t)]W.$$

(提示:利用行列式的微分公式，求出 W' 的表达式.)

(2) 解上面的一阶线性微分方程，证明下面的公式:

$$W(t) = W(t_0)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}[a_{11}(s) + a_{22}(s) + \cdots + a_{nn}(s)]\mathrm{d}s}, \quad t_0, t \in [a,b].$$

证 记 $\boldsymbol{x}_i = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix}(i = 1,2,\cdots,n)$，则

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

利用 $x'_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_{kj}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 及行列式的微分公式，有

$$W'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix}x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x'_{11} & x'_{12} & \cdots & x'_{1n}\\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}\end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix}x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\ x'_{21} & x'_{22} & \cdots & x'_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix}x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x'_{n1} & x'_{n2} & \cdots & x'_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\sum_{k=1}^{n}a_{1k}x_{k1} & \sum_{k=1}^{n}a_{1k}x_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n}a_{1k}x_{kn}\\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}\end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix}x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\ \sum_{k=1}^{n}a_{2k}x_{k1} & \sum_{k=1}^{n}a_{2k}x_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n}a_{2k}x_{kn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}\end{vmatrix}+\cdots+$$

$$
\begin{vmatrix}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\
x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\sum_{k=1}^{n} a_{nk}x_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}x_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}x_{kn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
a_{11}x_{11} & a_{11}x_{12} & \cdots & a_{11}x_{1n} \\
x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}
\end{vmatrix} +
\begin{vmatrix}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\
a_{22}x_{21} & a_{22}x_{22} & \cdots & a_{22}x_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}
\end{vmatrix} + \cdots +
\begin{vmatrix}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\
x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{nn}x_{n1} & a_{nn}x_{n2} & \cdots & a_{nn}x_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})
\begin{vmatrix}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\
x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) W(t).
$$

(2) 由 $W'(t) = [a_{11}(t) + a_{22}(t) + \cdots + a_{nn}(t)] W(t)$ 可直接积分.

$$
\frac{\mathrm{d}W(t)}{W(t)} = [a_{11}(t) + a_{22}(t) + \cdots + a_{nn}(t)]\mathrm{d}t,
$$

$$
\ln |W(t)| = \int_{t_0}^{t} [a_{11}(s) + a_{22}(s) + \cdots + a_{nn}(s)]\mathrm{d}s + \tilde{c},
$$

$$W(t)=c\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}[a_{11}(s)+a_{22}(s)+\cdots+a_{nn}(s)]\mathrm{d}s}.$$

上式当 $t=t_0$ 时记 $W(t)=W(t_0)=c$，于是有

$$W(t)=W(t_0)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}[a_{11}(s)+a_{22}(s)+\cdots+a_{nn}(s)]\mathrm{d}s}.$$

它在 $\boldsymbol{A}(t)$ 定义的区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 成立.

3. 设 $\boldsymbol{A}(t)$ 为区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续 $n\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵，而 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 为其一解. 试证：

(1) 对于方程 $\boldsymbol{y}'=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}$ 的任一解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\psi}(t)$ 必有 $\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)=$ 常数；

(2) $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 为方程 $\boldsymbol{y}'=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}$ 的基解矩阵的充要条件是存在非奇异的常数矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)=\boldsymbol{C}$.

证 (1) 由 $(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})'=[\boldsymbol{y}']^{\mathrm{T}}=[-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}]^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\cdot[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{A}(t)$ 知

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)]&=\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(t)\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t)+[\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(t)]'\boldsymbol{\varphi}(t)\\&=\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(t)\cdot\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(t)\cdot\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{\varphi}(t)\equiv0,\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)\equiv c$ （c 为某常数）.

(2) 必要性. 若 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 为方程 $\boldsymbol{y}'=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}$ 的基解矩阵，则 $\boldsymbol{\Psi}'(t)=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Psi}(t)$，于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)]=\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\cdot\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)-\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\cdot\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{\Phi}(t)\equiv\boldsymbol{O},$$

即有 $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\equiv\boldsymbol{C}$（$\boldsymbol{C}$ 为某常数矩阵）. 又因 $\boldsymbol{\Psi}(t)$，$\boldsymbol{\Phi}(t)$ 均为基解矩阵，故

$$\det\boldsymbol{C}=\det[\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)]=\det\boldsymbol{\Phi}(t)\cdot\det[\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)]\neq0.$$

于是矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是非奇异的.

充分性. 若存在非奇异的常数矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)=\boldsymbol{C}(a\leqslant t\leqslant b)$. 则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)]=\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\cdot\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)+[\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)]'\boldsymbol{\Phi}(t)\equiv\boldsymbol{O}.$$

因 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵,有 $\det\boldsymbol{\Phi}(t)\neq 0$. 逆矩阵 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$ 存在,以它右乘上式得 $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\cdot\boldsymbol{A}(t)+[\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)]'\equiv\boldsymbol{O}$,转置得 $\boldsymbol{\Psi}'(t)\equiv-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Psi}(t)$. 且

$$\begin{aligned}\det\boldsymbol{\Psi}(t)=\det\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)&=\det[\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)]\\&=\det[\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)]\cdot\det\boldsymbol{C}\neq 0.\end{aligned}$$

知 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 为方程 $\boldsymbol{y}'=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}$ 的基解矩阵.

4. 设方程组(5.15)有一个非零解 $\boldsymbol{x}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t))^{\mathrm{T}}$,其中 $\varphi_n(t)\neq 0$. 证明(5.15)经变换

$$y_i=x_i-\frac{\varphi_i(t)}{\varphi_n(t)}x_n(i=1,2,\cdots,n-1),\ y_n=\frac{1}{\varphi_n(t)}x_n$$

可化为关于 $n-1$ 个未知函数 $y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}$ 的线性方程组,它只含 $n-1$ 个方程,且不含 y_n.

证 由 $\varphi_i'(t)\equiv\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}(t)\varphi_k(t)$,利用变换知 $y_i=x_i-\varphi_i y_n(i=1,2,\cdots,n-1)$,$x_n=\varphi_n y_n$,对 $i=n$ 有

$$\varphi_n y_n'=x_n'-\varphi_n' y_n=\sum_{j=1}^{n}a_{nj}(x_j-\varphi_j y_n)=\sum_{j=1}^{n-1}a_{nj}y_j,$$

而对 $i=1,2,\cdots,n-1$,有

$$\begin{aligned}y_i'&=x_i'-\varphi_i'y_n-\varphi_i y_n'=\sum_{j=1}^{n-1}a_{ij}x_j+a_{in}x_n-\varphi_i'y_n-\varphi_i y_n'\\&=\sum_{j=1}^{n-1}a_{ij}(y_j+\varphi_j y_n)+a_{in}\varphi_n y_n-\varphi_i'y_n-\varphi_i y_n'\\&=\sum_{j=1}^{n-1}a_{ij}y_j+\sum_{j=1}^{n-1}a_{ij}\varphi_j y_n+a_{in}\varphi_n y_n-\varphi_i'y_n-\varphi_i y_n'\\&=\sum_{j=1}^{n-1}a_{ij}y_j+\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\varphi_j-\varphi_i'\right)y_n-\varphi_i y_n'\\&=\sum_{j=1}^{n-1}a_{ij}y_j-\varphi_i y_n'=\sum_{j=1}^{n-1}a_{ij}y_j-\frac{\varphi_i}{\varphi_n}\sum_{j=1}^{n-1}a_{nj}y_j\\&=\sum_{j=1}^{n-1}\left(a_{ij}-\frac{\varphi_i}{\varphi_n}\cdot a_{nj}\right)y_j.\end{aligned}$$

即得不含 y_n 的关于 $n-1$ 个未知函数 $y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}$ 的 $n-1$ 个方程的线性方程组

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n-1}\left(a_{ij}-\frac{\varphi_i}{\varphi_n}\cdot a_{nj}\right)y_j,\ i=1,2,\cdots,n-1.$$

5. 设 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$($\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 常数矩阵)的标准基解矩阵(即 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E}$). 证明:

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0),$$

其中 t_0 为某一值.

证 注意

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)]' &\equiv \boldsymbol{\Phi}'(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\equiv \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\\ &\equiv \boldsymbol{A}[\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)]\end{aligned}$$

及

$$\boldsymbol{\Phi}'(t-t_0)\equiv \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t-t_0),$$

且当 $t=t_0$ 时 $\boldsymbol{\Phi}(t_0)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)=\boldsymbol{E}=\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{\Phi}(t_0-t_0)$.

因此,$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)$ 和 $\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$ 同为方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的解矩阵,且有同样的初值. 根据解的存在唯一性定理,它们完全相等.

6. 设 $\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{f}(t)$ 分别为在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上连续的 $n\times n$ 矩阵和 n 维列向量, $\boldsymbol{f}(t)\neq\boldsymbol{0}$. 证明方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t) \qquad (*)$$

存在且最多存在 $n+1$ 个线性无关解.

证 由[书 §5.1.2 – 定理 1]知,非齐次方程组(*)满足初值条件 $\tilde{\boldsymbol{x}}(0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ 存在且唯一. 而由[书 §5.2.1 – 定理 5]知齐次方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 存在 n 个线性无关解 $\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$. 根据[书 §5.2.2 性质 1], $\boldsymbol{\varphi}_0=\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$, $\boldsymbol{\varphi}_1=\boldsymbol{x}_1(t)+\tilde{\boldsymbol{x}}(t),\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n=\boldsymbol{x}_n(t)+\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ 是(*)的 $n+1$ 个解. 现用反证法证明它们线性无关,设它们线性相关,则存在 $n+1$ 个不全为零的常数 $c_0,c_1,\cdots,c_n$ 使得 $c_0\boldsymbol{\varphi}_0+c_1\boldsymbol{\varphi}_1\cdots+c_n\boldsymbol{\varphi}_n\equiv\boldsymbol{0}$, 即 $(c_0+c_1+\cdots+c_n)\tilde{\boldsymbol{x}}(t)+c_1\boldsymbol{x}_1(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t)\equiv\boldsymbol{0}$. 显然 $c_0+c_1+\cdots+c_n\neq 0$. (否则必有 $c_1,\cdots,c_n$ 不全为零而使 $c_1\boldsymbol{x}_1(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t)\equiv\boldsymbol{0}$, 与 $\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,$

$\boldsymbol{x}_n(t)$线性无关矛盾.)于是有

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) \equiv -\frac{1}{c_0+c_1+\cdots+c_n}[c_1\boldsymbol{x}_1(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t)].$$

左边是方程(＊)的解,右边由[书§5.2.1-定理2]知是齐次方程的解,产生矛盾.这证明了方程组(＊)存在 $n+1$ 个线性无关解.

现设方程组存在 $m\geqslant n+1$ 个线性无关解 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$,则 $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_m,\cdots,\boldsymbol{x}_{m-1}-\boldsymbol{x}_m$ 为 $m-1$ 个对应的 n 阶齐次线性微分方程组的线性无关解,因 n 阶齐次线性微分方程组的线性无关解的最大个数为 n,故 $m-1\leqslant n$ 即 $m\leqslant n+1$,因此非齐次线性微分方程组存在且最多存在 $n+1$ 个线性无关解.

7. 试证非齐次线性微分方程组的叠加原理:

设 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t)$分别是方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_1(t),\ \boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_2(t)$$

的解.则 $\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{x}_2(t)$是方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_1(t)+\boldsymbol{f}_2(t)$$

的解.

提示 $[\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{x}_2(t)]'=\boldsymbol{x}_1'(t)+\boldsymbol{x}_2'(t)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)+\boldsymbol{f}_1(t)+\boldsymbol{f}_2(t)$.

8. 考虑方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}.$$

(1) 试验证

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t}\\ 0 & \mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}$$

是 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵;

(2) 试求 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$的满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$的解$\boldsymbol{\varphi}(t)$.

解 (1) 因为

$$\boldsymbol{\Phi}'(t)=\begin{bmatrix}2e^{2t} & e^{2t}+2te^{2t}\\ 0 & 2e^{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{2t} & te^{2t}\\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t),$$

且 $\det \boldsymbol{\Phi}(t)=e^{4t}\neq 0$,故 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵.

(2) **提示 1** 利用非齐次线性方程组的常数变易公式

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s,\ t_0,t\in[a,b].$$

首先

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\frac{1}{\det \boldsymbol{\Phi}(t)}\begin{bmatrix}e^{2t} & -te^{2t}\\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix}=\frac{1}{e^{4t}}\begin{bmatrix}e^{2t} & -te^{2t}\\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}e^{-2t} & -te^{-2t}\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix},$$

注意积分式[附录Ⅱ §3.3-6(53)、(54)、(56)],于是

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}e^{2t} & te^{2t}\\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}e^{2t} & te^{2t}\\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix}\int_0^t\begin{bmatrix}e^{-2s} & -se^{-2s}\\ 0 & e^{-2s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin s\\ \cos s\end{bmatrix}\mathrm{d}s$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{25}(27-15t)e^{2t}-\frac{2}{25}\cos t-\frac{14}{25}\sin t\\ -\frac{3}{5}e^{2t}+\frac{1}{5}\sin t-\frac{2}{5}\cos t\end{bmatrix}.$$

提示 2 用常数变易法,设解为 $\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)$,有 $\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}'(t)=\boldsymbol{f}(t)$,即

$$\begin{bmatrix}e^{2t} & te^{2t}\\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1'(t)\\ c_2'(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{2t}c_1'(t)+te^{2t}c_2'(t)\\ e^{2t}c_2'(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}.$$

可解得

$$\begin{cases} c_1'(t) = e^{-2t}(\sin t - t\cos t), \\ c_2'(t) = e^{-2t}\cos t. \end{cases}$$

于是非齐次方程有解

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t) = \begin{bmatrix} (c_1 + tc_2)e^{2t} - \frac{2}{25}\cos t - \frac{14}{25}\sin t \\ c_2 e^{2t} + \frac{1}{5}\sin t - \frac{2}{5}\cos t \end{bmatrix},$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

对应于初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$,可求得 $c_1 = \frac{27}{25}, c_2 = -\frac{3}{5}$,有特解

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{25}(-2\cos t - 14\sin t) + \frac{27}{25}e^{2t} - \frac{3}{5}te^{2t} \\ \frac{1}{5}(\sin t - 2\cos t) - \frac{3}{5}e^{2t} \end{bmatrix}.$$

9. 试求 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t)$,其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix},$$

满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$.

提示1 由第8题(1)知 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 有基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$. 利用常数变易公式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(t) &= \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2s} & -se^{-2s} \\ 0 & e^{-2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2s} \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} \left(1 - t + \frac{1}{2}t^2\right)e^{2t} \\ (t-1)e^{2t} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

即满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ 的解为 $\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{bmatrix}\left(1-t+\frac{1}{2}t^2\right)e^{2t}\\(t-1)e^{2t}\end{bmatrix}$.

提示 2 由第 8 题(1)知 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 有基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}e^{2t} & te^{2t}\\0 & e^{2t}\end{bmatrix}$. 用常数变易法,设解为 $\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)$,由 $\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}'(t)=\boldsymbol{f}(t)$,可解 $\boldsymbol{c}'(t)$ 并积分

$$\begin{cases}c_1'(t)=-t,\\c_2'(t)=1,\end{cases}\qquad\begin{cases}c_1(t)=-\frac{1}{2}t^2+c_1,\\c_2(t)=t+c_2.\end{cases}$$

于是非齐次方程有通解

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)=\begin{bmatrix}\left(c_1+tc_2+\frac{1}{2}t^2\right)e^{2t}\\(c_2+t)e^{2t}\end{bmatrix}.$$

对应于初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$,有 $c_1=1,c_2=-1$,即满足初值条件的解为

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)=\begin{bmatrix}\left(1-t+\frac{1}{2}t^2\right)e^{2t}\\(t-1)e^{2t}\end{bmatrix}.$$

10. 试求下列方程的通解:

(1) $x''+x=\sec t\quad\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$.

解 1 方程有基本解组 $x_1=\cos t,x_2=\sin t$. 因朗斯基行列式

$$W[x_1,x_2]=\begin{vmatrix}\cos t & \sin t\\-\sin t & \cos t\end{vmatrix}=1,$$

$$W_1=\begin{vmatrix}0 & \sin t\\1 & \cos t\end{vmatrix}=-\sin t,$$

$$W_2=\begin{vmatrix}\cos t & 0\\-\sin t & 1\end{vmatrix}=\cos t,$$

方程有特解

$$
\begin{aligned}
\tilde{x} &= x_1\int_0^t \frac{W_1}{W}\sec s\mathrm{d}s + x_2\int_0^t \frac{W_2}{W}\sec s\mathrm{d}s \\
&= -\cos t\int_0^t \sin s\sec s\mathrm{d}s + \sin t\int_0^t \cos s\sec s\mathrm{d}s \\
&= \cos t\ln|\cos t| + t\sin t,
\end{aligned}
$$

因此方程的通解为

$$x = c_1\cos t + c_2\sin t + \cos t\ln|\cos t| + t\sin t,$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

解 2 令 $y_1 = x, y_2 = y_1' = x'$,方程可化为方程组

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(t),\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sec t \end{bmatrix}.$$

由[§5.4.3-1]知方程 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ 有基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$,利用常数变易公式

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^t \boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s,\ t_0, t\in[a,b].$$

由 $\det\boldsymbol{\Phi}(t) = 1$,有

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t) = \frac{1}{\det\boldsymbol{\Phi}(t)}\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{\varphi}(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$,于是

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}(t) &= \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \\
&\quad \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}\int_0^t \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \sec s \end{bmatrix}\mathrm{d}s \\
&= \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} -\dfrac{\sin s}{\cos s} \\ 1 \end{bmatrix}\mathrm{d}s\right)
\end{aligned}
$$

$$=\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \ln|\cos t| \\ t \end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix} c_1\cos t+\cos t\ln|\cos t|+c_2\sin t+t\sin t \\ -c_1\sin t-\sin t\ln|\cos t|+c_2\cos t+t\cos t \end{bmatrix},$$

即满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ 的解为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{bmatrix} c_1\cos t+\cos t\ln|\cos t|+c_2\sin t+t\sin t \\ -c_1\sin t-\sin t\ln|\cos t|+c_2\cos t+t\cos t \end{bmatrix}.$$

对方程而言,通解为($x=y_1$)

$$x=c_1\cos t+c_2\sin t+\cos t\ln|\cos t|+t\sin t,$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

(2) $x'''-8x=\mathrm{e}^{2t}$.

提示 方程有特征值 $\lambda=2,\lambda=-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$. 方程右端 e^{2t} 对特征值 $\lambda=2$ 属于 I 型 $k=1,m=0$,其特解设为 $\tilde{x}=ct\mathrm{e}^{2t}$,代入方程得 $c=\frac{1}{12}$. 方程的通解为

$$x=c_1\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-t}(c_2\cos\sqrt{3}t+c_3\sin\sqrt{3}t)+\frac{1}{12}t\mathrm{e}^{2t}.$$

(3) $x''-6x'+9x=\mathrm{e}^t$.

提示 方程的特征方程 $\lambda^2-6\lambda+9=(\lambda-3)^2=0$ 有 2 重特征值 $\lambda=3$,方程有基本解组 $x_1=\mathrm{e}^{3t},x_2=t\mathrm{e}^{3t}$. 方程右端 e^t 属于 I 型 $k=0,m=0$,其特解设为 $\tilde{x}=c\mathrm{e}^t$,代入方程得

$$x''-6x'+9x=4c\mathrm{e}^t=\mathrm{e}^t,\ c=\frac{1}{4},$$

有特解 $\tilde{x}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^t$. 方程的通解为

$$x=(c_1+c_2t)\mathrm{e}^{3t}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^t.$$

11. 已知方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1\cos^2 t-x_2(1-\sin t\cos t),\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1(1+\sin t\cos t)+x_2\sin^2 t\end{cases}$$

有解 $x_1=-\sin t, x_2=\cos t$,求其通解.

提示1 解 $x_1=-\sin t, x_2=\cos t$ 当 $t=0$ 时为 $x_1=0, x_2=1$. 现设另有解 y_1, y_2 当 $t=0$ 时为 $y_1=1, y_2=0$. 由[§5.4.4－2(2)]有

$$\begin{vmatrix} y_1 & -\sin t \\ y_2 & \cos t \end{vmatrix}=e^{\int_0^t(a_{11}+a_{22})dt}=e^t,$$

即 $y_1\cos t+y_2\sin t=e^t, y_2=(e^t-y_1\cos t)\csc t$,代入第1个方程得

$$\frac{dy_1}{dt}=y_1\cot t+e^t(\cos t-\csc t).$$

此为线性方程,有解

$$\begin{aligned} y_1&=e^{\int\cot t\,dt}\left[\int e^t(\cos t-\csc t)\csc t\,dt+c\right]\\ &=\sin t\left[\int d(e^t\cot t)+c\right]=e^t\cos t+c\sin t. \end{aligned}$$

再由初值条件 $y_1(0)=1$,并取 $c=0$,得 $y_1=e^t\cos t$. 从而

$$y_2=e^t\sin t.$$

即方程的另一解为 $y_1=e^t\cos t, y_2=e^t\sin t$. 通解为

$$x_1=-c_1\sin t+c_2e^t\cos t, x_2=c_1\cos t+c_2e^t\sin t.$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

提示2 由[§5.4.4－4]知可取变换

$$y_1=x_1+\frac{\sin t}{\cos t}x_2,\ y_2=\frac{1}{\cos t}x_2.$$

消去变量 x_2. 由 $x_1=y_1-\dfrac{\sin t}{\cos t}x_2=y_1-y_2\sin t, x_2=y_2\cos t$,有

$$\frac{dy_1}{dt}=\frac{dx_1}{dt}+\sec^2 t\cdot x_2+\frac{dx_2}{dt}\tan t=y_1(1+\tan t).$$

可积分得 $y_1=e^t\sec t$. 为求 y_2,变为原方程变量 $x_1=e^t\sec t-$

$y_2\sin t, x_2=y_2\cos t$. 并代入第 2 个方程得 $y_2'=e^t(\sec^2 t+\tan t)=(e^t\tan t)'$. 可得积分 $y_2=e^t\tan t$. 即有解 $x_1=e^t\cos t, x_2=e^t\sin t$,它与原给出的解 $x_1=-\sin t, x_2=\cos t$ 组成标准基解组. 故方程的通解为 $x_1=-c_1\sin t+c_2e^t\cos t, x_2=c_1\cos t+c_2e^t\sin t$. 其中 c_1,c_2为任意常数.

12. 已知方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=\dfrac{1}{t}x_1-x_2+t,\\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt}=\dfrac{1}{t^2}x_1+\dfrac{2}{t}x_2-t^2,\end{cases}\qquad t>0$$

的对应齐次方程组有解 $x_1=t^2, x_2=-t$,求其通解.

提示 设对应齐次方程组有另一解 y_1,y_2. 由[§5.4.4-2(2)]有

$$\begin{vmatrix} t^2 & y_1\\ -t & y_2\end{vmatrix}=e^{\int_0^t(a_{11}+a_{22})dt}=t^3,$$

即 $y_1=t^2-ty_2$,代入齐次方程组的第 2 个方程得$\dfrac{dy_2}{dt}=t^{-1}y_2+1$. 有解 $y_2=t\ln t$. 从而 $y_1=t^2(1-\ln t)$. 有基解矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} t^2 & t^2(1-\ln t)\\ -t & t\ln t\end{bmatrix}.$$

现求非齐次线性方程组的解,利用常数变易公式

$$x=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^t\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds,\ t_0,t\in[a,b].$$

因

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\begin{bmatrix} t^{-2}\ln t & t^{-1}(-1+\ln t)\\ t^{-2} & t^{-1}\end{bmatrix}.$$

令 $t_0=1, \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$,则有

$$x = \begin{bmatrix} t^2 & t^2(1-\ln t) \\ -t & t\ln t \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \int_1^t \begin{bmatrix} s^{-1}\ln s + s - s\ln s \\ s^{-1} - s \end{bmatrix} ds\right)$$

$$= \begin{bmatrix} t^2 & t^2(1-\ln t) \\ -t & t\ln t \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\ln^2 t}{2} + \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{2}t^2\ln t - \frac{3}{4} \\ \ln t - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \left(c_1 + c_2 - \frac{1}{4}\right)t^2 + \frac{1}{4}t^4 + \left(\frac{1}{2} - c_2\right)t^2\ln t - \frac{1}{2}t^2\ln^2 t \\ \left(\frac{3}{4} - c_1\right)t - \frac{3}{4}t^3 + \left(\frac{1}{2} + c_2\right)t\ln t + \frac{1}{2}t\ln^2 t \end{bmatrix}.$$

13. 给定方程

$$x'' + 8x' + 7x = f(t),$$

其中 $f(t)$ 在 $0 \leqslant t < +\infty$ 上连续,试利用常数变易公式,证明:

(1) 如果 $f(t)$ 在 $0 \leqslant t < +\infty$ 上有界,则方程的每一个解在 $0 \leqslant t < +\infty$ 上有界;

(2) 如果当 $t \to +\infty$ 时 $f(t) \to 0$,则方程的每一个解 $\varphi(t)$,满足 $\varphi(t) \to 0$(当 $t \to +\infty$ 时).

证 方程的特征方程为 $\lambda^2 + 8\lambda + 7 = (\lambda + 1)(\lambda + 7) = 0$,特征根为 $\lambda = -1, \lambda = -7$. 齐次方程有基本解组 $x_1 = e^{-t}, x_2 = e^{-7t}$. 朗斯基行列式为

$$W[x_1, x_2] = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{-7t} \\ -e^{-t} & -7e^{-7t} \end{vmatrix} = -6e^{-8t},$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-7t} \\ 1 & -7e^{-7t} \end{vmatrix} = -e^{-7t}, W_2 = \begin{vmatrix} e^{-t} & 0 \\ -e^{-t} & 1 \end{vmatrix} = e^{-t}.$$

方程有特解

$$\tilde{x} = x_1\int_0^t \frac{W_1}{W}f(s)\,ds + x_2\int_0^t \frac{W_2}{W}f(s)\,ds$$

$$= \frac{1}{6}\left[e^{-t}\int_0^t e^s f(s)\,ds - e^{-7t}\int_0^t e^{7s}f(s)\,ds\right].$$

方程的通解为

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-7t} + \frac{1}{6}\left[e^{-t}\int_0^t e^s f(s)\,ds - e^{-7t}\int_0^t e^{7s} f(s)\,ds \right].$$

（1）如果 $f(t)$ 在 $0 \leqslant t < +\infty$ 上有界，即 $|f(t)| \leqslant M(0 \leqslant t < +\infty)$，则有

$$\begin{aligned}
|x| &\leqslant |c_1|e^{-t} + |c_2|e^{-7t} + \frac{1}{6}\left[e^{-t}\int_0^t e^s |f(s)|\,ds + e^{-7t}\int_0^t e^{7s} |f(s)|\,ds \right] \\
&\leqslant |c_1| + |c_2| + \frac{M}{6}\left(e^{-t}\cdot e^t + \frac{1}{7}e^{-7t}\cdot e^{7t} \right) \\
&\leqslant |c_1| + |c_2| + \frac{4M}{21}.
\end{aligned}$$

于是方程的每一个解在 $0 \leqslant t < +\infty$ 上有界.

（2）如果当 $t \to +\infty$ 时 $f(t) \to 0$，显然 $f(t)$ 在 $0 \leqslant t < +\infty$ 上有界，即有 $|f(t)| \leqslant M(0 \leqslant t < +\infty)$. 要证明对方程的每一个解 $\varphi(t)$，当 $t \to +\infty$ 时有 $\varphi(t) \to 0$. 即要证明对任意小的 $\varepsilon > 0$，存在 $T > 0$，使得当 $t > T$ 时有 $|\varphi(t)| \leqslant \varepsilon$.

由当 $t \to +\infty$ 时 $f(t) \to 0$ 知，对 $\delta = \varepsilon$，存在 $T_0 > 0$，使得当 $t > T_0$ 时有 $|f(t)| \leqslant \delta = \varepsilon$. 于是对通解 $\varphi(t)$ 有

$$\begin{aligned}
|\varphi(t)| &\leqslant |c_1|e^{-t} + |c_2|e^{-7t} + \frac{1}{6}\left(e^{-t}\int_0^t e^s |f(s)|\,ds + e^{-7t}\int_0^t e^{7s} |f(s)|\,ds \right) \\
&\leqslant |c_1|e^{-t} + |c_2|e^{-7t} + \frac{M}{6}\left(e^{-t}\cdot |e^{T_0} - 1| + \frac{1}{7}e^{-7t}\cdot |e^{7T_0} - 1| \right) + \\
&\quad \frac{\delta}{6}\left(e^{-t}\cdot e^t + \frac{1}{7}e^{-7t}\cdot e^{7t} \right) \\
&\leqslant |c_1|e^{-t} + |c_2|e^{-7t} + \frac{M}{6}\left(e^{-t}\cdot |e^{T_0} - 1| + \frac{1}{7}e^{-7t}\cdot |e^{7T_0} - 1| \right) + \\
&\quad \frac{4}{21}\delta.
\end{aligned}$$

因当 $t \to +\infty$ 时，$\left(|c_1|e^{-t} + |c_2|e^{-7t} + \frac{M}{6}\left(e^{-t}\cdot |e^{T_0} - 1| + \frac{1}{7}e^{-7t}\cdot \right.\right.$

$\left.\left.|e^{7T_0}-1|\right)+\frac{4}{21}\delta\right)\to\frac{4}{21}\delta$. 而$\frac{4}{21}\delta=\frac{4}{21}\varepsilon<\varepsilon$. 因此,存在 $T_1\geqslant 0$ 当 $t\geqslant T_1$时有

$$|c_1|e^{-t}+|c_2|e^{-7t}+\frac{M}{6}\left(e^{-t}\cdot|e^{T_0}-1|+\frac{1}{7}e^{-7t}\cdot|e^{7T_0}-1|\right)+\frac{4}{21}\delta\leqslant\varepsilon.$$

于是可令 $T=\max(T_0,T_1)$,则当 $t>T$ 时有 $|\varphi(t)|\leqslant\varepsilon$. 即当 $t\to+\infty$ 时有 $\varphi(t)\to 0$.

14. 给定方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x},$$

这里 $\boldsymbol{A}(t)$是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续 $n\times n$ 矩阵. 设 $\boldsymbol{\Phi}(t)$为方程组的一个基解矩阵,n 维向量函数 $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})$在 $a\leqslant t\leqslant b$, $\|\boldsymbol{x}\|<+\infty$ 上连续,$t_0\in[a,b]$. 试证明初值问题

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}),\\ \boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}\end{cases}\qquad(*)$$

的唯一解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$是积分方程组

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s\qquad(**)$$

的连续解. 反之,(**) 的连续解也是初值问题(*)的解.

证 因 $\boldsymbol{\Phi}(t)$为方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的一个基解矩阵. 设方程组(*)的解为 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)$. 代入方程组(*),得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}'(t)&=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}'(t)+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)\\&=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)+\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}(t)),\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}'(t)=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}(t))$. 因 $\boldsymbol{\Phi}(t)$为基解矩阵,$\det\boldsymbol{\Phi}(t)\neq 0$, $\boldsymbol{\Phi}(t)$的逆矩阵 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$存在,于是有 $\boldsymbol{c}'(t)=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}(t))$. 即 $\boldsymbol{c}(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s+\tilde{\boldsymbol{c}}$,方程组(*)的解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\tilde{\boldsymbol{c}}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s.$$

由初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$,可令 $t=t_0$时 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$,得 $\tilde{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}$,

因 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 为(*)的唯一解,故有

$$\boldsymbol{\varphi}(t) \equiv \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{\varphi}(s))\mathrm{d}s,$$

即 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 为积分方程(**)的连续解.

反之,若积分方程(**)有连续解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$,则

$$\boldsymbol{\varphi}(t) \equiv \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{\varphi}(s))\mathrm{d}s.$$

利用 $\boldsymbol{\Phi}'(t) \equiv \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)$,对上式求导,可化为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}'(t) &\equiv \boldsymbol{A}(t)\left[\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{\varphi}(s))\mathrm{d}s\right] + \\ &\quad \boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{\varphi}(t)) \\ &\equiv \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\varphi}(t) + \boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{\varphi}(t)),\end{aligned}$$

且 $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{\Phi}(t_0)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}$,故 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是初值问题(*)的解.

§5.4.5 习题 5.3 及其解答

1. 假设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n \times n$ 矩阵,试证:

(1) 对任意的常数 c_1, c_2 都有

$$\exp(c_1\boldsymbol{A} + c_2\boldsymbol{A}) = \exp(c_1\boldsymbol{A}) \cdot \exp(c_2\boldsymbol{A});$$

(2) 对任意整数 k,都有

$$(\exp \boldsymbol{A})^k = \exp(k\boldsymbol{A}).$$

(当 k 是负整数时,规定 $(\exp \boldsymbol{A})^k = [(\exp \boldsymbol{A})^{-1}]^{-k}$.)

证 (1) 令 $\boldsymbol{B} = c_1\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C} = c_2\boldsymbol{A}$,因 $\boldsymbol{BC} = (c_1\boldsymbol{A}) \cdot (c_2\boldsymbol{A}) = c_1c_2\boldsymbol{A}^2 = (c_2\boldsymbol{A}) \cdot (c_1\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{CB}$,因此矩阵 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 可交换,利用矩阵指数 $\exp \boldsymbol{A}$ 的性质 1°知 $\exp(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \exp \boldsymbol{B} \cdot \exp \boldsymbol{C}$,即

$$\exp(c_1\boldsymbol{A} + c_2\boldsymbol{A}) = \exp(c_1\boldsymbol{A}) \cdot \exp(c_2\boldsymbol{A}).$$

(2) 对正整数 $k = 1$,显然成立 $(\exp \boldsymbol{A})^k = \exp(k\boldsymbol{A})$. 设 $k = n$ 成立 $(\exp \boldsymbol{A})^n = \exp(n\boldsymbol{A})$,则因 $n\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = n\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \cdot (n\boldsymbol{A})$,矩阵 $n\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}$ 可交换,利用性质 1°知

$$\begin{aligned}(\exp \boldsymbol{A})^{n+1} &= (\exp \boldsymbol{A})^n \cdot (\exp \boldsymbol{A}) = \exp(n\boldsymbol{A}) \cdot \exp \boldsymbol{A} \\ &= \exp(n+1)\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

即对 $k=n+1$ 也成立. 由数学归纳法知对任意正整数 k,均成立 $(\exp \boldsymbol{A})^k=\exp(k\boldsymbol{A})$.

当 k 是负整数时,同样,$k=-1$,由性质 $2°$ 成立 $(\exp \boldsymbol{A})^{-1}=\exp(-\boldsymbol{A})$. 设 $k=-n$ 成立 $(\exp \boldsymbol{A})^{-n}=\exp(-n\boldsymbol{A})$,则因 $(-n\boldsymbol{A})\cdot(-\boldsymbol{A})=n\boldsymbol{A}^2=(-\boldsymbol{A})\cdot(-n\boldsymbol{A})$,矩阵 $-n\boldsymbol{A}$, $-\boldsymbol{A}$ 可交换,利用性质 $1°$ 知

$$\begin{aligned}(\exp \boldsymbol{A})^{-(n+1)}&=(\exp \boldsymbol{A})^{-n}\cdot(\exp \boldsymbol{A})^{-1}\\&=\exp(-n\boldsymbol{A})\cdot\exp(-\boldsymbol{A})\\&=\exp[-(n+1)\boldsymbol{A}].\end{aligned}$$

即对 $k=-(n+1)$ 也成立. 由数学归纳法知对任意负整数 k,均成立 $(\exp \boldsymbol{A})^k=\exp(k\boldsymbol{A})$.

2. 试证:如果 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解,那么

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=[\exp \boldsymbol{A}(t-t_0)]\boldsymbol{\eta}.$$

证 方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\exp(\boldsymbol{A}t)$,且 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E}$. 通解为 $\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}=[\exp(\boldsymbol{A}t)]\boldsymbol{c}$. 对满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 有

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\Phi}(t_0)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{c}=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta},$$

即解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(t)&=(\exp \boldsymbol{A}t)(\exp \boldsymbol{A}t_0)^{-1}\boldsymbol{\eta}=(\exp \boldsymbol{A}t)[\exp(-\boldsymbol{A}t_0)]\boldsymbol{\eta}\\&=[\exp \boldsymbol{A}(t-t_0)]\boldsymbol{\eta}.\end{aligned}$$

3. 试计算下面矩阵的特征值及对应的特征向量:

(1) $\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}$.

解 矩阵的特征方程为

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-4&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-5)=0.$$

特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=5$. $\lambda_1=-1$ 的特向量 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$满足

$$(\lambda_1 \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ -4 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2u_1-2u_2\\ -4u_1-4u_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{u}=\alpha\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$,其中 $\alpha\neq0$ 为任意常数. 同样,$\lambda_2=5$ 的特征向量 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}$满足

$$(\lambda_2 \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4v_1-2v_2\\ -4v_1+2v_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

即$\boldsymbol{v}=\beta\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$,其中 $\beta\neq0$ 为任意常数.

(2) $\begin{bmatrix}2 & -3 & 3\\ 4 & -5 & 3\\ 4 & -4 & 2\end{bmatrix}$.

提示 矩阵的特征方程为

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 3 & -3\\ -4 & \lambda+5 & -3\\ -4 & 4 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+2)=0.$$

特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=2$. $\lambda_1=-1$ 的特征向量 $\boldsymbol{u}=[u_1,u_2,u_3]^{\mathrm{T}}$满足

$$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}-3 & 3 & -3\\ -4 & 4 & -3\\ -4 & 4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3u_1+3u_2-3u_3\\ -4u_1+4u_2-3u_3\\ -4u_1+4u_2-3u_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

有解 $\boldsymbol{u}=\alpha[1,1,0]^{\mathrm{T}}$,其中 $\alpha\neq0$ 为任意常数. 同样,$\lambda_2=-2$ 有特征向量$\boldsymbol{v}=\beta[0,1,1]^{\mathrm{T}}$,$\lambda_3=2$ 有特征向量 $\boldsymbol{r}=\gamma[1,1,1]^{\mathrm{T}}$.

(3) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

提示 矩阵的特征方程有特征值 $\lambda_1=3$ 和 2 重特征值 $\lambda_2=-1$. $\lambda_1=3$ 有特征向量 $\boldsymbol{u}=\alpha[2,1,2]^{\mathrm{T}}$,2 重特征值 $\lambda_2=-1$ 有特殊向量 $\boldsymbol{v}=[3\beta,3\gamma,-4\beta-2\gamma]^{\mathrm{T}}$或 $\boldsymbol{v}=[-3\beta-\gamma,2\gamma,4\beta]^{\mathrm{T}}$.

(4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$.

解 矩阵的特征方程为

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda+6 \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)=0.$$

特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-3$. $\lambda_1=-1$ 的特征向量 $\boldsymbol{u}=[u_1,u_2,u_3]^{\mathrm{T}}$满足

$$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & 11 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -u_1-u_2 \\ -u_2-u_3 \\ 6u_1+11u_2+5u_3 \end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

有解 $\boldsymbol{u}=\alpha[1,-1,1]^{\mathrm{T}}$,其中 $\alpha\neq0$ 为任意常数. 同样,$\lambda_2=-2$ 的特征向量 $\boldsymbol{v}=[v_1,v_2,v_3]^{\mathrm{T}}$满足

$$(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 6 & 11 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2v_1-v_2 \\ -2v_2-v_3 \\ 6v_1+11v_2+4v_3 \end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{v}=\beta[1,-2,4]^{\mathrm{T}}$,其中 $\beta\neq0$ 为任意常数. $\lambda_3=-3$ 的特征向量 $\boldsymbol{r}=[r_1,r_2,r_3]^{\mathrm{T}}$满足

$$(\lambda_3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{r}=\begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 6 & 11 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3r_1-r_2 \\ -3r_2-r_3 \\ 6r_1+11r_2+3r_3 \end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{v}=\gamma[1,-3,9]^{\mathrm{T}}$,其中 $\gamma\neq0$ 为任意常数.

4. 试求方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的一个基解矩阵,并计算 $\exp(\boldsymbol{A}t)$,其

中 $\boldsymbol{A}$ 为：

(1) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

解 (1) 矩阵的特征方程为

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=\lambda^2-3=0.$$

特征值为 $\lambda_{1,2}=\mp\sqrt{3}$. $\lambda_1=-\sqrt{3}$的特征向量 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$满足

$$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} 2-\sqrt{3} & -1 \\ 1 & -2-\sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (2-\sqrt{3})u_1-u_2 \\ u_1-(2+\sqrt{3})u_2 \end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{u}=\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}$，其中 $\alpha\neq0$ 为任意常数. 同样，$\lambda_2=\sqrt{3}$的特征向量$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$满足

$$(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} \sqrt{3}+2 & -1 \\ 1 & \sqrt{3}-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (\sqrt{3}+2)v_1-v_2 \\ v_1+(\sqrt{3}-2)v_2 \end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

即$\boldsymbol{v}=\beta\begin{bmatrix} 1 \\ 2+\sqrt{3} \end{bmatrix}$，其中 $\beta\neq0$ 为任意常数.

方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的一个基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\sqrt{3}t} & \mathrm{e}^{\sqrt{3}t} \\ (2-\sqrt{3})\mathrm{e}^{-\sqrt{3}t} & (2+\sqrt{3})\mathrm{e}^{\sqrt{3}t} \end{bmatrix}.$$

因

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix}(2+\sqrt{3})\mathrm{e}^{\sqrt{3}t} & -\mathrm{e}^{\sqrt{3}t}\\ -(2-\sqrt{3})\mathrm{e}^{-\sqrt{3}t} & \mathrm{e}^{-\sqrt{3}t}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix}2+\sqrt{3} & -1\\ \sqrt{3}-2 & 1\end{bmatrix},$$

故

$$\exp(\boldsymbol{A}t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\begin{bmatrix}(2+\sqrt{3})\mathrm{e}^{-\sqrt{3}t}-(2-\sqrt{3})\mathrm{e}^{\sqrt{3}t} & -\mathrm{e}^{-\sqrt{3}t}+\mathrm{e}^{\sqrt{3}t}\\ \mathrm{e}^{-\sqrt{3}t}-\mathrm{e}^{\sqrt{3}t} & -(2-\sqrt{3})\mathrm{e}^{-\sqrt{3}t}+(2+\sqrt{3})\mathrm{e}^{\sqrt{3}t}\end{bmatrix}.$$

(2) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$.

提示 由第 3 题(1)知,方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的一个基解矩阵为

$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{5t}\\ -\mathrm{e}^{-t} & 2\mathrm{e}^{5t}\end{bmatrix}$,因

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\frac{1}{3\mathrm{e}^{4t}}\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{5t} & -\mathrm{e}^{5t}\\ \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix},$$

故

$$\exp(\boldsymbol{A}t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{5t} & -\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{5t}\\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{5t} & \mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{5t}\end{bmatrix}.$$

(3) $\begin{bmatrix}2 & -3 & 3\\ 4 & -5 & 3\\ 4 & -4 & 2\end{bmatrix}$.

提示 由第 3 题(2)知,方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的一个基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t} & 0 & \mathrm{e}^{2t}\\ \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{2t}\\ 0 & \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}.$$

因

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\frac{1}{e^{-t}}\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ -e^{t} & e^{t} & 0\\ e^{-3t} & -e^{-3t} & e^{-3t}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix},$$

故

$$\exp(\boldsymbol{A}t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\begin{bmatrix}e^{2t} & e^{-t}-e^{2t} & -e^{-t}+e^{2t}\\ -e^{-2t}+e^{2t} & e^{-t}+e^{-2t}-e^{2t} & -e^{-t}+e^{2t}\\ -e^{-2t}+e^{2t} & e^{-2t}-e^{2t} & e^{2t}\end{bmatrix}.$$

(4) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 8 & 1 & -1\\ 5 & 1 & -1\end{bmatrix}$.

提示 矩阵有特征值为 $\lambda_1=-3,\lambda_{2,3}=2\pm\sqrt{7}$. $\lambda_1=-3$ 有特征向量 $\boldsymbol{u}=\alpha[-3,7,4]^{\mathrm{T}}$, $\lambda_2=2+\sqrt{7}$ 有特征向量 $\boldsymbol{v}=\beta[3,-5+4\sqrt{7},1+\sqrt{7}]^{\mathrm{T}}$, $\lambda_3=2-\sqrt{7}$ 有特征向量 $\boldsymbol{r}=\gamma[3,-5-4\sqrt{7},1-\sqrt{7}]^{\mathrm{T}}$.

方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的一个基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}-3e^{-3t} & 3e^{(2+\sqrt{7})t} & 3e^{(2-\sqrt{7})t}\\ 7e^{-3t} & (-5+4\sqrt{7})e^{(2+\sqrt{7})t} & (-5-4\sqrt{7})e^{(2-\sqrt{7})t}\\ 4e^{-3t} & (1+\sqrt{7})e^{(2+\sqrt{7})t} & (1-\sqrt{7})e^{(2-\sqrt{7})t}\end{bmatrix}.$$

因

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\frac{-1}{108\sqrt{7}}\begin{bmatrix}18\sqrt{7} & 6\sqrt{7} & -24\sqrt{7}\\ -27-9\sqrt{7} & -15+3\sqrt{7} & 6-12\sqrt{7}\\ 27-9\sqrt{7} & 15+3\sqrt{7} & -6-12\sqrt{7}\end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix}
-\dfrac{1}{6} & -\dfrac{1}{18} & \dfrac{2}{9} \\
\dfrac{3+\sqrt{7}}{12\sqrt{7}} & \dfrac{5-\sqrt{7}}{36\sqrt{7}} & \dfrac{-1+2\sqrt{7}}{18\sqrt{7}} \\
\dfrac{-3+\sqrt{7}}{12\sqrt{7}} & \dfrac{-5-\sqrt{7}}{36\sqrt{7}} & \dfrac{1+2\sqrt{7}}{18\sqrt{7}}
\end{bmatrix},
$$

于是

$$
\exp(\boldsymbol{A}t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)
$$

$$
=\begin{bmatrix}
\dfrac{1}{2}e^{-3t}+\dfrac{3+\sqrt{7}}{4\sqrt{7}}e^{(2+\sqrt{7})t}+\dfrac{-3+\sqrt{7}}{4\sqrt{7}}e^{(2-\sqrt{7})t} & \dfrac{1}{6}e^{-3t}+\dfrac{5-\sqrt{7}}{12\sqrt{7}}e^{(2+\sqrt{7})t}+\dfrac{-5-\sqrt{7}}{12\sqrt{7}}e^{(2-\sqrt{7})t} & -\dfrac{2}{3}e^{-3t}+\dfrac{-1+2\sqrt{7}}{6\sqrt{7}}e^{(2+\sqrt{7})t}+\dfrac{1+2\sqrt{7}}{6\sqrt{7}}e^{(2-\sqrt{7})t} \\
-\dfrac{7}{6}e^{-3t}+\dfrac{13+7\sqrt{7}}{12\sqrt{7}}e^{(2+\sqrt{7})t}+\dfrac{-13+7\sqrt{7}}{12\sqrt{7}}e^{(2-\sqrt{7})t} & -\dfrac{7}{18}e^{-3t}+\dfrac{-53+25\sqrt{7}}{36\sqrt{7}}e^{(2+\sqrt{7})t}+\dfrac{53+25\sqrt{7}}{36\sqrt{7}}e^{(2-\sqrt{7})t} & \dfrac{14}{9}e^{-3t}+\dfrac{61-14\sqrt{7}}{18\sqrt{7}}e^{(2+\sqrt{7})t}+\dfrac{-61-14\sqrt{7}}{18\sqrt{7}}e^{(2-\sqrt{7})t} \\
-\dfrac{2}{3}e^{-3t}+\dfrac{5+2\sqrt{7}}{6\sqrt{7}}e^{(2+\sqrt{7})t}+\dfrac{-5+2\sqrt{7}}{6\sqrt{7}}e^{(2-\sqrt{7})t} & -\dfrac{2}{9}e^{-3t}+\dfrac{-1+2\sqrt{7}}{18\sqrt{7}}e^{(2+\sqrt{7})t}+\dfrac{1+2\sqrt{7}}{18\sqrt{7}}e^{(2-\sqrt{7})t} & \dfrac{8}{9}e^{-3t}+\dfrac{13+\sqrt{7}}{18\sqrt{7}}e^{(2+\sqrt{7})t}+\dfrac{-13+\sqrt{7}}{18\sqrt{7}}e^{(2-\sqrt{7})t}
\end{bmatrix}.
$$

5. 试求方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵，并求满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$：

(1) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$, $\quad \boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}3\\ 3\end{bmatrix}$.

提示 由第4题(2)已知方程组 $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵. 根据第2题知满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)=[\exp A(t-t_0)]\boldsymbol{\eta}$,于是

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=[\exp(At)]\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}e^{-t}+2e^{5t}\\ -e^{-t}+4e^{5t}\end{bmatrix}.$$

(2) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 8 & 1 & -1\\ 5 & 1 & -1\end{bmatrix}$, $\quad \boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}0\\ -2\\ -7\end{bmatrix}$.

提示 由第4题(4)已知方程组 $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵,满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=[\exp(At)]\boldsymbol{\eta}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{13}{3}e^{-3t}+\frac{2-13\sqrt{7}}{6\sqrt{7}}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{-2-13\sqrt{7}}{6\sqrt{7}}e^{(2-\sqrt{7})t}\\ -\frac{91}{9}e^{-3t}+\frac{-374+73\sqrt{7}}{18\sqrt{7}}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{374+73\sqrt{7}}{18\sqrt{7}}e^{(2-\sqrt{7})t}\\ -\frac{52}{9}e^{-3t}+\frac{-89-11\sqrt{7}}{18\sqrt{7}}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{89-11\sqrt{7}}{18\sqrt{7}}e^{(2-\sqrt{7})t}\end{bmatrix}.$$

(3) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $\quad \boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$.

解 由第3题(3)知,矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=3$ 和2重特征值 $\lambda_2=-1$,特征向量为 $\boldsymbol{u}=\alpha\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$,特殊向量为 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-3\beta-\gamma\\ 2\gamma\\ 4\beta\end{bmatrix}$. 对初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{bmatrix}$,应有 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$,即

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha - 3\beta - \gamma \\ \alpha + 2\gamma \\ 2\alpha + 4\beta \end{bmatrix}.$$

解得

$$\alpha = \frac{1}{16}(4\eta_1 + 2\eta_2 + 3\eta_3),$$

$$\beta = \frac{1}{32}(-4\eta_1 - 2\eta_2 + 5\eta_3),$$

$$\gamma = \frac{1}{32}(-4\eta_1 + 14\eta_2 - 3\eta_3),$$

当 $\boldsymbol{\eta} = [1,0,0]^{\mathrm{T}}$时有 $\alpha = \frac{1}{4}, \beta = -\frac{1}{8}, \gamma = -\frac{1}{8}$. 利用公式得解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}_1(t) &= \mathrm{e}^{3t}\boldsymbol{E}\boldsymbol{u} + \mathrm{e}^{-t}[\boldsymbol{E} + t(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})]\boldsymbol{v} \\ &= \mathrm{e}^{3t}\boldsymbol{E}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix} 1+2t & 2t & t \\ t & 1 & t \\ 2t & 0 & 1+2t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} \\ \frac{1}{4}\mathrm{e}^{3t} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t} \\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

当 $\boldsymbol{\eta} = [0,1,0]^{\mathrm{T}}$时有 $\alpha = \frac{1}{8}, \beta = -\frac{1}{16}, \gamma = \frac{7}{16}$. 同样得解

$$\boldsymbol{\varphi}_2(t) = \mathrm{e}^{3t}\boldsymbol{E}\boldsymbol{u} + \mathrm{e}^{-t}[\boldsymbol{E} + t(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})]\boldsymbol{v}$$

$$
= e^{3t}\boldsymbol{E}\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} + e^{-t}\begin{bmatrix} 1+2t & 2t & t \\ t & 1 & t \\ 2t & 0 & 1+2t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{7}{8} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{3t} + e^{-t}\left(-\frac{1}{4}+t\right) \\ \frac{1}{8}e^{3t} + e^{-t}\left(\frac{7}{8}-\frac{1}{2}t\right) \\ \frac{1}{4}e^{3t} + e^{-t}\left(-\frac{1}{4}-t\right) \end{bmatrix}.
$$

当 $\boldsymbol{\eta}=[0,0,1]^{\mathrm{T}}$时有 $\alpha=\frac{3}{16},\beta=\frac{5}{32},\gamma=-\frac{3}{32}$. 则得

$$
\boldsymbol{\varphi}_3(t) = e^{3t}\boldsymbol{E}\boldsymbol{u} + e^{-t}[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})]\boldsymbol{v}
$$

$$
= e^{3t}\boldsymbol{E}\begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{3}{8} \end{bmatrix} + e^{-t}\begin{bmatrix} 1+2t & 2t & t \\ t & 1 & t \\ 2t & 0 & 1+2t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{16} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \frac{3}{8}e^{3t} + e^{-t}\left(-\frac{3}{8}-\frac{1}{2}t\right) \\ \frac{3}{16}e^{3t} + e^{-t}\left(-\frac{3}{16}+\frac{1}{4}t\right) \\ \frac{3}{8}e^{3t} + e^{-t}\left(\frac{5}{8}+\frac{1}{2}t\right) \end{bmatrix}.
$$

因此方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的一个标准基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^{3t}+e^{-t}\left(-\frac{1}{4}+t\right) & \frac{3}{8}e^{3t}+e^{-t}\left(-\frac{3}{8}-\frac{1}{2}t\right)\\ \frac{1}{4}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{-t} & \frac{1}{8}e^{3t}+e^{-t}\left(\frac{7}{8}-\frac{1}{2}t\right) & \frac{3}{16}e^{3t}+e^{-t}\left(-\frac{3}{16}+\frac{1}{4}t\right)\\ \frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^{3t}+e^{-t}\left(-\frac{1}{4}-t\right) & \frac{3}{8}e^{3t}+e^{-t}\left(\frac{5}{8}+\frac{1}{2}t\right)\end{bmatrix}.$$

其满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=[1,0,0]^{\mathrm{T}}$ 的解为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{-t}\\ \frac{1}{4}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{-t}\\ \frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{-t}\end{bmatrix}.$$

6. 试求方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$：

(1) $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$， $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}$， $\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}e^{t}\\1\end{bmatrix}$.

提示 由第 4 题(2)已知方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵. 利用非齐次线性方程的常数变易公式

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\exp[(t-t_0)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^{t}\exp[(t-s)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{f}(s)\,ds,$$

得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(t)&=\exp(t\boldsymbol{A})\boldsymbol{\eta}+\int_0^t\exp[(t-s)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{f}(s)\,ds\\&=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-3e^{-t}\\3e^{-t}\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\int_0^t\begin{bmatrix}2e^{-t+2s}-e^{-t+s}+e^{5t-4s}+e^{5t-5s}\\-2e^{-t+2s}+e^{-t+s}+2e^{5t-4s}+2e^{5t-5s}\end{bmatrix}ds\\&=\begin{bmatrix}\frac{3}{20}e^{5t}-e^{-t}-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{2}{5}\\ \frac{3}{10}e^{5t}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{5}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(2) $\boldsymbol{\varphi}(0)=\mathbf{0}$, $\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$, $\quad \boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}$.

提示 由第 3 题(4)已知方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的一个基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-3t} \\ -\mathrm{e}^{-t} & -2\mathrm{e}^{-2t} & -3\mathrm{e}^{-3t} \\ \mathrm{e}^{-t} & 4\mathrm{e}^{-2t} & 9\mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}.$$

因 $\det \boldsymbol{\Phi}(0) = -2$,

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\frac{1}{\det \boldsymbol{\Phi}(0)}\begin{bmatrix} -6 & -5 & -1 \\ 6 & 8 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

考虑到初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\mathbf{0}$ 及非齐次项 $\boldsymbol{f}(t)$ 的形式,标准基解矩阵可仅计算部分项

$$\exp(\boldsymbol{A}t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\begin{bmatrix} * & * & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t} \\ * & * & -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3t} \\ * & * & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}-4\mathrm{e}^{-2t}+\frac{9}{2}\mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}.$$

利用非齐次线性方程的常数变易公式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(t) &= \exp(t\boldsymbol{A})\boldsymbol{\eta}+\int_0^t \exp[(t-s)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-3t} \\ -\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-t}-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-2t}+\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-3t} \\ \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-t}-4\mathrm{e}^{-t}+\frac{9}{4}\mathrm{e}^{-t}+4\mathrm{e}^{-2t}-\frac{9}{4}\mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$=\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}t-\frac{3}{4}\right)e^{-t}+e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-3t} \\ \left(-\frac{1}{2}t+\frac{5}{4}\right)e^{-t}-2e^{-2t}+\frac{3}{4}e^{-3t} \\ \left(\frac{1}{2}t-\frac{7}{4}\right)e^{-t}+4e^{-2t}-\frac{9}{4}e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

(3) $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}\sin t\\ -2\cos t\end{bmatrix}$.

解 矩阵的特征方程为

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-4 & 3\\ -2 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)=0.$$

特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$. $\lambda_1=1$ 的特征向量 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$满足

$$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}-3 & 3\\ -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3u_1+3u_2\\ -2u_1+2u_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{u}=\alpha\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$,其中 $\alpha\neq0$ 为任意常数. 同样,$\lambda_2=2$ 的特征向量$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}$满足

$$(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2v_1+3v_2\\ -2v_1+3v_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

即$\boldsymbol{v}=\beta\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}$,其中 $\beta\neq0$ 为任意常数.

方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的一个基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}e^{t} & 3e^{2t}\\ e^{t} & 2e^{2t}\end{bmatrix}.$$

因

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\begin{bmatrix}-2e^{-t} & 3e^{-t}\\ e^{-2t} & -e^{-2t}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix},$$

故

$$\exp(\boldsymbol{A}t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\begin{bmatrix}-2\mathrm{e}^{t}+3\mathrm{e}^{2t} & 3\mathrm{e}^{t}-3\mathrm{e}^{2t}\\ -2\mathrm{e}^{t}+2\mathrm{e}^{2t} & 3\mathrm{e}^{t}-2\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}.$$

解 1(常数变易公式)　利用非齐次线性方程的常数变易公式

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\exp[(t-t_0)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^{t}\exp[(t-s)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$$

及积分公式(见[附录Ⅱ §3.3 -6(100)、(101)]),有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(t)&=\exp(t\boldsymbol{A})\boldsymbol{\eta}+\int_{0}^{t}\exp[(t-s)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s\\
&=\begin{bmatrix}(-2\eta_1+3\eta_2)\mathrm{e}^{t}+3(\eta_1-\eta_2)\mathrm{e}^{2t}\\(-2\eta_1+3\eta_2)\mathrm{e}^{t}+2(\eta_1-\eta_2)\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}+\\
&\quad\begin{bmatrix}\frac{1}{2}[-2(-\sin t-\cos t)-6(-\cos t+\sin t)]-4\mathrm{e}^{t}\\ +\frac{3}{5}[(-2\sin t-\cos t)+2(-2\cos t+\sin t)]+3\mathrm{e}^{2t}\\ \frac{1}{2}[-2(-\sin t-\cos t)-6(-\cos t+\sin t)]-4\mathrm{e}^{t}\\ +\frac{2}{5}[(-2\sin t-\cos t)+2(-2\cos t+\sin t)]+2\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\cos t-2\sin t+(-4-2\eta_1+3\eta_2)\mathrm{e}^{t}+3(1+\eta_1-\eta_2)\mathrm{e}^{2t}\\ 2\cos t-2\sin t+(-4-2\eta_1+3\eta_2)\mathrm{e}^{t}+2(1+\eta_1-\eta_2)\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

解 2(待定特解)　设特解为

$$\tilde{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\cos t+b\sin t\\c\cos t+d\sin t\end{bmatrix}.$$

代入方程组,有

$$\begin{bmatrix}-a\sin t+b\cos t\\-c\sin t+d\cos t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(4b-3d)\sin t+(4a-3c)\cos t\\(2b-d)\sin t+(2a-c)\cos t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\sin t\\-2\cos t\end{bmatrix}.$$

对比 $\cos t,\sin t$ 的同类项得

$$\begin{cases} -a=4b-3d+1, \\ \quad b=4a-3c, \\ -c=2b-d, \\ \quad d=2a-c-2. \end{cases}$$

有解 $a=1,b=-2,c=2,d=-2$. 特解为

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos t-2\sin t \\ 2\cos t-2\sin t \end{bmatrix}.$$

通解是

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}+\tilde{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} \mathrm{e}^t & 3\mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^t & 2\mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} \cos t-2\sin t \\ 2\cos t-2\sin t \end{bmatrix},$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

由初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$:

$$\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$$

得

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \eta_1-1 \\ \eta_2-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2\eta_1+3\eta_2-4 \\ \eta_1-\eta_2+1 \end{bmatrix},$$

即

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{bmatrix} \mathrm{e}^t & 3\mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^t & 2\mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2\eta_1+3\eta_2-4 \\ \eta_1-\eta_2+1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \cos t-2\sin t \\ 2\cos t-2\sin t \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos t-2\sin t+(-2\eta_1+3\eta_2-4)\mathrm{e}^t+3(\eta_1-\eta_2+1)\mathrm{e}^{2t} \\ 2\cos t-2\sin t+(-2\eta_1+3\eta_2-4)\mathrm{e}^t+2(\eta_1-\eta_2+1)\mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}.$$

7. 假设 m 不是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 试证非齐次线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}\mathrm{e}^{mt}$$

有一解形如 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{p}\mathrm{e}^{mt}$,其中 $\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{p}$ 是常数向量.

证 将解 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{p}\mathrm{e}^{mt}$ 代入方程组得 $m\boldsymbol{p}\mathrm{e}^{mt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}\mathrm{e}^{mt} + \boldsymbol{c}\mathrm{e}^{mt}$. 因 $\mathrm{e}^{mt} \neq 0$,上式可化为 $(m\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{p} = \boldsymbol{c}$. 因 m 不是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,即 $\det(m\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) \neq 0$,矩阵 $m\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 存在逆矩阵 $(m\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}$. 于是有解 $\boldsymbol{p} = (m\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{c}$,且当 $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ 时 $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$. 从而 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{p}\mathrm{e}^{mt}$ 是非齐次线性微分方程组 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}\mathrm{e}^{mt}$ 的解.

8. 给定方程组

$$\begin{cases} x_1'' - 3x_1' + 2x_1 + x_2' - x_2 = 0, \\ x_1' - 2x_1 + x_2' + x_2 = 0. \end{cases}$$

(1) 试证上面方程组等价于方程组 $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$,其中

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1' \\ x_2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix};$$

(2) 试求(1)中的方程组的基解矩阵;

(3) 试求原方程组满足初值条件

$$x_1(0) = 0, \ x_1'(0) = 1, \ x_2(0) = 0$$

的解.

解 (1) 方程组的第 1 式减去第 2 式可得

$$x_1'' - 4x_1' + 4x_1 - 2x_2 = 0, \ x_1'' = 4x_1' - 4x_1 + 2x_2.$$

令 $u_1 = x_1, u_2 = x_1', u_3 = x_2$ 时,由上式有

$$u_1' = x_1' = u_2, \ u_2' = x_1'' = 4x_1' - 4x_1 + 2x_2 = 4u_2 - 4u_1 + 2u_3.$$

而由方程组的第 2 式又有

$$u_3' = x_2' = -x_1' + 2x_1 - x_2 = -u_2 + 2u_1 - u_3.$$

于是

$$\boldsymbol{u}' = \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ -4u_1 + 4u_2 + 2u_3 \\ 2u_1 - u_2 - u_3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}.$$

(2) 方程组的特征方程为

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-4 & -2 \\ -2 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)=0.$$

有特征根 $\lambda=0,\lambda=1,\lambda=2$. 分别对应特征向量 $\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},\beta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\gamma\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

方程组 $\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ 的一个基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} 1 & 2e^t & e^{2t} \\ 0 & 2e^t & 2e^{2t} \\ 2 & e^t & 0 \end{bmatrix}.$$

(3) 对初值条件 $x_1(0)=0,x_1'(0)=1,x_2(0)=0$ 有

$$\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}=\boldsymbol{u}(0)=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases} \alpha+2\beta+\gamma=0, \\ 2\beta+2\gamma=1, \\ 2\alpha+\beta=0. \end{cases}$$

解得

$$\beta=-1,\alpha=\frac{1}{2},\gamma=\frac{3}{2}.$$

于是方程组满足初值条件的解为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}1 & 2e^t & e^{2t}\\ 0 & 2e^t & 2e^{2t}\\ 2 & e^t & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-2e^t+\frac{3}{2}e^{2t}\\ -2e^t+3e^{2t}\\ 1-e^t\end{bmatrix}.$$

原方程组满足初值条件的解为

$$x_1(t)=\frac{1}{2}-2e^t+\frac{3}{2}e^{2t},x_2(t)=1-e^t.$$

9. 试用拉普拉斯变换法解第 5 题和第 6 题,也可以利用计算机软件求解之.

解 5(1)**解 1** 记 $X_1(s)=\mathscr{L}[x_1(t)],X_2(s)=\mathscr{L}[x_2(t)]$,对方程组应用拉普拉斯变换

$$\begin{cases}sX_1(s)-3=X_1(s)+2X_2(s),\\ sX_2(s)-3=4X_1(s)+3X_2(s).\end{cases}$$

于是

$$\begin{cases}(s-1)X_1(s)-2X_2(s)=3,\\ -4X_1(s)+(s-3)X_2(s)=3.\end{cases}$$

解得

$$X_1(s)=\frac{3(s-1)}{s^2-4s-5}=\frac{2}{s-5}+\frac{1}{s+1},$$

$$X_2(s)=\frac{3(s+3)}{s^2-4s-5}=\frac{4}{s-5}-\frac{1}{s+1}.$$

经拉普拉斯反变换,有解$\begin{cases}x_1(t)=2e^{5t}+e^{-t},\\ x_1(t)=4e^{5t}-e^{-t}.\end{cases}$

解 2 记 $X_1(s)=\mathscr{L}[x_1(t)],X_2(s)=\mathscr{L}[x_2(t)],\boldsymbol{X}(s)=[X_1(s),X_2(s)]^{\mathrm{T}}$,对方程组应用拉普拉斯变换

$$s\boldsymbol{X}(s)-\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s),$$

$$(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s)=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix},$$

$$X(s)=(sE-A)^{-1}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}.$$

因

$$(sE-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s-1 & -2\\ -4 & s-3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{s-3}{(s+1)(s-5)} & \dfrac{2}{(s+1)(s-5)}\\ \dfrac{4}{(s+1)(s-5)} & \dfrac{s-1}{(s+1)(s-5)}\end{bmatrix},$$

有

$$X(s)=(sE-A)^{-1}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{3(s-1)}{(s+1)(s-5)}\\ \dfrac{3(s+3)}{(s+1)(s-5)}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{s-5}+\dfrac{1}{s+1}\\ \dfrac{4}{s-5}-\dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}.$$

施行拉普拉斯反变换得解

$$x(t)=\begin{bmatrix}2e^{5t}+e^{-t}\\ 4e^{5t}-e^{-t}\end{bmatrix}.$$

5(2) **提示** 拉普拉斯变换后方程变为

$$sX_1=X_1+3X_3,\ sX_2+2=8X_1+X_2-X_3,$$
$$sX_3+7=5X_1+X_2-X_3,$$

解得

$$X_1=-\frac{3(7s-5)}{s^3-s^2-15s-9},\ X_2=-\frac{2s^2-7s+143}{s^3-s^2-15s-9},$$
$$X_3=-\frac{7s^2-12s+5}{s^3-s^2-15s-9}.$$

施行拉普拉斯反变换得满足初值条件的解

$$
\begin{cases}
x_1 = \frac{13}{3}e^{-3t} - \frac{91+2\sqrt{7}}{42}e^{(2-\sqrt{7})t} - \frac{91-2\sqrt{7}}{42}e^{(2+\sqrt{7})t}, \\
x_2 = -\frac{91}{9}e^{-3t} + \frac{511+374\sqrt{7}}{126}e^{(2-\sqrt{7})t} + \frac{511-374\sqrt{7}}{126}e^{(2+\sqrt{7})t}, \\
x_3 = -\frac{52}{9}e^{-3t} - \frac{77-89\sqrt{7}}{126}e^{(2-\sqrt{7})t} - \frac{77+89\sqrt{7}}{126}e^{(2+\sqrt{7})t}.
\end{cases}
$$

5(3) **提示** 拉普拉斯变换后方程变为

$$sX_1 - 1 = X_1 + 2X_2 + X_3,$$

$$sX_2 = X_1 - X_2 + X_3,\ sX_3 = 2X_1 + X_3,$$

解得

$$X_1 = \frac{s-1}{s^2-2s-3},\ X_2 = \frac{1}{s^2-2s-3},\ X_3 = \frac{2}{s^2-2s-3}.$$

施行拉普拉斯反变换得解

$$x_1 = \frac{1}{2}(e^{3t}+e^{-t}),\ x_2 = \frac{1}{4}(e^{3t}-e^{-t}),\ x_3 = \frac{1}{2}(e^{3t}-e^{-t}).$$

6(1) **提示** 拉普拉斯变换后方程变为

$$sX_1 + 1 = X_1 + 2X_2 + \frac{1}{s-1},\ sX_2 - 1 = 4X_1 + 3X_2 + \frac{1}{s}.$$

解得

$$X_1 = -\frac{s^3-7s^2+6s+2}{s(s^3-5s^2-s+5)},\ X_2 = -\frac{-s^3+5s^2-7s-1}{s(s^3-5s^2-s+5)}.$$

施行拉普拉斯反变换得解

$$x_1 = \frac{3}{20}e^{5t} - \frac{1}{4}e^{t} - e^{-t} - \frac{2}{5},\ x_2 = \frac{3}{10}e^{5t} + \frac{1}{2}e^{t} - e^{-t} + \frac{1}{5}.$$

6(2) **提示** 拉普拉斯变换后方程变为

$$sX_1 = X_2,\ sX_2 = X_3,\ sX_3 = -6X_1 - 11X_2 - 6X_3 + \frac{1}{s+1}.$$

解得

$$X_1 = \frac{1}{(1+s)^2(s^2+5s+6)},\ X_2 = \frac{s}{(1+s)^2(s^2+5s+6)},$$

$$X_3 = \frac{s^2}{(1+s)^2(s^2+5s+6)}.$$

施行拉普拉斯反变换得解

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{4}e^{-3t} + e^{-2t} + \frac{2t-3}{4}e^{-t}, \\ x_2 = \frac{3}{4}e^{-3t} - 2e^{-2t} + \frac{-2t+5}{4}e^{-t}, \\ x_3 = -\frac{9}{4}e^{-3t} + 4e^{-2t} + \frac{2t-7}{4}e^{-t}. \end{cases}$$

6(3) **提示** 拉普拉斯变换后方程变为

$$sX_1 - \eta_1 = 4X_1 - 3X_2 + \frac{1}{s^2+1},$$

$$sX_2 - \eta_2 = 2X_1 - X_2 - \frac{2s}{s^2+1}.$$

解得

$$X_1 = -\frac{-s^3\eta_1 + s^2(-\eta_1 + 3\eta_2) + s(-\eta_1 - 7) + 3\eta_2 - 1 - \eta_1}{(s^2+1)(s^2-3s+2)},$$

$$X_2 = -\frac{-s^3\eta_2 + s^2(-2\eta_1 + 4\eta_2 + 2) + s(-\eta_2 - 8) + 4\eta_2 - 2 - 2\eta_1}{(s^2+1)(s^2-3s+2)}.$$

施行拉普拉斯反变换得解

$$x_1 = -(4 + 2\eta_1 - 3\eta_2)e^t + 3(1 + \eta_1 - \eta_2)e^{2t} + \cos t - 2\sin t,$$

$$x_2 = -(4 + 2\eta_1 - 3\eta_2)e^t + 2(1 + \eta_1 - \eta_2)e^{2t} + 2\cos t - 2\sin t.$$

10. 求下列初值问题的解：

(1) $\begin{cases} x_1' + x_2' = 0, \\ x_1' - x_2' = 1. \\ x_1(0) = 1, x_2(0) = 0. \end{cases}$

解 1 第 1 式加或减去第 2 式再积分可得

$$x_1' = \frac{1}{2},\ x_1(t) = \frac{1}{2}t + c_1;\ x_2' = -\frac{1}{2},\ x_2(t) = -\frac{1}{2}t + c_2,$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. 将初值条件代入知

$$x_1(0)=c_1=1; x_2(0)=c_2=0.$$

初值问题的解为

$$x_1(t)=\frac{1}{2}t+1,\ x_2(t)=-\frac{1}{2}t.$$

解 2 记 $X_1(s)=\mathscr{L}[x_1(t)]$, $X_2(s)=\mathscr{L}[x_2(t)]$，对方程组施行拉普拉斯变换

$$\begin{cases} sX_1(s)-1+sX_2(s)=0, \\ sX_1(s)-1-sX_2(s)=\dfrac{1}{s}. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} X_1(s)=\dfrac{1}{2s^2}+\dfrac{1}{s}, \\ X_2(s)=-\dfrac{1}{2s^2}. \end{cases}$$

再对其施行拉普拉斯反变换

$$\begin{cases} x_1(t)=\dfrac{1}{2}t+1, \\ x_2(t)=-\dfrac{1}{2}t. \end{cases}$$

(2) $\begin{cases} x_1''+3x_1'+2x_1+x_2'+x_2=0, \\ x_1'+2x_1+x_2'-x_2=0, \\ x_1(0)=1, x_1'(0)=-1, x_2(0)=0. \end{cases}$

解 1（求特征向量） 令 $u_1=x_1, u_2=x_1', u_3=x_2$. 方程组的第 1 式减去第 2 式可得

$$x_1''+2x_1'+2x_2=0,\ x_1''=-2x_1'-2x_2,$$

即

$$u_1'=x_1'=u_2,\ u_2'=x_1''=-2x_1'-2x_2=-2u_2-2u_3.$$

则由方程组的第 2 式又有

$$u_3' = x_2' = -x_1' - 2x_1 + x_2 = -u_2 - 2u_1 + u_3.$$

于是

$$\boldsymbol{u}' = \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ -2u_2 - 2u_3 \\ -u_2 - 2u_1 + u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}.$$

方程组的特征方程为

$$\det(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 & 2 \\ 2 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0.$$

有特征根 $\lambda = -1, \lambda = -2, \lambda = 2$. 对应特征根有特征向量$\alpha \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$\beta \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$,其中 α, β, γ 为任意非零常数.

于是方程组的一个基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} & e^{-2t} & e^{2t} \\ -2e^{-t} & -2e^{-2t} & 2e^{2t} \\ e^{-t} & 0 & -4e^{2t} \end{bmatrix}.$$

对初值条件 $x_1(0) = u_1(0) = 1, x_1'(0) = u_2(0) = -1, x_2(0) = u_3(0) = 0$ 有

$$\boldsymbol{\Phi}(0)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{\Phi}(0)\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{u}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta+\gamma=1, \\ -2\alpha-2\beta+2\gamma=-1, \\ \alpha-4\gamma=0. \end{cases}$$

解得

$$\alpha=\frac{1}{3},\gamma=\frac{1}{12},\beta=\frac{1}{4}.$$

于是方程组满足初值条件的解为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix} 2e^{-t} & e^{-2t} & e^{2t} \\ -2e^{-t} & -2e^{-2t} & 2e^{2t} \\ e^{-t} & 0 & -4e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{12}e^{2t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{6}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{2t} \end{bmatrix}.$$

原方程组满足初值条件的解为

$$x_1(t)=\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{12}e^{2t},\ x_2(t)=\frac{1}{3}(e^{-t}-e^{2t}).$$

解 2（求 $\exp(\boldsymbol{A}t)$）　解 1 求得基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 后，进一步有

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 8 & 4 & 4 \\ -6 & -9 & -6 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

于是

$$\exp(\boldsymbol{A}t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)$$

$$=\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 16e^{-t}-6e^{-2t}+2e^{2t} & 8e^{-t}-9e^{-2t}+e^{2t} & * \\ -16e^{-t}+12e^{-2t}+4e^{2t} & -8e^{-t}+18e^{-2t}+2e^{2t} & * \\ 8e^{-t}-8e^{2t} & 4e^{-t}-4e^{2t} & * \end{bmatrix}.$$

解得

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\exp(\boldsymbol{A}t)\boldsymbol{\eta}=\exp(\boldsymbol{A}t)\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}8e^{-t}+3e^{-2t}+e^{2t}\\-8e^{-t}-6e^{-2t}+2e^{2t}\\4e^{-t}-4e^{2t}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{12}e^{2t}\\-\frac{2}{3}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{6}e^{2t}\\\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{2t}\end{bmatrix}.$$

原方程组满足初值条件的解为

$$x_1(t)=\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{12}e^{2t},\ x_2(t)=\frac{1}{3}(e^{-t}-e^{2t}).$$

解 3（拉普拉斯变换） 记 $X_1(s)=\mathscr{L}[x_1(t)]$，$X_2(s)=\mathscr{L}[x_2(t)]$，对方程组应用拉普拉斯变换得

$$\begin{cases}(s+1)(s+2)X_1(s)+(s+1)X_2(s)=s+2,\\(s+2)X_1(s)+(s-1)X_2(s)=1.\end{cases}$$

解得

$$[(s-1)(s+1)(s+2)-(s+1)(s+2)]X_1(s)=(s+2)(s-1)-(s+1),$$

$$X_1(s)=\frac{s^2-3}{(s+1)(s+2)(s-2)}=\frac{s^2-4+1}{(s+1)(s+2)(s-2)}$$

$$=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)(s+2)(s-2)}$$

$$=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{s-2}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{s-2},$$

及

$$X_1(s)=\frac{s^2-3}{(s+1)(s+2)(s-2)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{s-2},$$

$$X_2(s)=-\frac{1}{(s+1)(s-2)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s-2}.$$

对其施行拉普拉斯反变换得

$$x_1(s)=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{12}\mathrm{e}^{2t},\ x_2(s)=\frac{1}{3}(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{2t}).$$

(3) $\begin{cases}x_1''-m^2x_2=0,\\ x_2''+m^2x_1=0,\\ x_1(0)=\eta_1,x_1'(0)=\eta_2,x_2(0)=\eta_3,x_2'(0)=\eta_4.\end{cases}$

解 记 $X_1(s)=\mathscr{L}[x_1(t)]$,$X_2(s)=\mathscr{L}[x_2(t)]$,对方程组应用拉普拉斯变换得

$$\begin{cases}s^2X_1(s)-s\eta_1-\eta_2-m^2X_2(s)=0,\\ s^2X_2(s)-s\eta_3-\eta_4+m^2X_1(s)=0.\end{cases}$$

可解出

$$\begin{aligned}X_1(s)&=\frac{1}{s^4+m^4}(s^3\eta_1+s^2\eta_2+sm^2\eta_3+m^2\eta_4)\\&=\frac{s^3\eta_1+s^2\eta_2+sm^2\eta_3+m^2\eta_4}{(s^2-\sqrt{2}ms+m^2)(s^2+\sqrt{2}ms+m^2)}\\&=\frac{A\left(s-\frac{m}{\sqrt{2}}\right)+B\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)}{\left(s-\frac{m}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{C\left(s+\frac{m}{\sqrt{2}}\right)+D\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)}{\left(s+\frac{m}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_2(s)&=\frac{1}{s^4+m^4}(s^3\eta_1+s^2\eta_2-sm^2\eta_3-m^2\eta_4)\\&=\frac{s^3\eta_1+s^2\eta_2-sm^2\eta_3-m^2\eta_4}{(s^2-\sqrt{2}ms+m^2)(s^2+\sqrt{2}ms+m^2)}\\&=\frac{B\left(s-\frac{m}{\sqrt{2}}\right)-A\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)}{\left(s-\frac{m}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{-D\left(s+\frac{m}{\sqrt{2}}\right)+C\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)}{\left(s+\frac{m}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)^2},\end{aligned}$$

其中

$$A=\frac{1}{2}\eta_1+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4,\ B=\frac{1}{2}\eta_3+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4,$$

$$C=\frac{1}{2}\eta_1-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4,\ D=-\frac{1}{2}\eta_3+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4.$$

施行拉普拉斯反变换可得

$$\begin{cases} x_1(t)=\left(A\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t+B\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t\right)e^{\frac{m}{\sqrt{2}}t}+\left(C\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t+D\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t\right)e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}t}, \\ x_2(t)=\left(B\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t-A\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t\right)e^{\frac{m}{\sqrt{2}}t}+\left(-D\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t+C\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t\right)e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}t}. \end{cases}$$

11．假设 $y=\varphi(x)$ 是二阶常系数线性微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''+ay'+by=0, \\ y(0)=0, y'(0)=1 \end{cases}$$

的解，试证

$$y=\int_0^x \varphi(x-t)f(t)\,dt$$

是方程

$$y''+ay'+by=f(x)$$

的解，这里 $f(x)$ 为已知连续函数.

证 1 对 $y=\int_0^x \varphi(x-t)f(t)\,dt$，利用积分号下求导数定理及初始条件有

$$y'=\int_0^x \varphi'(x-t)f(t)\,dt,$$

$$y''=f(x)+\int_0^x \varphi''(x-t)f(t)\,dt,$$

及 $\varphi''(x)+a\varphi'(x)+b\varphi(x)\equiv 0$，于是

$$y''+ay'+by=f(x)+\int_0^x[\varphi''(s)+a\varphi'(s)+b\varphi(s)]f(x-s)\,ds=f(x).$$

这证明了 $y=\int_0^x \varphi(x-t)f(t)\,dt$ 是方程 $y''+ay'+by=f(x)$ 的解.

证 2 令 $z_1=y, z_2=y'$. 它有矩阵形式

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{z}'=\begin{bmatrix}z_1'\\z_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z_2\\-az_2-bz_1+f(x)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1\\-b&-a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\f(x)\end{bmatrix}.$$

齐次方程 $y''+ay'+by=0$ 对应

$$\boldsymbol{z}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\-b&-a\end{bmatrix}.$$

方程有标准基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(x)=\exp(\boldsymbol{A}x)$. 由初始条件及解的唯一性定理知

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\exp(\boldsymbol{A}x)=\begin{bmatrix}\psi(x)&\varphi(x)\\\psi'(x)&\varphi'(x)\end{bmatrix}.$$

于是

$$\boldsymbol{z}=\int_0^x\exp\boldsymbol{A}(x-t)\cdot\begin{bmatrix}0\\f(t)\end{bmatrix}\mathrm{d}t=\int_0^x\begin{bmatrix}\varphi(x-t)f(t)\\\varphi'(x-t)f(t)\end{bmatrix}\mathrm{d}t$$

$$=\begin{bmatrix}\int_0^x\varphi(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t\\\int_0^x\varphi'(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t\end{bmatrix}.$$

即 $z_1=y=\int_0^x\varphi(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ 是方程的一个解.

第六章　非线性微分方程

§6.1　内 容 提 要

§6.1.1　稳定性

（1）**非线性常微分方程组的存在唯一性定理**　高阶微分方程

$$z^{(n)}=g(t,z,z',\cdots,z^{(n-1)})$$

可以通过变换 $x_1=z,x_2=z',\cdots,x_n=z^{(n-1)}$ 化为一阶常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=f_i(t,x_1,\cdots,x_n),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

上式可写成向量形式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}).\qquad ①$$

方程组①的初值条件为

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0.\qquad ②$$

考虑包含点$(t_0,\boldsymbol{x}_0)$的某区域

$$R:|t-t_0|\leqslant a,\ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|\leqslant b,$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 的范数 $\|\boldsymbol{x}\|$ 定义为 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$. $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 在域 G 上关于 $\boldsymbol{x}$ 满足局部利普希茨条件是指:对 G 内任一点$(t_0,\boldsymbol{x}_0)$,存在闭邻域 $R\subset G$,使 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 在域 R 上关于 $\boldsymbol{x}$ 满足利普希茨条件,即存在常数 $L>0$ 满足

$$\|\boldsymbol{f}(t,\tilde{\boldsymbol{x}})-\boldsymbol{f}(t,\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}})\|\leqslant L\|\tilde{\boldsymbol{x}}-\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}\|,\quad (t,\tilde{\boldsymbol{x}}),(t,\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}})\in R,$$

L 称为利普希茨常数.

当 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 在域 G 内连续且 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 存在,则 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 在 G 上关于 $\boldsymbol{x}$ 满足局部利普希茨条件.

存在唯一性定理 若 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 在域 R 内连续,且关于 $\boldsymbol{x}$ 满足局部利普希茨条件,则方程组①在区间 $|t-t_0|\leqslant h$ 上存在唯一解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$,且 $\boldsymbol{\varphi}(t_0,t_0,\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0$,其中

$$h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right),\quad M=\max_{(t,x)\in R}\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\|.$$

解的延拓与连续性定理 若 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 在域 G 内连续且关于 $\boldsymbol{x}$ 满足局部利普希茨条件,则方程组①的满足初值条件②的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)((t_0,\boldsymbol{x}_0)\in G)$ 可以延拓,或者延拓到 $+\infty$(或 $-\infty$);或者延拓到使点 $(t,\boldsymbol{\varphi}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0))$ 任意接近 G 的边界. 而方程组①的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 作为 $t,t_0,\boldsymbol{x}_0$ 的函数在它的存在范围内是连续的.

可微性定理 若 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 和 $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}$ 在域 G 内连续,则方程组①的满足初值条件②的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 作为 $t,t_0,\boldsymbol{x}_0$ 的函数在它的存在范围内是连续可微的.

(2) **李雅普诺夫稳定性**

(a) **零解** 对方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{y})$ 的某特解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t)$,可以通过变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\varphi}(t)$ 化为方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}),\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{0})\equiv\boldsymbol{0},\tag{③}$$

其中 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{y})-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varphi}(t))-\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{\varphi}(t))$. 即 $\boldsymbol{y}$ 的方程的特解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 变为 $\boldsymbol{x}$ 的方程组③的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

(b) **稳定性** 假设方程组③的右端函数 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 在包含原点的域 G 内有连续的偏导数,从而满足方程组的解的存在唯一性、延拓、连续性和可微性条件.

如果对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$,使当任一 $\boldsymbol{x}_0$满足 $\|\boldsymbol{x}_0\|\leqslant\delta$ 时,方程组③的由初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$确定的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 对一切 $t\geqslant t_0$均有 $\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant\varepsilon$,则称方程组③的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是稳定的.

如果方程组③的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 稳定,且存在 $\delta_0>0$,使当 $\|\boldsymbol{x}_0\|\leqslant\delta_0$时,满足初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 均有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}$,则称零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是渐近稳定的.

如果零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 渐近稳定,且存在域 D_0,当且仅当 $x_0\in D_0$时,满足初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 均有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}$,则域 D_0称为(渐近)稳定域或吸引域. 若稳定域为全空间,即 $\delta_0=+\infty$,则称零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是全局渐近稳定的或简称为全局稳定的.

当零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 不是稳定的时,称它是不稳定的,即如果对某个给定的 $\varepsilon>0$,不管 $\delta>0$ 怎样小,总有 $\boldsymbol{x}_0$满足 $\|\boldsymbol{x}_0\|\leqslant\delta$,使方程组③的由初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$确定的解 $\boldsymbol{x}(t)$,至少存在某个 $t_1>t_0$有 $\|\boldsymbol{x}(t_1)\|=\varepsilon$.

(3) **按线性近似决定稳定性** 考虑非线性驻定微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}. \tag{④}$$

右端函数满足条件

$$\lim_{\|x\|\to0}\frac{\|\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|}=0. \tag{⑤}$$

显然,方程组④有零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

满足条件⑤的非线性微分方程组④在零点附近的线性近似微分方程组为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \tag{⑥}$$

线性微分方程组的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=0. \tag{⑦}$$

定理 若特征方程没有零根或零实部特征根(特征值),则非

线性方程组④的零解的稳定性态与其线性近似方程组⑥的零解的稳定性态一致：当特征方程⑦的根均具有负实部（包括负根）时，方程组④的零解是渐近稳定的；当特征方程⑦具有正实部根（包括正根）时，方程组④的零解是不稳定的.

若特征方程有零根或零实部特征根时，方程组④属临界情形，其零解的稳定性态不能由其线性近似方程组⑥的零解的稳定性态决定，需考虑高次项 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$ 的影响.

（4）**赫尔维茨判别法**　n 次常系数代数方程

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,\ a_0 > 0 \qquad ⑧$$

的赫尔维茨行列式定义为

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \cdots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_n\Delta_{n-1},$$

其中 $a_i = 0$（对一切 $i > n$）.

赫尔维茨定理　方程⑧的一切根均具有负实部的充要条件为成立不等式

$$a_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \cdots, \Delta_{n-1} > 0, a_n > 0.$$

§6.1.2　V 函数方法

（1）**V 函数**　考虑 n 维一阶非线性驻定微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}, \qquad ①$$

其中 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在域 G：$\|\boldsymbol{x}\| \leqslant A$（$A$ 为正常数）内有连续的偏导数，从而方程组在域 G 内满足初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ 的解在原点的某邻域

内存在且唯一. 显然,$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是其特解.

假设 $V(\boldsymbol{x})$ 为在域 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H$ 内定义的实连续可微函数, $V(\mathbf{0})=0$. 若在域内恒有 $V(\boldsymbol{x})\geqslant 0$,则称 V 为常正的;若在域内当 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ 时有 $V(\boldsymbol{x})>0$,则称 V 为定正的;若 $-V$ 是定正(或常正)的,则称 V 为定负(或常负)的.

当 $V(\boldsymbol{x})$ 对所有变元的偏导数存在且连续时,可将方程组①的解代入,再对 t 求导得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\cdot\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\cdot f_i\equiv\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{f}.$$

此导数$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$称为 $V(\boldsymbol{x})$ 通过方程组①的全导数. 可简写为 V'或 $\dot{V}$.

(2) **李雅普诺夫定理** 如果对微分方程组①存在定正函数 $V(\boldsymbol{x})$,其通过方程组①的全导数为常负函数或恒为零,则方程组①的零解是稳定的.

如果存在定正函数 $V(\boldsymbol{x})$ 通过方程组①的全导数为定负时,则方程组①的零解是渐近稳定的.

如果存在函数 $V(\boldsymbol{x})$ 和某非负常数 μ,其通过方程组①的全导数$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$可表为$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\mu V+W(\boldsymbol{x})$,且当 $\mu=0$ 时 W 为定正函数,当 $\mu\neq 0$ 时 W 为常负函数或恒为零,又在 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的任意小邻域内至少存在某个 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 使得 $V(\tilde{\boldsymbol{x}})>0$,则方程组①的零解是不稳定的.

(3) **二次型 V 函数的构造** 如果 n 维一阶常系数线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \qquad ②$$

的特征根 λ_i 均不满足关系式 $\lambda_i+\lambda_j=0\ (i,j=1,\cdots,n)$,则对任何负定(或正定)对称矩阵 $\boldsymbol{C}$,存在唯一的二次型

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\quad(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}),$$

使其通过方程组①的全导数有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\quad(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}),$$

且对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足关系式

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}.$$

§6.1.3 奇点

平面驻定微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=X(x,y),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Y(x,y),\end{cases}\qquad ①$$

其中 X,Y 对 x,y 有连续偏导数. 方程组①的解 $x=x(t),y=y(t)$ 在欧几里得空间表示一曲线,称为**积分曲线**. x,y 平面 Oxy 称为**相平面**,积分曲线在相平面上的投影称为**轨线**. 满足 $X(x,y)=0$, $Y(x,y)=0$ 的常数 $x=x^*,y=y^*$ 为方程组①的解,称为**驻定解**(或常数解),相平面 Oxy 上的点(x^*,y^*)称为方程组的**奇点**.

通过线性变换可将方程组①的奇点移至 Oxy 的原点上,再取其线性项则得方程组①的线性近似方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax+by,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=cx+dy.\end{cases}\qquad ②$$

线性方程组②的特征方程为

$$\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

即 $\lambda^2+p\lambda+q=0$,其中

$$p=-(a+d),q=ad-bc,\Delta=p^2-4q.\qquad ③$$

可以通过方程组②的系数与特征方程的系数关系③,表示相平面 Oxy 上奇点(原点)附近的轨线图貌,即奇点的类型,如图 6.1:

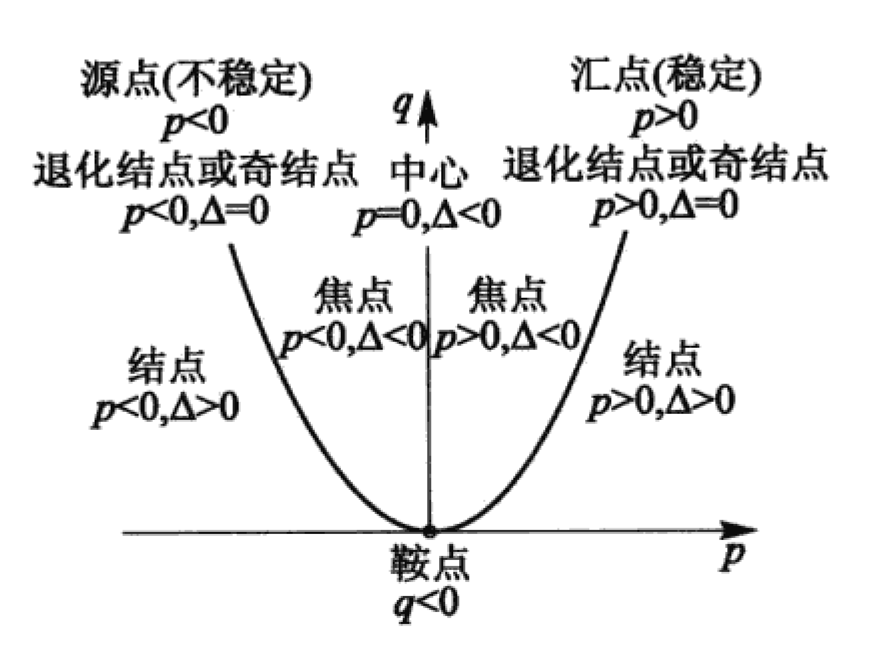


图 6.1　奇点类型

(1) $q \neq 0$

(a) $q<0$:有两不同符号实根,奇点为**鞍点**.

(b1) $q>0, p^2-4q<0, p>0$:有两负实根,奇点为**稳定结点**.

(b2) $q>0, p^2-4q<0, p<0$:有两正实根,奇点为**不稳定结点**.

(c1) $q>0, p^2-4q=0, p>0$:有一重负实根,奇点为**稳定退化结点或奇结点**.

(c2) $q>0, p^2-4q=0, p<0$:有一重正实根,奇点为**不稳定退化结点或奇结点**.

(d1) $q>0, p^2-4q>0, p>0$:有一对负实部共轭复根,奇点为**稳定焦点**.

(d2) $q>0, p^2-4q>0, p<0$:有一对正实部共轭复根,奇点为**不稳定焦点**.

(e) $q>0, p=0$:有一对(零实部)共轭虚根,奇点为**中心**.

(2) $q=0$

(a1) $p>0$:有单零根和负实根,过奇点有**稳定奇线**.

(a2) $p<0$：有单零根和正实根，过奇点有**不稳定奇线**.

(b) $p=0$：有重零根，过奇点有**奇线**，奇线上下有不同走向的平行轨线.

(c) $a=b=c=d=0$：奇点充满全平面.

§6.1.4 极限环和平面图貌

(1) **极限环** 考虑平面驻定微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=X(x,y),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Y(x,y),\end{cases} \quad ①$$

其中 X,Y 在相平面的某区域 G 内有一阶连续偏导数. 方程组①在相平面上有孤立的周期解(闭轨线)，且附近的轨线均趋于(或离开)该闭轨线时，称此闭轨线为**稳定(或不稳定)极限环**，如附近的轨线一边趋于而另一边离开该闭轨线时，则称此闭轨线为**半稳定极限环**.

环域定理 如果 G 内存在有界的环形闭域 D，在其内不含方程组①的奇点，而①的经过 D 上的点的解(轨线) $x=x(t)$，$y=y(t)$ 当 $t\geqslant t_0$(或 $t\leqslant t_0$)时不离开域 D. 则或者解本身是周期解(闭轨线)，或者解正向(或负向)趋于 D 内的某一周期解(闭轨线).

定理 如果 G 内存在单连通区域 D^*，在其内函数 $\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}$ 不变号且在 D^* 的任何子域内不恒为零，则方程组①在域 D^* 内不存在任何周期解(闭轨线)，更不存在任何极限环.

在相平面分析中除奇点和极限环两种特殊轨线外，还有一种从奇点到奇点的轨线，这类轨线称为**分界线**. 如果一条分界线与一个奇点构成一个环，则称为**同宿环(轨)**. 如果一条分界线两端是不同奇点，则分界线称为**异宿轨**. 当多条分界线与多个奇点构成一个环时则称此环为**异宿环**.

（2）**李纳(Liénard)方程**

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)\frac{dx}{dt}+g(x)=0. \quad ②$$

记 $F(x)=\int_0^x f(x)dx, y=\frac{dx}{dt}+F(x)$，方程②可化为方程组

$$\frac{dx}{dt}=y-F(x), \frac{dy}{dt}=-g(x). \quad ③$$

定理 假设

(a) $f(x), g(x)$ 对一切 x 连续，$g(x)$ 满足局部利普希茨条件；

(b) $f(x)$ 为偶函数，$f(0)<0$，$g(x)$ 为奇函数，当 $x\neq 0$ 时 $xg(x)>0$；

(c) 当 $x\to\pm\infty$ 时 $F(x)\to\pm\infty$，$F(x)$ 有唯一正零点 $x=a$，且当 $x\geqslant a$ 时 $F(x)$ 单调增加.

则方程②有唯一周期解，即方程组③有一个稳定极限环.

（3）**平面图貌** 对平面驻定方程组①，在相平面上曲线 $X(x,y)=0, Y(x,y)=0$ 分别表示轨线的垂直等倾斜线和水平等倾斜线. 可利用垂直等倾斜线和水平等倾斜线划分出相平面上的不同区域，使每一区域内轨线的 x,y 方向的右、左及上、下走向是一致的，有(+,+)，(+,-)，(-,+)，(-,-)四种走向，其中括号内第一个+表向右、-表向左，第二个+表向上、-表向下. 应用**等倾斜线方法**可画出方程组①的平面轨线图貌.

可以用等倾斜线方法分析两种群模型

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=rx(1-ax-by),\\ \frac{dy}{dt}=sy(1-cx-dy),\end{cases}$$

其中 r,a 和 s,d 均为正常数. 而 $b>0,c>0$ 时为竞争系统，$b>0,c<0$ 或 $b<0,c>0$ 时为被捕食-捕食系统，$b<0,c<0$ 时则为共生系统.

*(4) 对一般的两种群竞争系统

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=M(x,y)x,\\[2mm]
\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=N(x,y)y,
\end{cases}
\tag{④}
$$

其中 x 与 y 的相对增长率 M 与 N 都是非负变量 x,y 的连续函数，有连续一阶偏导数，且一种群增长时另一种群的增长率下降，即

$$
\frac{\partial M}{\partial y}<0,\quad \frac{\partial N}{\partial x}<0.
$$

而任一种群过多时两种群都不能增长，即存在常数 $K>0$，当 $x\geqslant K$ 或 $y\geqslant K$ 时 $M(x,y)\leqslant 0$ 且 $N(x,y)\leqslant 0$. 还设只有一种群时，它将按极限增长，即存在常数 $a>0,b<0$ 使得

当 $x<a$ 时 $M(x,0)>0$；当 $x>a$ 时 $M(x,0)<0$；

当 $y<b$ 时 $N(0,y)>0$；当 $y>b$ 时 $N(0,y)<0$.

在上述条件下，可以通过分析相平面上等倾斜线曲线 $M(x,y)=0$ 和 $N(x,y)=0$ 的形状及它们之间的关系，得到

定理 两种群竞争一般模型④的每一条轨线，当 $t\to+\infty$ 时都趋于有限个平衡点之一.

* §6.1.5 分支与混沌

考虑含参数的常微分方程

$$
\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{R}^m,\dot{\boldsymbol{x}}\equiv\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\boldsymbol{f}\in\mathbf{C}^r,
\tag{①}
$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}$ 为参数. 当参数变化时方程的解特别是平衡解的个数和性态是否发生变化，即方程是否结构稳定. 这便是微分方程解的**分支**（亦称**分歧**、**分岔**）**问题**. 相对于某参数值 $\boldsymbol{\lambda}$，方程①不是结构稳定时称此方程为分支方程，对应的参数值 $\boldsymbol{\lambda}$ 称为分支值.

（1）**单参数一维常微分方程**，有如下几种典型的分支类型：

（a）鞍结点分支　$\dot{x}=\lambda-x^2$；

（b）跨临界分支　$\dot{x}=\lambda x-x^2$；

（c）叉式分支　$\dot{x}=\lambda x-x^3$；

（d）复合分支 $\dot{x}=\lambda+3x-x^3$.

（2）**单参数平面常微分方程**的典型的分支类型

（a）平面鞍结点分支 $\begin{cases}\dot{x}=\lambda-x^2,\\ \dot{y}=-y;\end{cases}$

（b）霍普夫(Hopf)分支 $\begin{cases}\dot{x}=\lambda x-y-x(x^2+y^2),\\ \dot{y}=x+\lambda y-y(x^2+y^2);\end{cases}$

（c）同宿分支 $\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=x-x^2+\lambda y\end{cases}$ 及 $\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=x-x^2+\lambda y+xy;\end{cases}$

（d）异宿分支 $\begin{cases}\dot{x}=\lambda+x^2-xy,\\ \dot{y}=y^2-x^2-1;\end{cases}$

（3）**洛伦茨**(Lorenz)**方程**

$$\begin{cases}\dot{x}=a(y-x),\\ \dot{y}=cx-xz-y,\\ \dot{z}=xy-bz,\end{cases} \qquad ②$$

其中参数 a,b,c 均为正数. 洛伦茨方程有如下性质：

（a）对称性. 方程关于 z 轴对称.

（b）z 轴是不变集且轨线沿着 z 轴趋于原点. 环绕 z 轴的轨线从平面 $x=0$ 的上方看是逆时针方向旋转的.

（c）耗散性和吸引性. 洛伦茨方程是耗散系统(相空间容积 U 收缩). 解有界且轨线最终被吸引到一个体积为零的较低维的集合内.

*（d）参数 a,b,c 变化时轨线性态. 当 $0<c<1$ 时，原点 $S_0=(0,0,0)$ 是洛伦茨方程的唯一平衡点，原点 S_0 是全局渐近稳定的.

当 $c>1$ 时，除原点 S_0 外还出现两个异于原点的平衡点 S_+，S_-，平衡点 S_+，S_- 渐近稳定的条件是

$a<b+1,1<c$ 或 $a>b+1,1<c<c_0$,

其中 $c_0=\dfrac{a(a+b+3)}{a-b-1}$;

当 $c=c_0>1$ 时，特征方程有一对共轭纯虚根，出现霍普夫分支；

当 $c>c_0>1$ 时，特征方程除一负实根外有一对正实部的共轭复特征根，平衡点为鞍焦点.

（e）固定参数 $a=10, b=\frac{8}{3}$. 此时 $c_0=24.7368$. 当 $0<c<1$ 时，洛伦茨方程的所有轨线均趋于原点；当 $c>1$ 时，存在原点 S_0 和平面 $z=c-1$ 上 S_+, S_- 三个平衡点；当 $1<c<c_0$ 时，平衡点 S_+, S_- 是稳定的；当 $c>c_0$ 时，平衡点 S_+, S_- 不稳定，属鞍焦点.

（f）取参数 c 的不同值，我们可以通过数值解画出洛伦茨方程在相空间的轨线图貌. 当 $1.346<c<13.926$ 时，由原点出发的两条轨线各自分别趋于两平衡点 S_+, S_-；在 $c=13.926$ 处，出现同宿轨；当 $13.926<c<c_0$ 时，出现由原点出发的两条轨线各自分别绕过一平衡点趋于另一平衡点，并在相空间中可能存在闭轨线或其他复杂轨线；当 $c>c_0$ 时，相空间中的轨线非常复杂，往往反复地无限循环，始终既不趋向平衡点 S_+ 也不趋向平衡点 S_-，永远在平衡点 S_+ 和 S_- 之间摆动. 而且绕各平衡点旋转次数及平衡点之间摆动次数根据参数轨线初始位置不同而不同，根本无法预测，对初值非常敏感.

（4）**混沌** 洛伦茨方程出现的这种轨线的极限集是在一有限区内的吸引集，但与通常了解的吸引集不同，既不是平衡点也不是极限环或周期变化的点集. 这种吸引集称为**奇异吸引子**（或**奇怪吸引子**）. 奇异吸引子还有对初值敏感的特性，存在奇异吸引子这种复杂现象又称为**混沌**（或**浑沌**）.

* §6.1.6 哈密顿系统

（1）**哈密顿函数** 哈密顿方程可表示为

$$\dot{\boldsymbol{p}}=-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \qquad ①$$

其中$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=(p_1,p_2,\cdots,p_n,q_1,q_2,\cdots,q_n)$为系统的 n 对共轭变量(正则变量). $\boldsymbol{p}$ 称为系统的**广义坐标**,$\boldsymbol{q}$ 称为**广义动量**,H 称为**哈密顿函数**或能量函数. 哈密顿方程①亦称为哈密顿方程 H. 如记 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$,$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & -\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,则①式可简写为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{J}\nabla_x H$,这里 ∇_x 为梯度向量.

设 $H=H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ 不显含 t. 此时系统构成相空间$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$中的向量场$\left(-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}},\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\right)$. 哈密顿方程①有如下性质:

性质 1 哈密顿函数 H 是哈密顿方程①的首次积分,$H(\boldsymbol{p}(t),\boldsymbol{q}(t))=c$.

性质 2(刘维尔保积定理) 哈密顿方程是保守系统. 相空间中任何区域 U 沿着哈密顿方程轨线变化其体积保持不变. 二维相平面上哈密顿方程轨线为闭曲线族,不存在渐近稳定平衡点和渐近稳定极限环.

性质 3(庞加莱回归定理) 空间中任一点 $\boldsymbol{x}_0$ 的任一邻域 U,必存在 $\boldsymbol{x}\in U$,使得由 $\boldsymbol{x}$ 出发的哈密顿方程的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 必回到 U,即存在 $t^*>0$,使得 $\boldsymbol{x}(t^*)\in U$.

性质 4(极值稳定定理) 若 $\boldsymbol{x}$ 为 H 的局部极小或极大值点,则 $\boldsymbol{x}$ 是李雅普诺夫稳定的.

(2) **泊松(Poisson)括号** 设 H,F,G 为 p,q,t 的连续可微实值函数. F,G 的泊松括号定义为

$$\begin{aligned}\{F,G\}&=\nabla F^{\mathrm{T}}\nabla G=\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{q}},\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{p}}\right)-\left(\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{q}},\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{p}}\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}-\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}\right).\end{aligned}$$

容易验证泊松括号满足

(a) 反对称性 $\{F,G\}=-\{G,F\}$;

(b) 双线性 $\{aF+bG,K\}=a\{F,K\}+b\{G,K\}$;

（c）雅可比（Jacobi）行列式

$$\{H,\{F,G\}\}+\{F,\{G,H\}\}+\{G,\{H,F\}\}=0.$$

性质5 H,F,G 不显含 t 时有

（a）当且仅当 $\{F,H\}=0$ 时，F 是哈密顿方程 H 的首次积分；

（b）若 F,G 是哈密顿方程 H 的首次积分，则 $\{F,G\}$ 也是哈密顿方程 H 的首次积分；

（c）$\{F,H\}$ 是 F 沿哈密顿方程 H 的解关于 t 的变化率.

对两个哈密顿方程①的首次积分 F,G，当恒有 $\{F,G\}=0$ 时，称 F,G 为对合的.

刘维尔完全可积定理 如果 $2n$ 维哈密顿方程①存在 n 个对合的相互独立的首次积分 F，则哈密顿方程是完全可积的，即方程可以通过 n 个首次积分求解. 其 n 个独立的对合的首次积分函数所确定的等值面是紧的且连通的. 同时这个等值面对应（同胚）于 n 维不变环面.

（3）**近可积哈密顿系统** 近可积哈密顿系统定义为一个完全可积哈密顿系统 $H_0(\boldsymbol{J})$ 的微小摄动：

$$H(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{J})=H_0(\boldsymbol{J})+\varepsilon H_1(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{J}), \quad ②$$

其中 ε 足够小.

KAM定理 如果哈密顿系统①是近可积和充分光滑的，且未扰可积系统 $H_0(\boldsymbol{J})$ 满足非共振条件

$$\det\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial \boldsymbol{J}_i \partial \boldsymbol{J}_j}\right)\neq 0,$$

则近可积哈密顿系统运动的定性性质和未扰可积哈密顿系统相同.

（4）**梅利尼科夫（Mel'nikov）方法** 考虑

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\varepsilon \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t), \quad ③$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t+T)\equiv \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t)$，$\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}$ 充分光滑，ε 为小参数. 假设

（a）$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 为一哈密顿方程，并有一由双曲鞍点 $\boldsymbol{p}_0$ 产生的

同宿轨道 $\boldsymbol{q}^0(t)$；

(b) 在 $\boldsymbol{\Gamma}^0=\{\boldsymbol{p}_0\}\cup\{\boldsymbol{q}^0(t)\mid t\in\mathbf{R}\}$ 内充满周期轨道族 $\boldsymbol{q}^\alpha(t)$.

定义梅利尼科夫函数为

$$M(t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}^0(t-t_0))\wedge\boldsymbol{g}(q^0(t-t_0),t)\,\mathrm{d}t, \qquad ④$$

这里 $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=a_1b_2-a_2b_1$ 为向量积的模. 我们有

梅利尼科夫定理 若梅利尼科夫函数 $M(t_0)$ 以 t_0 为简单零点，即 $M(t_0)=0, M'(t_0)\neq 0$，则当 ε 充分小时，方程③有横截同宿点，从而方程的解具混沌性态.

(5) **孤立子** 孤立子是由偏微分方程描述的一种有特殊性质的有孤立波形状的解，其能量不会耗散或分散. 当两个或多个能量不同的孤立波在前进时，能量高的波会逐渐赶上并越过能量低的波并保持各自的波形.

考虑著名的 KdV 孤立子方程

$$u_t-6uu_x+u_{xxx}=0,$$

其中 u_t, u_x 表示 $u=u(x,t)$ 分别对 t,x 的偏导数. 设 u 存在形如 $u=\varphi(\xi),\xi=x-at$ 的行波解，且 $\xi\to\pm\infty$ 时 $\varphi(\xi)\to 0$. 将 $\varphi(\xi)$ 代入 KdV 方程可化得常微分方程

$$-a\varphi'+6\varphi\varphi'+\varphi'''=0,$$

其中 $\varphi'=\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}$. 经过一系列积分，最后可得到用双曲函数表示的精确解

$$u=\varphi(x-at)=\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{a}(x-at-\xi_0)\right].$$

KdV 方程初值问题可以应用类似于傅里叶变换方法的反散射方法（GGKM 方法）求解. KdV 方程的初值函数为 $u_0(x)=-2\operatorname{sech}^2 x$ 时可用反散射方法求得与上式相同的单孤立子解. 而初值函数为 $u_0(x)=-6\operatorname{sech}^2 x$ 时则可用反散射方法求得双孤立子解

$$u(x,t) = -12\frac{3+4\cosh(8t-2x)+\cosh(64t-4x)}{[\cosh(36t-3x)+3\cosh(28t-x)]^2}.$$

可用反散射方法求解的有重要应用的很多非线性微分方程都可对应完全可积的哈密顿系统.

§6.2 学习辅导

§6.2.1 学习要点

(1) 本章学习的是常微分方程现代理论基础,内容包括稳定性、定性、分支混沌和哈密顿方程四个方面. 注意掌握每个方面的基本概念和基本方法进行解题. 重点是学习稳定性和定性理论基础. 分支混沌和哈密顿方程只作简单描述.

(2) 稳定性方面. 稳定性的基本概念、李雅普诺夫稳定性基本定理、按线性近似决定稳定性定理、n 次常系数代数方程的赫尔维茨判别法和(二次型)V 函数的构造. 能进行非线性驻定方程平衡解的寻求及其稳定性的判断. 注意其特解是否是零解,全导数 $\dot{V}$ 的计算,V 及 $\dot{V}$ 函数的定正(或定负)性.

(3) 定性方面. 常系数线性方程奇点类型(鞍点、焦点、中心、结点、奇结点、退化结点及奇线)及其稳定性的判断. 判断极限环的存在的环域定理和不存在的定理. 李纳方程极限环存在条件. 运用奇点类型和等倾斜线法绘制平面系统的轨线图貌.

*(4) 分支混沌方面. 分支定义,一维微分方程单参数分支类型(鞍结点、跨临界、叉式、复合)方程及图貌,二维微分方程单参数分支的典型类型(平面鞍结点、霍普夫、同宿、异宿)方程及其图貌,洛伦茨方程及其主要性质,不同参数下洛伦茨方程轨线的图貌,奇异吸引子及混沌.

*(5) 哈密顿方程方面. 哈密顿方程和哈密顿函数的表示及基

本性质，泊松括号及其性质，哈密顿方程的完全可积性定义，刘维尔完全可积定理，近可积哈密顿系统和 KAM 定理，同宿环经扰动后破裂产生混沌现象的梅利尼科夫方法，KdV 孤立子方程和孤立子现象.

§6.2.2 例题选讲

例 1 试讨论微分方程组

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2 + x_2^2 - 2tx_2,\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 2t^2 + e^{2t-2x_2}$$

的解 $x_1 = -t^2, x_2 = t$ 的稳定性.

解 将 $x_1 = -t^2, x_2 = t$ 代入方程组得恒等式，知为方程组的解. 取变换

$$y_1 = x_1 + t^2, y_2 = x_2 - t,$$

方程组化为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \dot{x}_1 + 2t \\ \quad = -(y_1 - t^2) - 2(y_2 + t) - 2t(y_2 + t) + (y_2 + t)^2 + 2t \\ \quad = -y_1 - 2y_2 + y_2^2, \\ \dot{y}_2 = \dot{x}_2 - 1 = 2(y_1 - t^2) + 2t^2 + e^{2t-2(y_2+t)} - 1 \\ \quad = 2y_1 + (e^{-2y_2} - 1), \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 - 2y_2 + y_2^2, \\ \dot{y}_2 = 2y_1 - 2y_2 + (e^{-2y_2} - 1 + 2y_2). \end{cases}$$

其 x_1, x_2 方程组的特解 $x_1 = -t^2, x_2 = t$ 变为 y_1, y_2 方程组的零解 $y_1 = 0,\ y_2 = 0$. 且非线性项当 $\{|y_1|, |y_2|\} \to 0$ 时 $\{|y_2^2|, |(e^{-2y_2} - 1 + 2y_2)|\} \to 0$. 可按线性近似确定方程组零解的稳定性.

对应线性方程组 $\dot{y}_1 = -y_1 - 2y_2, \dot{y}_2 = 2y_1 - 2y_2$ 的特征方程 $\lambda^2 + 3\lambda + 6 = 0$ 有负实部根 $\lambda = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{15}i)$. 线性方程组的零

解是渐近稳定的. 故 y_1, y_2 方程组的零解 $y_1=0, y_2=0$ 是渐近稳定的. 从而 x_1, x_2 方程组的特解 $x_1=-t^2, x_2=t$ 是渐近稳定的.

例 2 试求下列微分方程组的平衡解并判断其稳定性

$$\begin{cases} \dot{x}=\ln(y^2-x), \\ \dot{y}=x-y-1. \end{cases}$$

解 求解代数方程组

$$\begin{cases} \ln(y^2-x)=0, \\ x-y-1=0. \end{cases}$$

第 1 个方程变为 $y^2-x=1$, $y^2-y-2=(y-2)(y+1)=0$, $y=2$, $y=-1$. 平衡解为 $y=2, x=3$ 及 $y=-1, x=0$.

对平衡点(3,2)取变换

$$\begin{cases} \tilde{x}=x-3, \\ \tilde{y}=y-2. \end{cases}$$

方程化为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}=\dot{x}=\ln[(\tilde{y}+2)^2-(\tilde{x}+3)]=\ln(1-\tilde{x}+4\tilde{y}+\tilde{y}^2), \\ \dot{\tilde{y}}=\dot{y}=(\tilde{x}+3)-(\tilde{y}+2)-1=\tilde{x}-\tilde{y}. \end{cases}$$

因

$$\ln(1-\tilde{x}+4\tilde{y}+\tilde{y}^2)=-\tilde{x}+4\tilde{y}+\tilde{y}^2-\frac{1}{2}(-\tilde{x}+4\tilde{y}+\tilde{y}^2)^2+\cdots,$$

其线性近似方程组为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}=-\tilde{x}+4\tilde{y}, \\ \dot{\tilde{y}}=\tilde{x}-\tilde{y}. \end{cases}$$

特征方程 $\lambda^2+2\lambda-3=(\lambda+3)(\lambda-1)=0$ 有正根 $\lambda=1$. 零解 $\tilde{x}=\tilde{y}=0$ 是不稳定的. 即平衡点(3,2)不稳定.

对平衡点(0, -1)取变换

$$\begin{cases}\tilde{x}=x,\\ \tilde{y}=y+1.\end{cases}$$

方程化为

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}=\dot{x}=\ln[(\tilde{y}-1)^2-\tilde{x}]=\ln(1-\tilde{x}-2\tilde{y}+\tilde{y}^2),\\ \dot{\tilde{y}}=\dot{y}=\tilde{x}-(\tilde{y}-1)-1=\tilde{x}-\tilde{y}.\end{cases}$$

因

$$\ln(1-\tilde{x}-2\tilde{y}+\tilde{y}^2)=-\tilde{x}-2\tilde{y}+\tilde{y}^2-\frac{1}{2}(-\tilde{x}-2\tilde{y}+\tilde{y}^2)^2+\cdots,$$

其线性近似方程组为

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}=-\tilde{x}-2\tilde{y},\\ \dot{\tilde{y}}=\tilde{x}-\tilde{y}.\end{cases}$$

特征方程 $\lambda^2+2\lambda+3=0$ 的根 $\lambda=-1\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$ 均为负实部(或满足赫尔维茨条件 $a_0=1,a_1=2>0,\Delta_2=6>0$). 线性方程组的零解是渐近稳定的. 故相应非线性方程组的零解 $\tilde{x}=\tilde{y}=0$ 是渐近稳定的. 即平衡点$(0,-1)$是渐近稳定的.

例 3 判断下列微分方程零解的稳定性:

(1) $x^{(4)}+2x'''+6x''+5x'+6x=0$;

(2) $x^{(4)}+2x'''+3x''+7x'+2x=0$.

解 (1) 对应的特征方程为 $\lambda^4+2\lambda^3+6\lambda^2+5\lambda+6=0$. 赫尔维茨行列式

$$a_0=1,\Delta_1=2,\Delta_2=\begin{vmatrix}2&1\\5&6\end{vmatrix}=7,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2&1&0\\5&6&2\\0&6&5\end{vmatrix}=2\times18-25=11,\Delta_4=a_4\Delta_3=6\times11$$

均大于零. 微分方程的零解渐近稳定.

（2）对应的特征方程为 $\lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+7\lambda+2=0$. 赫尔维茨行列式

$$a_0=1,\Delta_1=2>0,\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 7 & 3\end{vmatrix}=-1<0,$$

第 2 项小于零. 微分方程的零解不稳定.

例 4 判断下列微分方程组零解的稳定性：

（1）$\begin{cases}x'=2y-x-x^3,\\ y'=x-2y;\end{cases}$

（2）$\begin{cases}x'=-f_1(x)-f_2(y),\\ y'=f_3(x)-f_4(y),\end{cases}\quad \operatorname{sgn} f_i(z)=\operatorname{sgn} z.$

解 （1）对应的线性方程的特征方程 $\lambda^2+3\lambda=0$ 有零特征根. 取定正 V 函数 $V=\frac{1}{2}x^2+y^2$,则有

$$V'=xx'+2yy'=-x^2+4xy-4y^2-x^4=-(x-2y)^2-x^4.$$

在原点的小邻域内 V'为定负函数. 从而方程的零解渐近稳定.

（2）由条件 $\operatorname{sgn} f_i(z)=\operatorname{sgn} z$ 知 $f_i(0)=0,zf_i(z)>0(z\neq0)$. 取 V 函数 $V(x,y)=\int_0^x f_3(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^y f_2(y)\,\mathrm{d}y$,显然 $V(0,0)=0$,由积分中值定理得 $V(x,y)$定正. 且有

$$V'(x,y)=f_3(x)x'+f_2(y)y'=-f_3(x)f_1(x)-f_2(y)f_4(y).$$

显然 $V'(0,0)=0,V'(x,y)<0(x^2+y^2\neq0)$,即 V'为定负函数. 方程的零解渐近稳定.

例 5 试判断下列微分方程或微分方程组的奇点类型,并在 Oxy 平面上画出其轨线图貌：

（1）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{4x-y}{3x-2y}$;

（2）$\begin{cases}\dot{x}=x^2-y,\\ \dot{y}=x^2-(y-2)^2.\end{cases}$

解 (1) 方程组$\begin{cases}3x-2y=0,\\4x-y=0\end{cases}$的解为 $x=0,y=0$,即原点(0,0)为奇点. 特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda-3 & 2\\ -4 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+5=0, p=-2<0, q=5>0,$$

$$\Delta=p^2-4q=-16<0,$$

原点为不稳定焦点. 在 Oxy 平面上的轨线图貌如图 6.2(a).

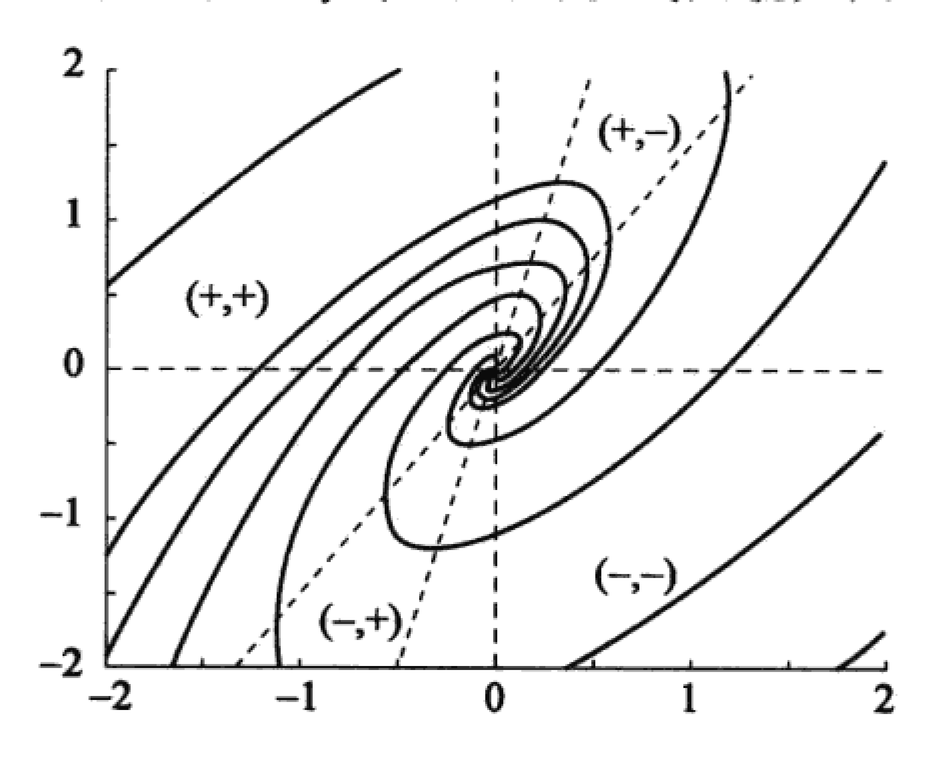


图 6.2(a) 轨线图貌

(2) 方程$\begin{cases}x^2-y=0,\\x^2-(y-2)^2=0\end{cases}$有解 $x=\pm1, y=1; x=\pm2, y=4$.

对奇点 (1, 1), 通过变换 $\begin{cases}\tilde{x}=x-1,\\\tilde{y}=y-1,\end{cases}$ 原微分方程化为

$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}=2\tilde{x}-\tilde{y}+\tilde{x}^2,\\\dot{\tilde{y}}=2\tilde{x}+2\tilde{y}+\tilde{x}^2-\tilde{y}^2.\end{cases}$ 对应线性方程的特征方程有 $p=-4, q=6$,

$p^2-4q=-8<0$,奇点为不稳定焦点.

同理,奇点$(-1,1)$,通过变换化为$\begin{cases}\dot{\tilde{x}} = -2\tilde{x}-\tilde{y}+\tilde{x}^2,\\ \dot{\tilde{y}} = -2\tilde{x}+2\tilde{y}+\tilde{x}^2-\tilde{y}^2.\end{cases}$ 对应线性方程的特征方程系数有 $p=0, q=-2<0$,奇点为鞍点. 奇点(2,4),通过变换化为$\begin{cases}\dot{\tilde{x}} = 4\tilde{x}-\tilde{y}+\tilde{x}^2,\\ \dot{\tilde{y}} = 4\tilde{x}-4\tilde{y}+\tilde{x}^2-\tilde{y}^2.\end{cases}$ 对应线性方程的特征方程系数有 $p=0, q=-12<0$,奇点为鞍点. 奇点$(-2,4)$,通过变换化为

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}} = -4\tilde{x}-\tilde{y}+\tilde{x}^2,\\ \dot{\tilde{y}} = -4\tilde{x}-4\tilde{y}+\tilde{x}^2-\tilde{y}^2.\end{cases}$$

对应线性方程的特征方程系数有 $p=8>0, q=12>0, p^2-4q>0$,奇点为稳定结点. 在 Oxy 平面上的轨线图貌如图 6.2(b).

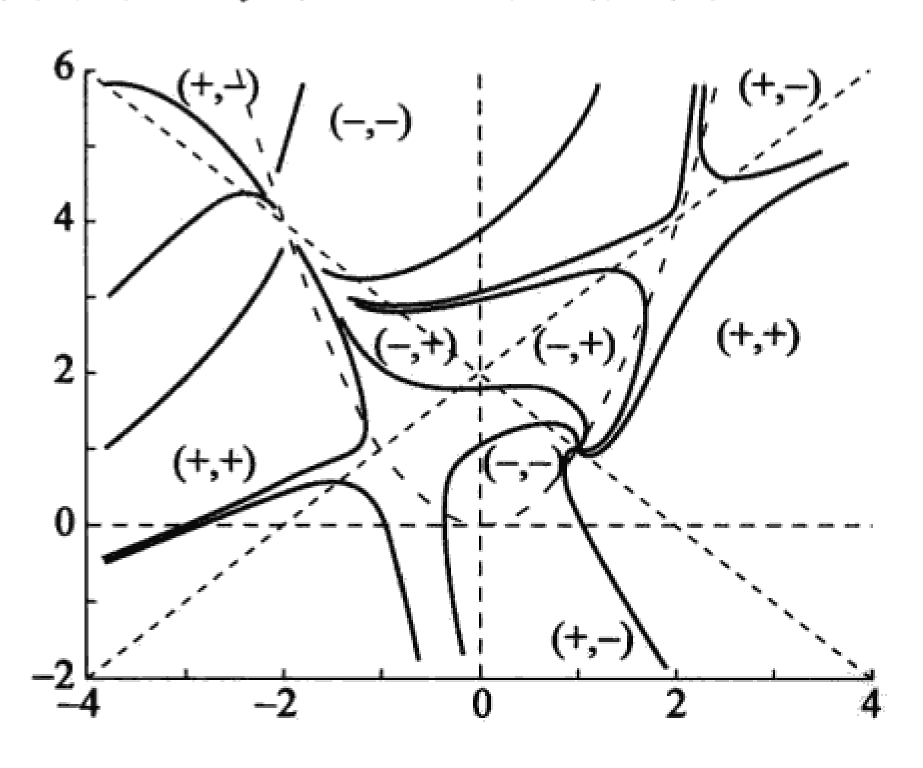


图 6.2(b) 轨线图貌

例 6 试讨论带参数 a 的极坐标方程组

$$\frac{d\varphi}{dt}=1, \frac{dr}{dt}=(r-1)(a+\sin^2\varphi)$$

中极限环的稳定性.

解 显然，$r=1$ 为闭轨线. 方程组可化为$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=(r-1)(a+\sin^2\varphi)$，积分得

$$\frac{\mathrm{d}r}{r-1}=(a+\sin^2\varphi)\mathrm{d}\varphi,\ln|r-1|=\left(a+\frac{1}{2}\right)\varphi-\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi+c,$$

即

$$r=1+ce^{\left(a+\frac{1}{2}\right)\varphi-\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi}.$$

于是当 $a<-\frac{1}{2}$时轨线趋于闭轨线 $r=1$，$r=1$ 为稳定极限环；当 $a>-\frac{1}{2}$时轨线离开闭轨线 $r=1$，$r=1$ 为不稳定极限环.

§6.2.3 测试练习

1. 试求下列微分方程(组)的驻定解，并将判断驻定解的稳定性化为判断零解的稳定性.

(1) $x'=4x-2x^2$；

(2) $x'=y-x-x^2,y'=3x-y-x^2$.

2. 判断下列微分方程(组)零解的渐近稳定性.

(1) $x^{(4)}+2x'''+4x''+3x'+2x=0$；

(2) $x^{(5)}+2x^{(4)}+4x'''+6x''+5x'+4x=0$；

(3) $x'=-2x-y+xz,y'=x-2y-yz,z'=x+3y-z+x^2$.

3. 判断下列 V 函数的定号性，并求相应方程的全导数及判断方程零解的稳定性态.

(1) $V=x^2+y^2,x'=y+\alpha x-x^3,y'=-x+\alpha y-y^3$；

(2) $V=2x^2+y^2,x'=-x+xy^2,y'=-2x^2y-y^3$；

(3) $V=y^2-x^2,x'=-x+4y,y'=5x+y-xy$；

(4) $V=x^2+x^4+y^2+y^4,x'=y+2y^3,y'=-x-2x^3$.

4. 判断下列微分方程的零解的稳定性.

(1) $x' = x - e^y + \cos y,\ y' = 3x - y - \sin y$;

(2) $x' = -y + \alpha x^3,\ y' = x + \alpha y^5$;

(3) $x' = y - x^3,\ y' = -2(x^3 + y^5)$;

(4) $x' = y,\ y' = -x,\ z' = x$.

5. 判断下列微分方程组的线性奇点及其类型.

(1) $x' = 3x + y,\ y' = y - x$;

(2) $x' = 2y,\ y' = x^2 - y^2 - 1$.

6. 判断下列微分方程是否存在极限环及存在稳定、不稳定极限环的条件.

(1) $x' = x + y - x(x^2 + y^2), y' = -x + y - y(x^2 + y^2)$;

(2) $r' = f(r), \varphi' = 1$ ($f(r)$连续).

7. 画出下列微分方程的轨线图貌.

(1) $x' = 1 - x^2 - y^2, y' = 2xy$;

(2) $x' = 4 - 4x - 2y + 2xy, y' = y^2 - x^2$.

§6.3 补充提高

§6.3.1 补充习题

1. 判断下列微分方程和方程组零解的稳定性：

(1) $x''' + ax'' + bx' + 2x = 0$;

(2) $x' = \ln(4y + e^{-3x}), y' = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}$.

2. 试用 V 函数判断下列微分方程组零解的稳定性：

$$x' = y + \alpha x - x^3, y' = -x - y^3.$$

3. 判断下列微分方程组的奇点及其类型.

(1) 范德波尔方程 $x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0\ (\mu \geqslant 0)$;

(2) $x' = \ln(2 - y^2),\ y' = e^x - e^y$.

4. 判定下列方程是否存在极限环.

(1) $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=(r-1)(a+\sin^2\varphi),\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=1$;

(2) $x''+ax'+(b-cx)x=0,a\neq 0$;

(3) $x''+F(x')+x=0$,$F(y)$连续,当 $y>0$ 时 $F(y)>0$,当$y<0$ 时 $F(y)<0$.

5. 画出下列微分方程的轨线图貌.

(1) $x'=x^2-y,y'=2x-2y-2xy+x^2+y^2$;

*(2) $x''+(a+x')x'+(1+\mu x)x=0$.

6. 试分析淋病扩散微分方程模型的轨线图貌(见[§6.4.3-(4)]):

$$x'=-a_1x+b_1(c_1-x)y,\ y'=-a_2y+b_2(c_2-y)x,$$

其中各系数均为正数,且 $0<x(t_0)<c_1,0<y(t_0)<c_2$.

§6.3.2 排疑解惑

(1) **临界情形稳定性** 李雅普诺夫稳定性理论的核心是解决临界情形的稳定性判别. 非临界情形的稳定性可由其首次(线性、一次)近似微分方程的稳定性决定,临界情形的稳定性必须考虑更高次项的影响.

对线性近似方程是常系数线性微分方程而言,特征方程的根具零实部属临界情形. 临界情形可分特征方程有零根和纯虚根两种情形(李雅普诺夫称其为第一临界情形和第二临界情形). 对既有零根又有纯虚根的复合情形,可就每一种情形分别处理.

所谓临界情形,实际上指线性近似特征方程的根中既有零实部根又有负实部根,因如果特征方程的根中哪怕只含有一个正实部根,微分方程的零解也是不稳定的.

研究临界情形的稳定性,首先通过变换将微分方程中对应零实部特征根的变量组分离出来,使其变量组所对应的微分方程不含其他变量. 分离出来的对应零实部特征根的变量组的微分方程的解构成所谓**中心流形**. 中心流形在稳定性和定性研究中都有重

要意义. 实际判断时往往仅需要前面若干次近似项即可,因此只需经有限次变换即可判断原方程组的稳定性.

含零特征根的驻定微分方程组,其变换后的方程组仍是驻定方程组. 含纯虚特征根的驻定微分方程组因有共轭复根,可通过极坐标变换化为对 r 含零特征根的方程组进行判别,但此时的微分方程组是含 $\sin t,\cos t$ 的周期方程组而不是驻定方程组,其稳定性判别更为复杂. 见[文 27].

(2) **非线性奇点** 平面驻定方程非线性奇点的定性分析,首先要判断是否有轨线趋于奇点,趋于奇点的方向称为**特征方向**,可通过极坐标变换看极坐标方程有及有多少个常数解 $r=0,\theta=\theta^*$,确定有及有多少个特征方向. 确定特征方向后还需判断是一条或无穷多条正方向或负方向趋于奇点. 这是研究非线性奇点邻域轨线图貌的主要方法. 此外,有时还可令 $y=ux$ 将奇点进行分解,把以 x,y 为变量的方程变为以 u,y 为变量的方程求解. 见[文 28,30].

(3) **全局图貌** 平面驻定方程对所有奇点进行定性分析后再根据奇点位置及奇点性质判断是否存在极限环或从奇点到奇点的分界线,这样基本上可以画出方程轨线的大范围图貌. 但要画出方程的全局图貌还需考虑无穷远奇点及其性态. 一般通过庞加莱变换 $u=\dfrac{y}{x},z=\dfrac{1}{x}(x\neq0)$ 或 $v=\dfrac{x}{y},z=\dfrac{1}{y}(y\neq0)$ 将 x,y 的微分方程组变为 u,z 或 v,z 的方程组,其 $z=0$ 恰对应于 Oxy 平面上的无穷远点. 对 u,z 或 v,z 的方程组 $z=0$ 上奇点进行分析便能得到对应 Oxy 平面上无穷远奇点附近的轨线图貌. 无穷远奇点图貌结合大范围图貌便得到全局图貌. 见[文 28,31].

(4) **范德波尔(Van de Pol)方程** 物理学家范德波尔通过对电路系统的分析推导出范德波尔方程,并证明方程有一个稳定极限环. 从而从理论上证明了无电波传播的稳定性,为无线电技术的发展奠定了坚实的基础. 范德波尔方程的具体推导见[§6.3.3 –

(2)].

(5) **李纳(Lienard)方程极限环证明** 首先,利用中值定理易证方程右端满足利普希茨条件,李纳方程的解存在且唯一.方程关于原点对称,且原点为唯一奇点,如存在极限环必环绕原点.

令系统能量 $u(x,y)=\dfrac{y^2}{2}+\int_0^x\varphi(x)\mathrm{d}x$,则有 $\mathrm{d}u=F\mathrm{d}y$. 因$\varphi(x)$为连续奇函数,有 $\varphi(0)=0$. y 轴($x=0$)为水平等倾斜线,上半轴轨线向右,下半轴轨线向左. $\Delta:y=F(x)$为垂直等倾斜线. 经 y 轴上半轴上一点 A 的轨线 Γ_α 必向右向下与 Δ 相交于横坐标为 α 的一点 B,然后向左向下与 y 轴下半轴交于一点 C. 当且仅当 $OA=-OC$即 $u(A)=u(C)$时 Γ_α 为闭轨. 如图 6.3.

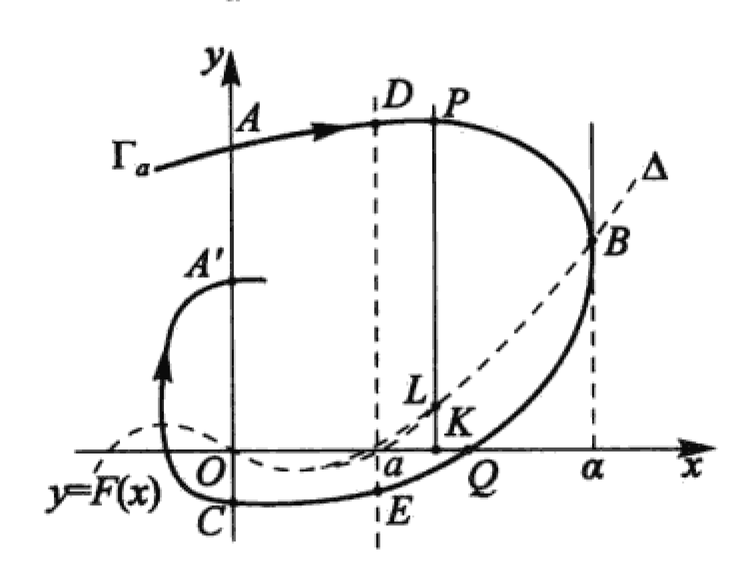


图 6.3 李纳方程极限环

沿 Γ_α 计算曲线积分,记 $\varphi(\alpha)=\int_{ABC}\mathrm{d}u=\int_{ABC}F\mathrm{d}y=u_C-u_A$. 当 $\alpha\leqslant a$ 时因 $F<0,\mathrm{d}y<0$,有 $\varphi(\alpha)>0,u_C>u_A$. 加上中心对称性,有 $u_{-A}<u_{-C}$,可由 Γ_α 轨线和 y 轴线段构造原点邻域的内环线 Γ_{α_0},Γ_{α_0}上的轨线均走出 Γ_{α_0}外.

对 $\alpha\geqslant a$,令 $\varphi(\alpha)=\varphi_1(\alpha)+\varphi_2(\alpha)$,$\varphi_1(\alpha)=\int_{AD}\mathrm{d}u+\int_{EC}\mathrm{d}u$,$\varphi_2(\alpha)=\int_{DBE}\mathrm{d}u$,利用 $\mathrm{d}u=\dfrac{F\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\dfrac{-Fg}{y-F}\mathrm{d}x$,因在 AD 和 EC

段有 $F<0$,得 $\mathrm{d}u>0$,$\varphi_1(\alpha)>0$,且 α 增加时 $|y|$ 增加而积分限不变,故 $\varphi_1(\alpha)$ 减小. 利用 $\mathrm{d}u=F\mathrm{d}y$,在 DBE 段有 $F>0$,$\mathrm{d}y<0$,知 $\varphi_2(\alpha)<0$. 因 $x\geqslant a$ 时 F 单调增加,$\alpha\geqslant a$ 时 $\mathrm{d}y$ 单调减小,故 $\varphi_2(\alpha)$ 从而 $\varphi(\alpha)$ 单调减小. 固定 $OK>a$,则对 $\alpha>OK$ 有 $\int_{DBE}\mathrm{d}u<\int_{PBQ}\mathrm{d}u$ $=\int_{PBQ}F\mathrm{d}y<-PK\times KL$. 因此 $\alpha\to\infty$ 时 $PK\to\infty$,即 $\varphi_2(\alpha)\to-\infty$,从而 $\varphi(\alpha)\to-\infty$. 因 $\varphi(\alpha)$ 从大于零单调减小且趋于 $-\infty$,故有且仅有一值 $\alpha=\alpha_*$ 使 $\varphi(\alpha_*)=0$,即 $u_{A_*}=u_{C_*}$,有且仅有一极限环 $A_*B_*C_*A_*$.

前面同时证明了极限环的存在性和唯一性. 也可以通过构造环域,利用环域定理证明极限环的存在性. 由前面的证明,当 $\alpha\leqslant a$ 时有 $\varphi(\alpha)>0$ 即 $u_C>u_A$. 因方程的中心对称性,对 y 轴右边的 Γ_α 有对称的 Γ_{α^*},使 $u_{A^*}<u_{C^*}$,而 $OA=-OA^*$,$OC^*=-OC$. 可由 Γ_α 和 Γ_{α^*} 及 y 轴线段 C^*A 和 CA^* 构造原点邻域的内环线 Γ_{α_0},Γ_{α_0}上的轨线均走出 Γ_{α_0}外. 而当 $\alpha>a$ 足够大时有 $\varphi(\alpha)<0$ 即 $u_C<u_A$,同样可以由 Γ_α 和 y 轴线段构造原点邻域的外环线 Γ_{α_1},Γ_{α_1} 上的轨线均走进 Γ_{α_1}内. 而由 Γ_{α_0}和 Γ_{α_1}构成的环域内没有奇点,由环域定理证明了在环域内存在极限环. 参看[文 32 § 3.2].

(6) **极限环个数、位置与希尔伯特第 16 个问题** 1900 年希尔伯特在国际数学家大会上提出 20 世纪要解决的 23 个问题,其中第 16 个问题为“代数曲线和代数曲面的拓扑问题”. 分两部分,前半部分要求解决代数曲线含有闭的分支曲线的最大数目;后半部分要求讨论$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{Y}{X}$的极限环的最大个数和相对位置,其中 X,Y 是 x,y 的 n 次多项式. 苏联的彼德罗夫斯基院士曾证明 $n=2$ 时极限环的个数不超过 3. 1979 年中国的史松龄和王明淑、罗定军分别举出有 4 个极限环的反例. 希尔伯特第 16 个问题至今尚未解决.

多项式微分系统的极限环问题是常微分方程定性理论的核心

问题. 近百年来得到很大发展. 见[文 31].

*(7) **分支和规范形** 分支(分岔)理论包含函数方程的零点随参数变化产生的分支、由映射定义的离散动力系统的分支及由常微分方程定义的连续动力系统的分支三个方面. 前者称静态分支,后两者称动态分支. 对常微分方程的奇点,仅临界情形能产生分支,因此可通过变换将微分方程中对应零实部特征根的变量组分离出来(中心流形定理),从而将真正要研究的方程的维数尽量降低(余维数). 另一方面,还可以将余维数方程的形式尽量简化为规范形(正规形),其方法如下:

线性微分方程$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 可以通过非奇异线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$ 化为若尔当标准形$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})\boldsymbol{y}$. 同样,对非线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+f^{2}(\boldsymbol{x})+\cdots+f^{r-1}(\boldsymbol{x})+O(|\boldsymbol{x}|^{r}),$$

其中 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^{n}$,$f^{k}\in H_{n}^{k}$,$H_{n}^{k}$ 为 n 元 n 维 k 次齐次多项式组成的空间. $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+h^{2}(\boldsymbol{y})$,其中 $h^{2}(\boldsymbol{y})\in H_{n}^{2}$ 待定以使方程最简. 利用单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 和雅可比矩阵 $\boldsymbol{D}$,有$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D}h^{2})^{-1}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}h^{2}+O(|\boldsymbol{y}|^{2})$,引入 $\boldsymbol{A}$ 的伴随算子 $ad_{A}^{2}\ (h^{2}(\boldsymbol{y}))=\boldsymbol{D}h^{2}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}h^{2}(\boldsymbol{y})$,得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{y}}&=[(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}h^{2}(\boldsymbol{y})+O(|\boldsymbol{y}|^{2})]\cdot[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{y}+h^{2}(\boldsymbol{y})+f^{2}(\boldsymbol{y})+O(|\boldsymbol{y}|^{2})]\\&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+g^{2}(\boldsymbol{y})+\tilde{f}^{3}(\boldsymbol{y})+\cdots+\tilde{f}^{r-1}(\boldsymbol{y})+O(|\boldsymbol{y}|^{r}),\end{aligned}$$

其中 $g^{2}(\boldsymbol{y})=f^{2}(\boldsymbol{y})-ad_{A}^{2}(h^{2}(\boldsymbol{y}))$. 设算子 ad_{A}^{2} 的值域为 P^{2},其补空间为 Q^{2},即有 $H_{A}^{2}=P^{2}\otimes Q^{2}$. 当$f^{2}(\boldsymbol{x})\in P^{2}$时,存在 $h^{2}(\boldsymbol{y})\in H_{A}^{2}$ 使得 $ad_{A}^{2}(h^{2}(\boldsymbol{y}))=f^{2}(\boldsymbol{y})$,即不出现二次项;否则,可找到 $h^{2}(\boldsymbol{y})\in H_{n}^{2}$ 使得 $g^{2}(\boldsymbol{y})\in Q^{2}$.

对新方程的三次项可同样处理,其变换不影响方程的二次项. 经一系列变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+h^{k}(\boldsymbol{y})$,$h^{k}(\boldsymbol{y})\in H_{n}^{k}$,每次变换后把 $\boldsymbol{y}$ 换回 $\boldsymbol{x}$,最后有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+g^{2}(\boldsymbol{x})+\cdots+g^{r-1}(\boldsymbol{x})+O(|\boldsymbol{x}|^{r}),$$

其中 $g^k(\boldsymbol{y})\in Q^k$,$Q^k$ 为算子 ad_A^k 在 H_n^k 的值域 P^2 的补空间. 算子 ad_A^k 的定义为

$$ad_A^k:H_n^k\to H_n^k, ad_A^k(h^k(\boldsymbol{x}))=(\boldsymbol{D}h^k(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}h^k(\boldsymbol{x}).$$

变换后方程的 j 次截取式($2\leqslant j<r$)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+g^2(\boldsymbol{x})+\cdots+g^j(\boldsymbol{x}),g^i(\boldsymbol{x})\in Q^i$$

定义为方程的 j 次规范形(正规形). 注意:规范形不唯一,有多种计算规范形的方法. 见[文 29].

*(8) Li - Yorke **定理** 混沌现象在 1963 年已由洛伦茨发现,但混沌的正式定义是 1975 年才由 Li & Yorke 通过线段上连续映射提出. 这里略述 Li - Yorke 定理的证明. 首先证明若存在周期 3 则存在任意周期的周期点. 考虑线段映射的一些性质,设 $f:I\to\mathbf{R},I\subset\mathbf{R},K,L\subset I$,若 $f(K)\supset L$,则称 K 能 f 覆盖 L,简记为 $K\to L$. 显然,线段映为线段;若 $K\to L$,则存在线段 $J\subset K$ 使得 $f(J)=L$;若 $K\to K$ 则 f 在 K 中有不动点. 于是,有①:若 $I_1\to I_2\to\cdots\to I_n\to I_1$ 则存在 f^n 的不动点 x,使得 $f^{j-1}(x)\in I_j(j=1,\cdots,n)$;当 $f^N(x)=x$ 时 x 的周期 n 能整除 N;如 x 是 f 的 n 周期点,则 m 与 n 互素时,x 是 f^m 的 n 周期点. 设 3 周期轨道为 $x_0<x_1=f(x_0)<x_2=f(x_1),x_0=f(x_2)$,记 $K=[x_0,x_1],J=[x_1,x_2]$. 如图 6.4. 对任意自然数 $m\neq 3$,考虑 $\underbrace{J\to J\to\cdots\to J}_{m-1}\to K\to J$,

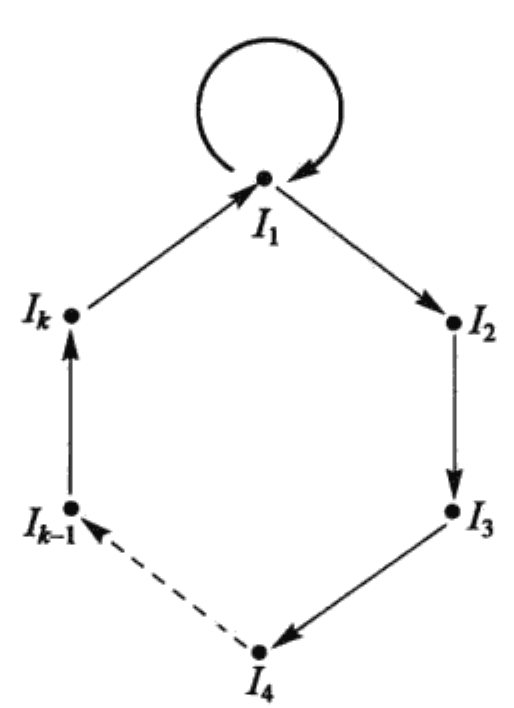


图 6.4 任意周期线段变换图

由①知 J 中存在 f^m 的不动点 ξ,使得

$$f^{j-1}(\xi)\in J(j=1,\cdots,m-1),f^{m-1}(\xi)\in K.$$

现进一步指出,$f^j(\xi)\neq x_i(j=1,\cdots,m;i=0,1,2)$:当 $m\neq 3n$ 时 x_i 不是 f^m 的不动点,即 $f^j(\xi)\neq x_i$;当 $m=3n$ 时只能 $m\geqslant 6,m-1\geqslant 5$,

而周期轨道 x_i 不能在 J 中停留 2 次以上，故 $f^j(\xi)\neq x_i$. 这证明了若存在周期 3 则存在任意周期的周期点. 可进一步证明其混沌性. 见[文 41].

*(9) **混沌** 牛顿和拉普拉斯都指出，只要建立了方程，就可以依据初值条件来确定随后的运动. 但洛伦茨方程的初始敏感的特性导致的混沌的发现冲破了这种传统观念，被斯梅尔称为“利用牛顿的定律推翻了牛顿决定论”(见[文 40]). 实际上，早在 19 世纪末庞加莱就曾预言过混沌运动的一些行为，但没有引起注意. 1963 年洛伦茨发现了混沌现象. 1971 年吕埃勒(Ruelle)和塔肯斯(Takens)提出了奇异吸引子(Strange attractor)概念. 但直到 1975 年李天岩(Li)和约克(Yorke)定义了混沌(Chaos), 1976 年 May 研究了一维 logistic 映射(见[文 49])，这才掀起了混沌研究的热潮，其中 Feigenbaum 于 1978 年发现了倍周期分叉通向混沌的两个普适常数并引入重整群思想是一大进展. 现已有众多混沌的实际例子，见[§6.3.3 -(10)]. 混沌的研究一是一维及二维映射，如虫口模型(见[书 §6.5 -(6.61)])及 Henon 映射 $x_{n+1}=1+y_n-ax_n^2, y_{n+1}=bx_n$，可以应用 Li - Yorke 混沌定理([书 §6.5 - 定理 14])和斯梅尔马蹄理论([书 §6.6.2]). 二是二阶强迫达芬(Duffing)方程和强迫范德波尔方程 $x''+\delta x'-kx+x^2=b\cos\omega t$, $x''+\mu(x^2-1)x'+x=b\cos\omega t$ 以及二维非驻定扰动方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\varepsilon\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2$，如日本吸引子([§6.3.4 -(10)])及梅尔尼科夫方法. 三是三阶方程，如洛伦茨方程([书 §6.5.2])及勒斯勒(Rossler)方程(1976) $x'=-y-z, y'=x+ay, z'=b+z(x-c)$ 及洛伦茨系统族(参看[文 46])等. 最后更一般的是哈密顿近可积系统，如 KAM 定理等. 还有不同混沌定义(特别是高维系统)、混沌的判断和通向混沌的通路以及混沌(同步)控制的研究等. 这又涉及李雅普诺夫特征指数、分数维(又称分形，Fractal)、测度熵(Metric entropy)的计算等问题.

*(10) **KAM 定理** KAM 定理([书 §6.6.2 - 定理 16])研究

近可积哈密顿方程在微扰作用下的轨线性态,是苏联数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)于1954年在国际数学家大会上提出,后来由他的学生 Arnold 对多自由度的解析哈密顿函数情形作出证明,美国数学家 Moser 则对二维保面积映象情形作了证明.因此,被称为 KAM 定理. 柯尔莫哥洛夫建议的证明思路是构造一系列正则变换使系统变为显式的可积系统,其变换极限即为不变环面.非共振条件使得可以用微扰方法构造正则变换并得到不变环面,虽然环面内可能存在混沌.当不满足非共振条件时存在共振区,共振区内原不变环面类似于数学摆哈密顿函数图([书 §6.6.2-图6.38]),在闭的与不闭的不变曲线之间有分界线,分界线的邻域易产生混沌.

*(11) **梅利尼科夫方法** 由于轨线连续性平面驻定方程不会产生混沌,只有三维以上的驻定方程或二维非驻定方程才可能出现混沌性态. 梅利尼科夫方法([书 §6.6.2-定理17])实际上是通过研究方程的庞加莱映射,在一定条件下产生横截同宿而出现混沌. 梅利尼科夫函数是微扰方程稳定和不稳定流形在过未扰方程同宿轨道一点的法线上庞加莱映射的一阶分离量.当梅利尼科夫函数为简单零点时,稳定和不稳定流形为横截相交,其扰动出现混沌性态.虽然,梅利尼科夫方法要求未扰方程同宿轨道能用解析式表示,条件很苛刻,但相对于其他如洛伦茨方程用计算机处理判断而言,这是常微分方程能严格证明存在混沌的有效方法.

*(12) **孤立子** 虽然早在1834年英国科学家 S. Russell 发现了孤立波现象,但孤立子的发现和提出是1965年美国物理学家 Kruskal 和 Zabusky 用数值模拟方法研究等离子体中孤立波碰撞的非线性相互作用时才得到的.此后,孤立子理论研究便蓬勃发展,掀起热潮.另外,长期以来,数学物理方法主要处理线性偏微分方程问题,对非线性方程,一直没有一种系统的求解方法.而1967年 Gardner, Greene, Kruskal 和 Miura 四位科学家发现可以用薛定谔(Schrödinger)方程的反散射理论求解 KdV 方程的初值问题.

GGKM 的反散射方法已成功求解许多有重要应用的非线性方程. 这是数学物理方法的重大发现,被称为非线性傅里叶变换方法. 参见[§7.3.2-(7), §8.3.2-(5)、(6)].

§6.3.3 应用实例

(1) 综合国力与经济调整模型

(a) 一个国家的物质文明与精神文明综合而成的社会文明称为综合国力. 定量研究各国的综合国力,可为本国内政、外交政策的制定,提供重要依据. 称 $X(t)$ 为硬国力函数,表示某国物质文明(资源、经济、军事、科技等)水平的一个综合指标, X_0 为其正常值. 称 $y(t)$ 为软国力函数, 表示某国精神文明(内政、外交政策的失误与正确,官员的腐败与廉洁,教育、治安等情况)水平的一个综合指标. $y(t)>0$ 对应社会丑恶现象,对社会发展有阻滞作用; $y(t)<0$ 时软国力优越,对社会发展有促进作用. 记 $x(t)=X(t)-X_0$, 则 $-X_0\leqslant x(t)\leqslant M$. 简化的综合国力模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\alpha x\dfrac{M-x}{M}-\beta y,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\gamma y+\delta(m-x)x,\end{cases}$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,m,M$ 均为正常数, $m<M$. α 为增长系数; β 为丑恶系数; γ 为统治系数; δ 为物质文明对精神文明变化的影响系数; $x<m$ 时使 y 增加, $x>m$ 时使 y 减少. 令 $u=\dfrac{x}{M}$, $v=\dfrac{y}{M}$, $\beta t=\tau$ 及 $a=\dfrac{\alpha}{\beta}$, $b=\dfrac{\gamma}{\beta}$, $c=\dfrac{\delta M}{\beta}$, $\mu=\dfrac{m}{M}$, 方程可化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}=au(1-u)-v,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}=-bv+c(\mu-u)u.\end{cases}$$

可用定性方法在相平面上画出方程的轨线图貌,判定奇点的稳定

性态和极限环的存在唯一性，并进一步讨论有关条件的社会意义．如图 6.5，详细分析可参看[文 12 §2.1]．

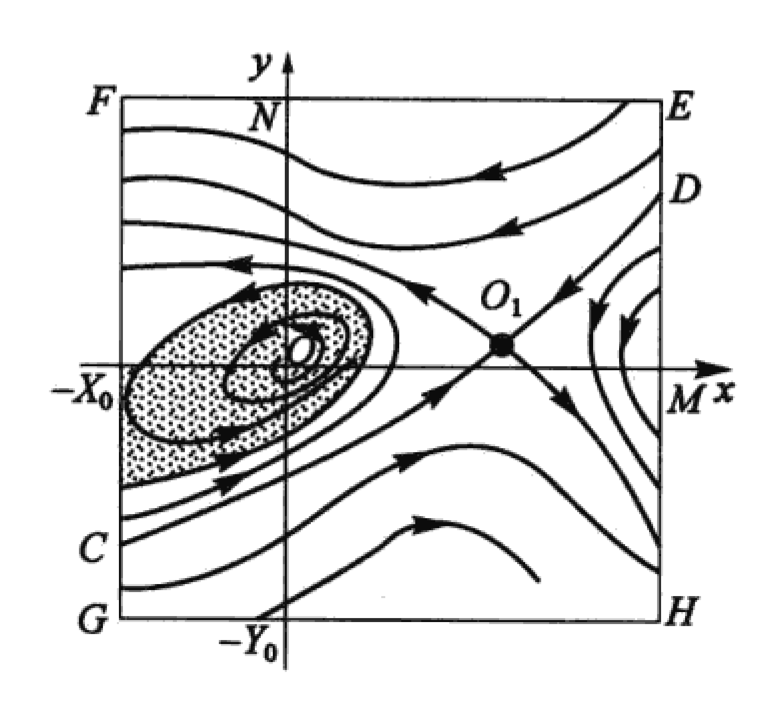


图 6.5 综合国力模型轨线图貌

(b) 经济产值如果波动太大，会引起经济生活与社会生活的不稳定．必须进行经济调整，使其比较健康地发展．设 $Y(t)$ 为产值，$I(t)$ 为诱发投资，A 为自发投资（常数），$C(t)$ 为消费，其中 $C(t)=cY(t)$，c 为消费系数，消费与产值成正比．经济调整模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-k\left(I-v\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\right),\\ \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=-\lambda(Y-C-I-A),\end{cases}$$

其中 v 为投资系数，k,λ 为相关参数．令 $1-s=c$，上式可化为二阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}t^2}+(\lambda s+k-k\lambda v)\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}+ks\lambda Y=k\lambda A.$$

其等价的方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=u,\\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=(k\lambda v-k-\lambda s)u-ks\lambda Y+k\lambda A.\end{cases}$$

它有唯一奇点 $P_0=(Y_0,u_0)=\left(\frac{A}{s},0\right)$. 易计算得仅当 $k\lambda v-k-\lambda s\leqslant 0$ 时奇点是稳定的,即对应经济稳定. 由 $1-s=c$ 知,为使经济稳定,需压缩消费,或控制诱发投资的速度. 参看[文 12 §2.2].

(2) **电子管振动电路** 在[书 §1.1-例 1]中推导了 RLC 振动电路方程 $\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dI}{dt}+\frac{I}{LC}=0$. 且在[书 §4.2]及[书习题 6.3-4]中求出了通解,分析了其对应的线性方程组的奇点类型. 当 $R>0$ 时由于电阻消耗电能变成了热能, 所以方程的解是阻尼衰减的. 而在无线电技术中需要得到等幅振动, 这就必须从外部补充能量来维持其振动过程. 为此物理学家范德波尔(ven de Pol)设计了等幅振动的范德波尔方程,见[书 §6.4-(6.49)]. 范德波尔设计的是一种电子管振动电路,如图 6.6 所示. 图中电子管的阳极回路电流 I_a 通过电感耦合补充 RLC 回路以能量. 假设互感量为 M. 在 RLC 回路中,如果略去很小的电子管的栅极电流不计,则回路方程为 $L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}\int I dt-M\frac{dI}{dt}=0$. 由电子管的特性,阳极电流 I_a 和栅极电势 E_g 之间有关系式 $I_a=\sigma\left(E_g-\frac{E_g^3}{3E_s^2}\right)$,其中 σ 是跨导,E_s 为对应阳极饱和电流的栅极电势,均为常数. 令 $z=\frac{E_g}{E_s}$,并利用电路中栅极电势和电容 C 的关系式 $E_g=\frac{1}{C}\int I dt$,电路方程可化为

$$LC\frac{d^2z}{dt^2}+(RC-\sigma M)\frac{dz}{dt}+\frac{\sigma M}{3}\frac{dz^3}{dt}+z=0.$$

进一步记 $x=z\left(\frac{\sigma M}{\sigma M-RC}\right)^{\frac{1}{2}}$,$\tau=\frac{t}{\sqrt{LC}}$,$\mu=\frac{\sigma M-RC}{\sqrt{LC}}$,最后得到

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+\mu(x^2-1)\frac{dx}{d\tau}+x=0.$$

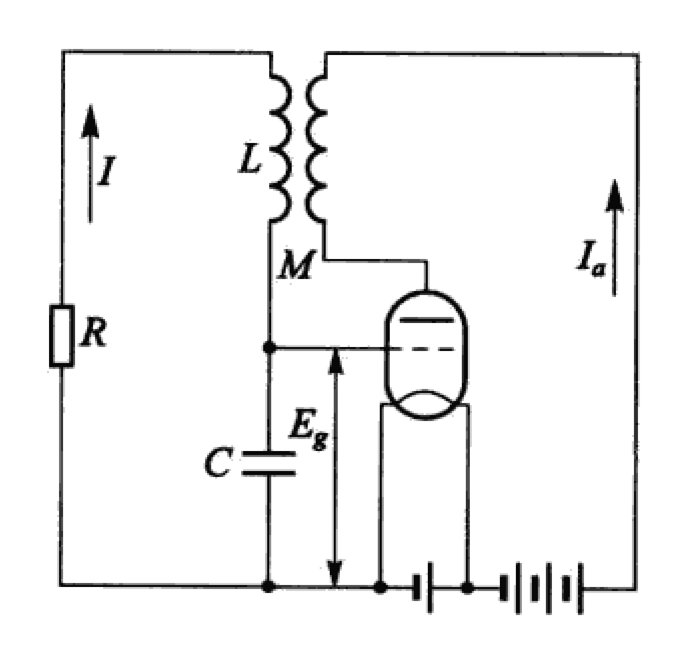


图 6.6 电子管振动电路

此即为范德波尔方程. 只要互感量 M 足够大,使得 $\sigma M > RC$,则能量可以得到足够的补充. 此时 $\mu > 0$,由[书 §6.4 - 定理 10]知方程有一个稳定的极限环,即电子管电路是孤立的稳定的等幅振动.

(3) **生态模型** 种群生态学已成为生态学的重要分支. 生态数学成了生物和数学包括常微分方程的交叉学科. 常微分方程的定性、稳定性及分支理论与方法全面介入生态模型的分析研究中. 关于生态模型的应用实例除可见于[书 §1.1 - 例 3、例 5 及 §6.4.2 - 定理 11]外,还有[§2.3.3 - (6), §6.3.3 - (6)、(7)],在[文 9 §5、§15 ~ §18,文 10 §1 ~ §4、§10 ~ §12]及各种数学模型书中和生态数学专著与杂志中均有讨论.

(4) **疾病模型** 常微分方程的定性、稳定性及分支理论与方法同样适用于各种疾病的分析和研究. 除已有的[书 §1.1 - 例 4]和[§5.3.3 - (4)]外,还有

(a) **肿瘤增长模型** 近年来,恶性肿瘤(癌)越来越引起人们的注意,肿瘤增长模型除在人口、种群研究中应用的指数模型、logistic模型(其参数值不同)外,还针对肿瘤体积增长 1 000 倍以

上时符合规律 $V(t)=V_0\exp\left[\frac{\lambda}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})\right]$ 建立肿瘤增长模型(Gompertz 模型)$\frac{dV}{dt}=\lambda e^{-\alpha t}V, V(0)=V_0$. 其极限体积为 $V_0e^{\frac{\lambda}{\alpha}}$.

(b) **淋病扩散模型** 淋病是危害较大的传染性疾病,淋病对康复者没有免疫作用. 假设淋病由异性传播. 男、女性患者人数各为 x,y. 性乱者人数各为 c_1,c_2. 感染率各为 b_1,b_2. 染病人数治愈速率比例各为 a_1,a_2. 这样,可得淋病扩散模型

$$\begin{cases}x'=-a_1x+b_1(c_1-x)y,\\ y'=-a_2y+b_2(c_2-y)x.\end{cases}$$

由[§6.3.1-6, §6.4.2-6]知当 $b_1b_2c_1c_2>a_1a_2$ 时,如图6.7(a),轨线均趋于平衡点 (x_0,y_0),即男、女患者总数最后趋于平稳. 而当 $b_1b_2c_1c_2\leqslant a_1a_2$ 时,如图 6.7(b),轨线均趋于原点(0,0),即淋病最终消失. 还可进一步分析如何判断有关参数及更细致的分年龄组讨论. 参见[文 10 §7].

(c) **血吸虫病模型** 寄生虫感染是最重要的世界性卫生问题之一,包括疟疾、血吸虫病和其他蠕虫感染. 现考虑血吸虫病模型,记每个人感染蛆的平均数为 m 而受感染的钉螺数为 I,设受感染的钉螺数的相对死亡率为常数 δ,而钉螺总数为常数 S,感染率为 $C(m)$,则有方程 $\frac{dI}{dt}=-\delta I+C(m)(S-I)$. 又 $C(m)$ 依赖于每个人体内已交配成对的蛆的平均数 $P(m)$,即 $C(m)=P(m)B$, B 为比例常数. 类似地,有方程 $\frac{dm}{dt}=-rm+\frac{A}{S}I$,其中 r 为 m 的死亡率, A 为比例常数. 已知对较大的 m 有 $P(m)\sim m$ 而对较小的 m 有 $P(m)\sim\frac{m^2}{2}$,其 I 的等倾斜线 c 为 $-\delta I+BP(m)(S-I)=0$, $I=\frac{BP(m)}{BP(m)+\delta}S$,当 m 较大时有渐近线 $I=S$,当 m 较小时近似 $I=$

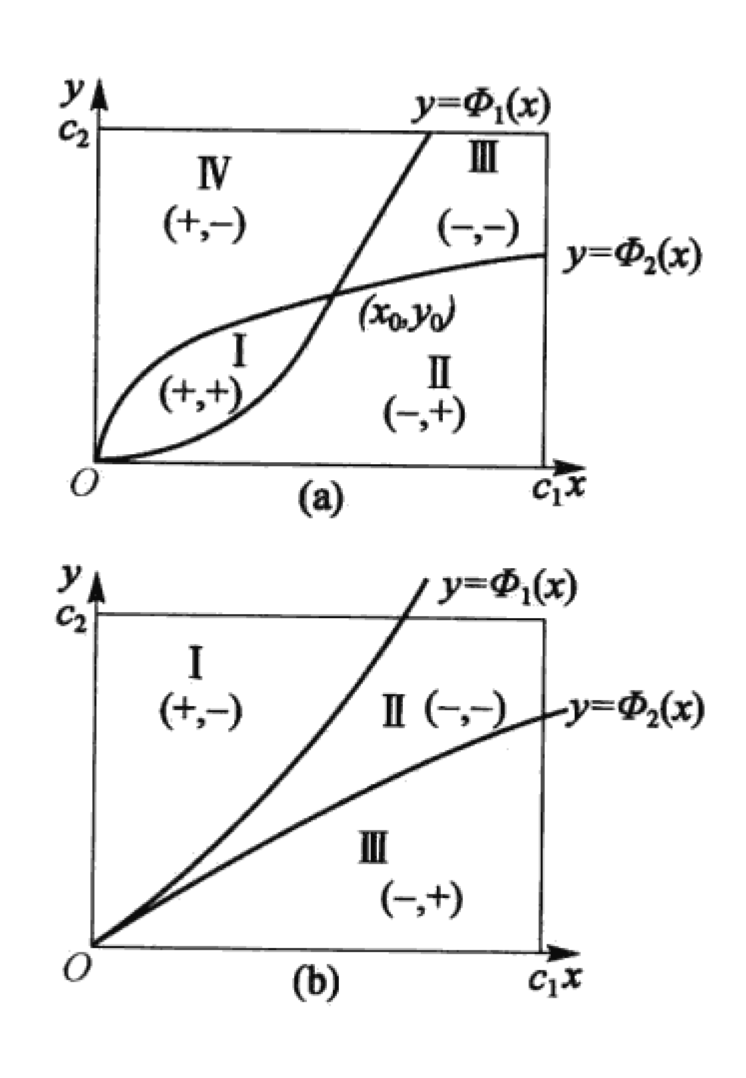


图 6.7　淋病模型轨线图貌

$\frac{BS}{2\delta}m^2$，与 m 的等倾斜线 $m=\frac{A}{rS}I$ 直线相交于三点 O,e_1,e_2，对应于 $m=0,m=m_b,m=m^*$. 其相平面上的轨线图貌如图 6.8. 即 e_1 为鞍点，有过 e_1 的分界线将相平面划为两个区域，下区域中的轨线均趋于原点，上区域中的轨线均趋于点 e_2. $m=m_b$ 成为临界值，如果治疗计划能使 m 降低到 (m,I) 位于下区域，则感染会慢慢消失；如果 m 使 (m,I) 位于上区域，则感染水平会上升到 m_b，即趋于 e_2 点. 这与实际数据吻合. 参见[文 10 § 6].

(5) **价格均衡模型**　设 p 表示商品的价格，$x(p)$ 表示消费者需要该商品的数量，$y(p)$ 表示生产者能供给该商品的数量. 若存在 p^*，使得 $x(p^*)=y(p^*)$，则称 p^* 为均衡价格，$q_i=x(p^*)$ 为均衡值. 可用供需曲线研究供求关系（见[文 12 § 3.4]）. 现考虑多种商品，记 $h(p)=x(p)-y(p)$ 为需超函数，其中 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{h}\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{p}\geqslant\mathbf{0}$，$\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{y}$ 表示对任意 i 有 $x_i\geqslant y_i$，且至少有一个 i 有 $x_i>y_i$.

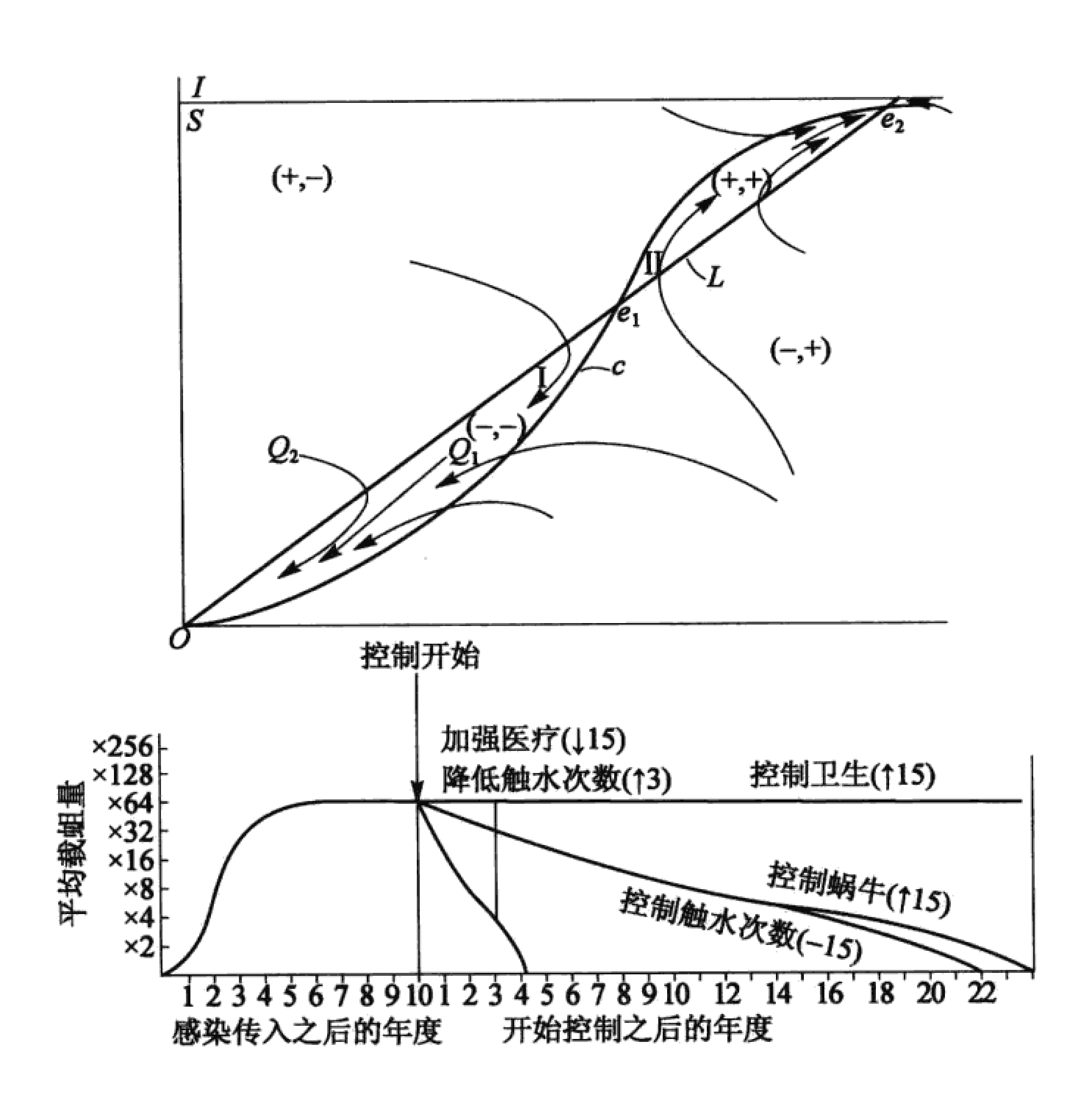


图 6.8　血吸虫病轨线图貌

$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$ 为需求函数向量, $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p})$ 为供应函数向量. 有单调性: 当 $\boldsymbol{p}_1 < \boldsymbol{p}_2$ 时 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p}_1) \leqslant \boldsymbol{y}(\boldsymbol{p}_2)$, $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}_1) \geqslant \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}_2)$. 当 $\tilde{\boldsymbol{p}}$ 为均衡价格时 $\boldsymbol{h}(\tilde{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{0}$. 因 $\boldsymbol{p}$ 的变化 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$ 与 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p})$ 成比例(增、减与数量), 可设 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p})$, 此即为价格调整及寻求均衡价格并研究其稳定性的方程组. 均衡价格 $\tilde{\boldsymbol{p}}$ 为方程组的平衡解(奇点). 当 $n=3$ 仅有 3 种商品时有

Arrow - Hurwicz 定理　设对 $n = 3$ 的价格调整方程 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} =$

$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p})$满足①（瓦尔瓦拉法则）$\sum_{i=1}^{3} p_i(t)=0,\forall t>0$ 成立；②（齐次性）$h_i(\boldsymbol{p})=h_i(a\boldsymbol{p}),\forall a>0$ 成立；③ $p_i>0$；④ 存在 $\tilde{\boldsymbol{p}}$，使得 $\boldsymbol{h}(\tilde{\boldsymbol{p}})=\boldsymbol{0}$. 则方程组的解 $\boldsymbol{p}=\tilde{\boldsymbol{p}}$ 是全局渐近稳定的.

首先由假设①令 $p_3=1$ 把价格规范化，方程变为 p_1,p_2 的平面驻定方程组，并利用齐次性如同两种群竞争模型（[书 §6.4.2－定理 11]）那样证明平衡解 $\boldsymbol{p}=\tilde{\boldsymbol{p}}$ 是唯一且全局渐近稳定.

（6）**植物生长模型** 最简单的植物生长模型是假设植物吸收的养料和植物的体积成正比. 设植物的质量为 W，体积为 V，密度为 ρ. 则植物生长方程为 $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=kV=k\frac{W}{\rho}$，其中 k 为生长比例系数. 若生长比例随质量增加而减少，可设 $k=a-bW$，生长方程变为 $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=(a-bW)\frac{W}{\rho}$. 令 $k=\frac{a}{\rho},W_{\infty}=\frac{k\rho}{b}$，则方程改写为 $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=k\left(1-\frac{W}{W_{\infty}}\right)W$. 这个最简单的植物生长模型和人口模型相同.

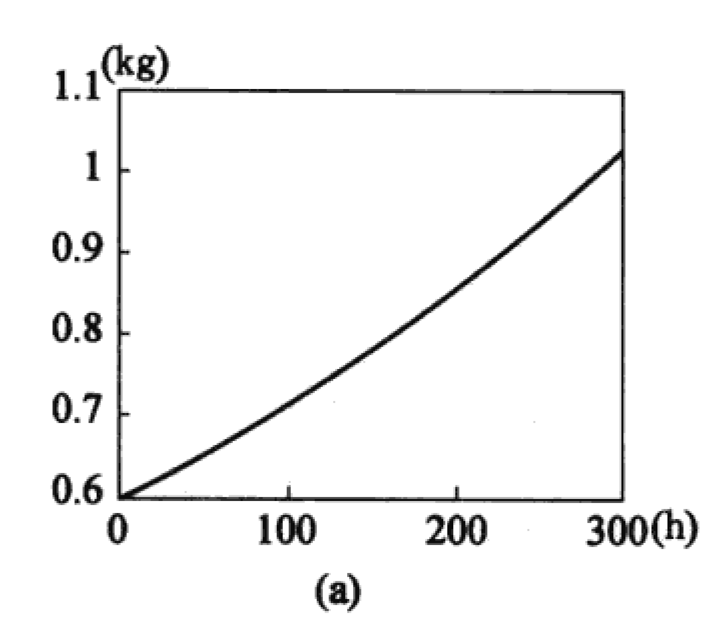
考虑较复杂的植物生长模型. 植物生长主要依靠碳和氮元素，碳由叶从大气中通过光合作用获得，而氮则由根从土壤中吸收. 植物生长对碳和氮元素的需求有一定的比例，例如 $1:\lambda$. 设 $C(t)$，$N(t)$ 分别为时刻 t 植物中碳和氮的浓度，植物消耗碳的速率为 $V\cdot f(C,N)$. 则植物消耗氮的速率为 $\lambda V\cdot f(C,N)$. 又设 R_1 为碳和氮结合产生的能量在总能量中所占的比例. 于是生长方程变为 $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=rR_1V\cdot f(C,N)$ 即 $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=r\frac{R_1W}{\rho}f(C,N)$，其中 r 为转换系数. 植物消耗函数 $f(C,N)$ 为常数时变为最简单的植物生长模型，一般应为 $f(C,N)=\frac{\alpha CN}{1+\beta CN}$，其中 α,β 为常数. 经 Δt 时段，碳数量变化为 $V(t+\Delta t)C(t+\Delta t)=V(t)C(t)+R_2W(t)\Delta t-V\cdot f(C,N)\Delta t$，其中

R_2为光合作用转化为碳的比例系数. 由 $V=\frac{W}{\rho}$,令 $\Delta t\to 0$,上式可化为$\frac{\mathrm{d}(WC)}{\mathrm{d}t}=\rho R_2 W-V\cdot f(C,N)$. 同样,对氮有$\frac{\mathrm{d}(WN)}{\mathrm{d}t}=\rho R_3 W-\lambda V\cdot f(C,N)$,其中 R_3为转化为氮的比例系数. 当记 $y_1=W, y_2=WC, y_3=WN$ 时,植物生长模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=\dfrac{rR_1}{\rho}\ \dfrac{\alpha y_1 y_2 y_3}{y_1^2+\beta y_2 y_3},\\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=\rho R_2 y_1+\dfrac{\alpha y_1 y_2 y_3}{y_1^2+\beta y_2 y_3},\\ \dfrac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}t}=\rho R_3 y_1+\dfrac{\lambda\alpha y_1 y_2 y_3}{y_1^2+\beta y_2 y_3}.\end{cases}$$

此模型难于直接求解,可利用计算机数值求解并用图形显示,如图 6.9. 还可以进一步讨论区分根叶作用的植物生长模型,见[文 14 § 13].

(7) **地中海鲨鱼** 20 世纪 20 年代,意大利生物学家棣安考纳(D'Ancona)研究了相互制约的各种鱼类总数的变化情况,发现 1914—1923 年间意大利阜姆港捕获的各种食肉鱼(鲨鱼等)占总鱼捕获量的比例在第一次世界大战(1914—1917)期间急剧增加:



(a)

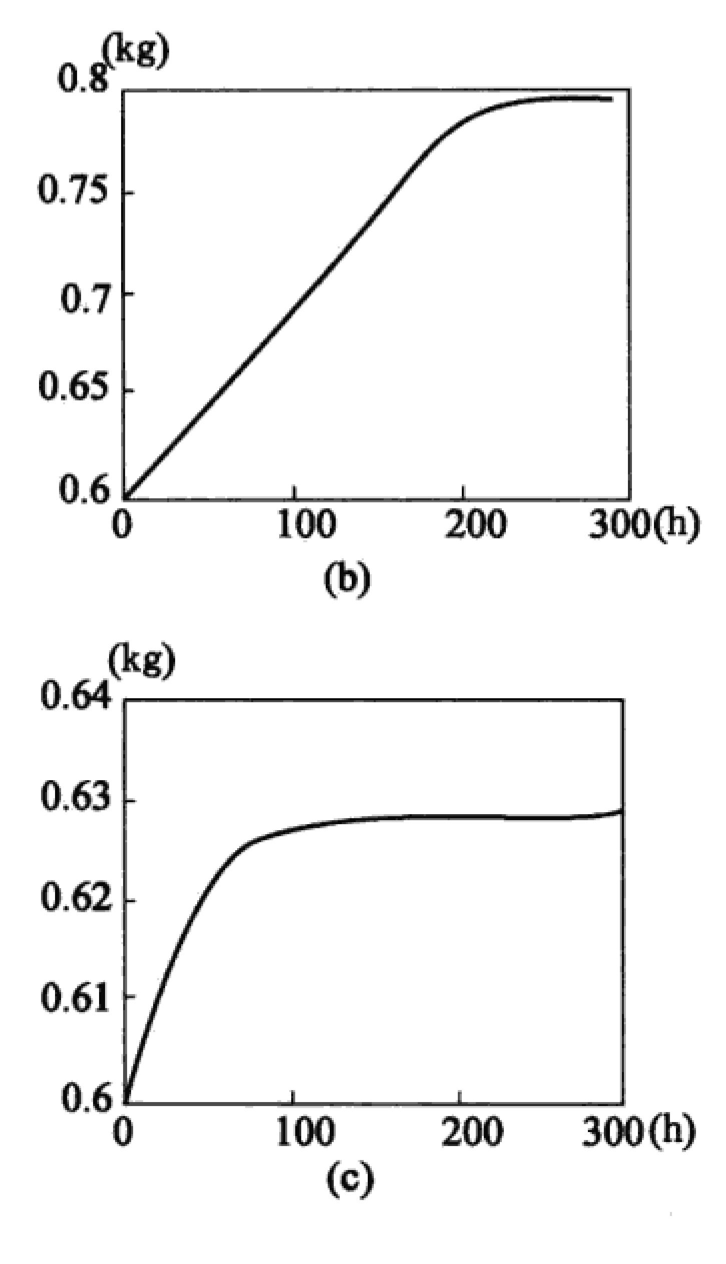


图 6.9　植物生长图

11.9,21.4,22.1,21.2,36.4,27.3,16.0,15.9,14.8,10.7.

为什么捕鱼量的减少有利于食肉鱼的生长？他找到意大利数学家沃尔泰拉(V. Volterra)，希望能解答这个问题. 沃尔泰拉为此建立了被捕食－捕食模型(见[书§1.1－例5])

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(a-by),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(-c+\mathrm{d}x),\end{cases}$$

其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别表示被食鱼和捕食鱼的数量，a,b,c,d 为正常数.

方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y(-c+\mathrm{d}x)}{x(a-by)},$$

有通解(见[书§2.1－例2])

$$x^c e^{-dx} y^a e^{-by} = k = x_0^c e^{-dx_0} y_0^a e^{-by_0},$$

或

$$a\ln y - by + c\ln x - dx = \tilde{k} = a\ln y_0 - by_0 + c\ln x_0 - dx_0.$$

在相平面 Oxy 上,点 $A\left(\frac{c}{d},\frac{a}{b}\right)$ 是奇点. 可以证明,当 $x>0,y>0$ 时,除点 A 外,通解代表一族闭轨线. 记

$$\begin{cases} f(y) = a\ln y - by, \\ g(x) = c\ln x - dx, \end{cases} \quad x>0, y>0.$$

显然,$g'(x) = \frac{c}{x} - d = 0$,$x = \frac{c}{d}$ 为 $g(x)$ 的极大值点;$f'(y) = \frac{a}{y} - b = 0$,$y = \frac{a}{b}$ 为 $f(y)$ 的极大值点. 且当 $x\to 0^+$ 或 $x\to +\infty$ 时 $g(x)\to -\infty$;当 $y\to 0^+$ 或 $y\to +\infty$ 时 $f(y)\to -\infty$. 于是,对任意 $0<x_m<c/d$ 有一对应值 $\tilde{x}_m > c/d$ 使 $g(\tilde{x}_m) = g(x_m)$;同样,对任意 $0<y_m<a/b$ 有一对应值 $\tilde{y}_m > a/b$ 使 $f(\tilde{y}_m) = f(y_m)$. 且对区间 $x_m < x < \tilde{x}_m$ 中的任意 x 均有两值 $y,\tilde{y}$ 满足 $f(\tilde{y}) = f(y) = f(a/b) + g(x_m) - g(x) \equiv \tilde{k}_m - g(x)$,这意味着在相平面 Oxy 上

$$a\ln y - by + c\ln x - dx = \tilde{k}_m \tag{$*$}$$

构成围绕奇点 A 的闭轨线. 因 x_m 的任意性,表示式($*$)构成一族围绕奇点 A 的闭轨线. 同样可取任 y_m,令 $\tilde{k}_m = f(y_m) + g(c/d)$,由($*$)构成一族围绕奇点 A 的闭轨线. 如图6.10.

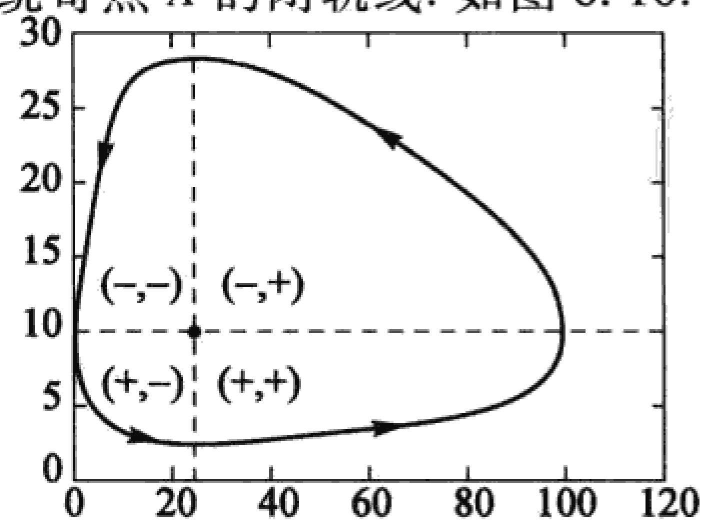


图6.10 被食鱼和捕食鱼轨线图貌

相平面 Oxy 上的闭轨线意味着方程存在周期解 $x(t),y(t)$，设周期解的周期为 $T>0$：$x(t+T)=x(t),y(t+T)=y(t)$. 由方程知 $\frac{x'}{x}=a-by$，于是

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{x'(t)}{x(t)}\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T (a-by)\,\mathrm{d}t,$$

$$\frac{1}{T}[\ln x(T)-\ln x(0)]=a-\frac{1}{T}\int_0^T by(t)\,\mathrm{d}t.$$

因 $x(T)=x(0)$，得

$$\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,\mathrm{d}t=\frac{a}{b}.$$

同样可得

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t=\frac{c}{d}.$$

即周期解 $x(t),y(t)$ 的平均值为 $\bar{x}=\frac{c}{d},\bar{y}=\frac{a}{b}$.

当存在捕鱼活动时，设捕捞率为 ε，则被捕食 - 捕食模型应改为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(a-by)-\varepsilon x=x(a-\varepsilon-by),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(-c+dx)-\varepsilon y=y(-c-\varepsilon+dx).\end{cases}$$

于是其解 $x(t),y(t)$ 的平均值为

$$\bar{x}=\frac{c+\varepsilon}{d},\bar{y}=\frac{a-\varepsilon}{b}.$$

因棣安考纳的数据实际上是捕食鱼的百分比在每一年中的平均值，从上式可看出，较大的捕鱼量会增加被食鱼的数量，而减少捕食鱼的数量；反之，较小的捕鱼量会减少被食鱼的数量，而增加捕食鱼的数量. 这结果称为沃尔泰拉原理. 它解释了棣安考纳的疑问.

沃尔泰拉原理也可应用于杀虫药的使用. 杀虫药不仅可以杀

死害虫,同时也可以杀死吃害虫的益虫,而且使用的杀虫药越多越会使相应的害虫增加.

(8) **加拿大山猫循环** 加拿大的针叶树森林覆盖几百万平方千米面积,人们注意到生活在其中的鸟、鱼及哺乳动物等几种物种总数,大致十年一循环变化. 经追踪知兔子是山猫的主要食物来源. 因 18 世纪以来拥有从事贸易特许权的哈得逊湾公司保留有二百多年的毛皮收购数. 如图 6.11 是山猫和美洲兔毛皮收购数图. 将山猫和美洲兔群落看成是一个捕食者 - 被食者关系的封闭系统. 其模型为$\frac{dx}{dt}=xf(x,y)$,$\frac{dy}{dt}=yg(x,y)$,其中 x,y 分别为山猫和美洲兔数量. 捕食者与被食者的关系可表示为有生物学意义的条件(其中(a)为 $y=0,x$ 小)

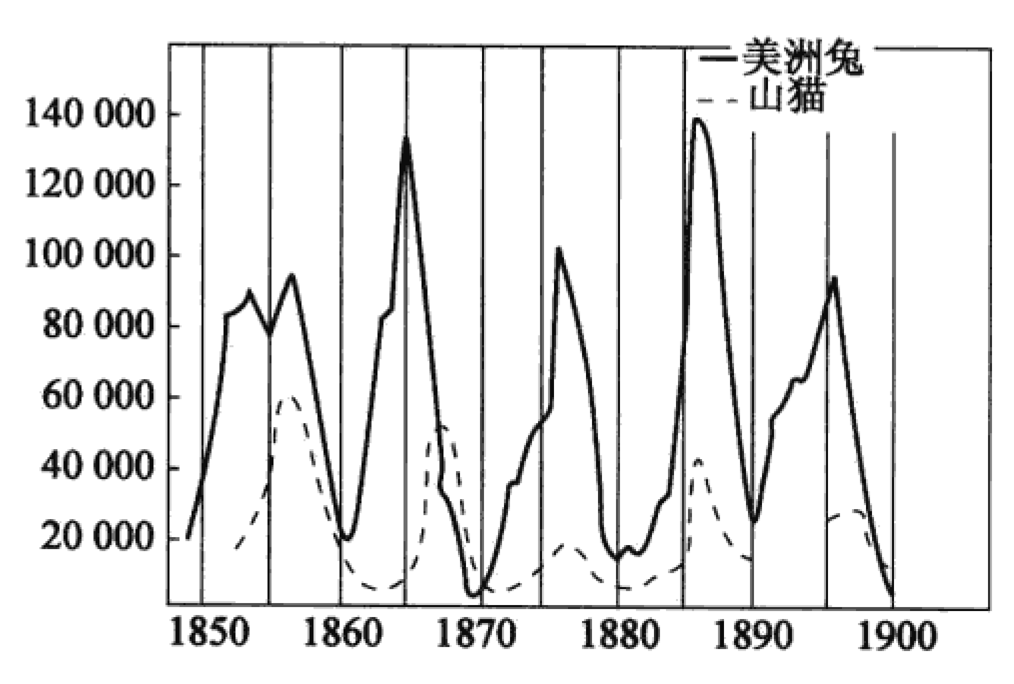


图 6.11 山猫和美洲兔毛皮总数

$$\frac{\partial f}{\partial y}<0,\frac{\partial g}{\partial x}>0,\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a)}<0,\frac{\partial g}{\partial y}<0,$$

$$f(0,y_1)=f(x_1,0)=g(x_2,0)=0,x_1>x_2>0,$$

且临界点位于兔子等倾斜线的上升部分并在临界点邻域线性近似是稳定的. 此时有

柯尔莫哥洛夫循环定理 山猫和美洲兔系统在第一象限内存

在一个循环(极限环).

适当选取系数时,模型为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x[\alpha^2-\beta^2(x-\gamma^2)^2-\delta^2y],$$

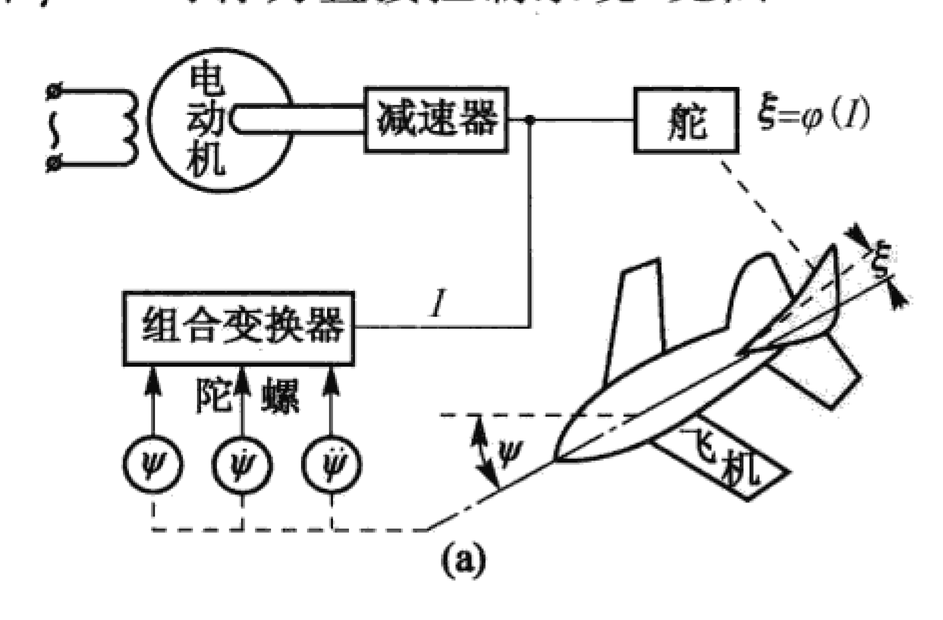
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(-a^2+b^2x-c^2y).$$

上述只是关于两物种相互制约群落的论证之一.生物学家、生态学和数学家们之间展开了许多讨论和争议,探究其循环原因.参看[文9 §18.2,文10 §4.2].

(9) **控制系统的绝对稳定性** 下列非线性常微分方程组表示了一类控制系统的运动

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\varphi(\sigma)\boldsymbol{b},\\ \dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=\varphi(\sigma),\sigma=\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\gamma\xi,\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 是 n 维向量,表示控制系统的某种状态,称为状态变量;ξ 是辅助(控制)变量;σ 为反馈信号;常量 γ 和向量 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{e}$ 是控制参数;函数 $\varphi(\sigma)$ 为控制机构,一般具非线性特征(*):连续,$\varphi(0)=0,\sigma\varphi(\sigma)>0(\sigma\neq0$ 时),$\int_0^\infty\varphi(\sigma)\mathrm{d}\sigma\to\infty$.当 $\gamma\neq0$ 时称为间接控制系统.当 $\gamma=0$ 时称为直接控制系统.见图6.12.



(a)

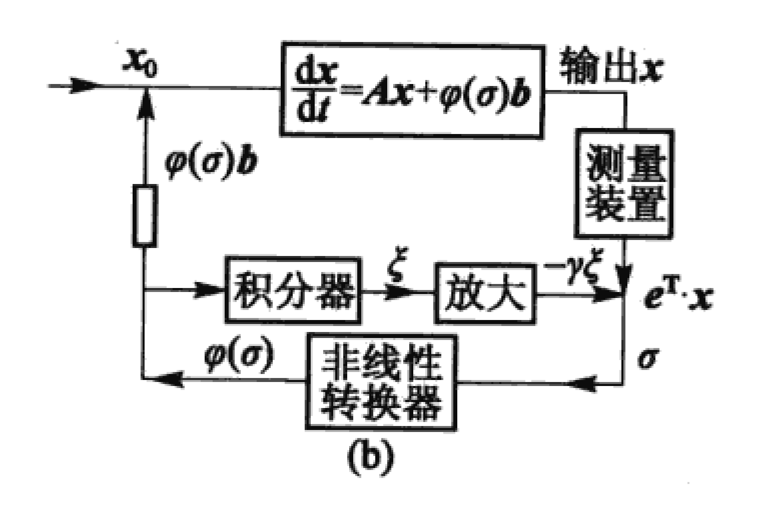


图 6.12 飞机自动驾驶仪控制

控制系统有平衡解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, $\xi=0$, 因变量 x,ξ 的活动范围不仅仅在原点邻域. 要考虑系统的全局稳定性. 当对满足特征(*)的任意函数 $\varphi(\sigma)$, 系统零解均(全局)渐近稳定时, 称系统为(全局)绝对稳定.

对间接控制系统 $\gamma\neq0$. 系统可化为

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\varphi(\sigma)\boldsymbol{b},\\[2mm] \dfrac{d\sigma}{dt}=\boldsymbol{e}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\rho\varphi(\sigma),\rho=\boldsymbol{e}^{T}\boldsymbol{b}-\gamma.\end{cases}$$

显然, 如系统绝对稳定, 则取 $\varphi(\sigma)=\mu\sigma$ 时系统零解应渐近稳定, 即对应的线性系统的特征方程应有负实部根. 可得系统绝对稳定的必要条件为: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 没有具正实部的特征值, 也没有零特征值. 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均具负实部时, 要求控制参数 $\gamma>0$. 进一步构造如下形式 V 函数

$$V(\boldsymbol{x},\sigma)=\boldsymbol{x}^{T}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\int_{0}^{\sigma}\varphi(\sigma)d\sigma.$$

可以证明, 如果找到一个负定的对称矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$ 的对称矩阵 $\boldsymbol{B}$(必存在唯一)满足条件 $\rho<\boldsymbol{d}^{T}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{d}$(其中 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{e}$), 则系统是全局绝对稳定的. 参看[《常微分方程(第二版)》§6.6]及[文 20 §9.4].

*(10) **混沌普遍性实例** 自然界中普遍存在混沌现象，只是因其复杂性及缺少工具而难于发现和证实. 从 1975 年 Li – Yorke 定理提出后，已在自然界发现存在大量混沌现象. 如小行星带与流星、地磁场的反向运动、鸡胚心肌细胞的强迫跳动、脑电图显示的混沌运动、广义相对论宇宙学中混沌等，见[文 44 § 1.4]. 一般认为，在任何领域，当非线性足够强时，都会遇到混沌现象.

(a) **约瑟夫森(Josephson)结中的噪声** 在微波作用下晶体约瑟夫森结中观察到相当于温度为 5×10^4 K 的宽带噪声. 设结的相位差为 φ，结上电压 U 有 $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{2eU}{\hbar}$，结的电路方程为 $C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}+\frac{U}{R}+I_c\sin\varphi=I_{rf}\cos\omega t$，式中 C 为结电容，I_{rf} 为射频电流，ω 为射频频率. 方程可化为 $\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2\sin\varphi=\frac{2e}{\hbar C}I_{rf}\cos\omega t$. 此方程与强迫阻尼摆的方程完全相同. 具有宽带功率谱的混沌运动.

(b) **B – R 化学反应** B – R 化学反应是用四价 – 三价铈离子偶联催化的柠檬酸被溴酸钾氧化的一种很复杂的反应. 曾有人提出一个 20 个变量的模型，其一种简化是 9 种中间样品的 9 种反应，可写成 7 个常微分方程，其数值模拟与实验结果一致，得到的相空间轨迹都可镶嵌到一个 3 维空间中. 这可进一步简化为 3 维非线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\tau}=(1-\phi)\xi+\eta-\xi\eta-\xi\zeta,$$

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\tau}=-(1+\phi)\eta+\zeta-\xi\eta+m,$$

$$P\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\tau}=-(1+P\phi)\zeta+\xi-\xi\zeta,$$

其中 m,P,ϕ 是参数. 这与洛伦茨方程类似，是一个混沌方程.

(c) **太阳系中的混沌运动** 太阳系天文学中有两个长期未解决的难题：小行星带的柯克伍德(Kirkwood)间隙与地球上流星的起源问题. 小行星带位于火星和木星之间，其周期与木星周期之

比为简单有理数的小行星很少,这便是柯克伍德间隙. 行星运动可用近可积哈密顿系统表示([书 §6.6.2]),周期比为简单的分数表明存在共振,研究表明受扰系统在共振区内存在混沌运动. 小行星的运动存在着几个标度差别很大的频率,从而在混沌运动下足以使小行星与火星发生近碰撞而脱离小行星带形成柯克伍德间隙,并成为地球上的流星. 这样,混沌运动解答了柯克伍德间隙与地球上流星的起源问题. 太阳系中另一个混沌运动的例子是木星的卫星Hyperion. 经研究,木星的卫星 Hyperion 处于 3/2 共振与 1/1 共振的重叠区,它有同时发生 3/2 共振与 1/1 共振的趋势,这使它产生混沌运动. 可参见[文 44 §18.3].

§6.3.4 历史与人物

(1) **简史(非线性微分方程)** 线性微分方程理论在过去两百年间已研究得很广泛、深入,成为相当完备的一门学科. 而非线性方程则知之甚少,直至现在仍在发展中. 虽然很多物理问题中线性近似有其价值,但一般问题多是非线性的,爱因斯坦甚至认为:由于物理中的基本方程是非线性的,全部数学物理应该重写. 可以说,常微分方程的现代理论是从研究非线性微分方程的一般理论开始的,其中主要分支是由庞加莱、李雅普诺夫和伯克霍夫开创的 20 世纪才发展起来的定性、稳定性和动力系统理论. 六七十年代后才出现研究分支、混沌和完全可积性的热潮. 由于科学技术的发展和各种新学科的出现,从 20 世纪中期开始,非线性常微分方程又开辟了非线性控制方程、生态方程、时滞微分方程、泛函微分方程、脉冲微分方程、随机微分方程及时标微分方程等一系列新发展方向.

(2) **庞加莱**(J. H. Poincaré,1854—1912) 在 20 世纪初公认为当代最伟大数学家. 1879 年在卡昂大学任讲师,两年后即就任巴黎大学教授,直至去世. 每年讲授一门不同的课程. 以伟大的首创精神和卓越的技巧处理了纯数学和应用数学的几乎所有领域.

32 岁即当选为法国科学院院士. 他在分析方面推广了函数的周期性而创造了自守函数理论. 他在天体力学的研究完成了三卷本《天体力学的新方法》(1892—1899),其中轨道的稳定性问题开创了非线性微分方程的定性理论新方向,渐近展开理论引发了对发散级数的研究. 其论著《位置分析》开创了现代代数拓扑的新学科. 1906 发表的电子动力学的著名论文,从电磁学出发独立得出特殊相对论的很多结果. 作为业余爱好还进行科普讲演和写作,后编成《科学与假设》(1902)、《科学的价值》(1905)、《科学与方法》(1909)等名著. 他被认为是能对那个时代的全部数学有创造性的掌握的最后一人.

(3) **李雅普诺夫**(A. M. Lyapunov,1857—1918)　俄国数学家和机械工程师. 1876 年入圣彼得堡大学,1892 年获博士学位,是写出不朽博士论文的奇才. 其博士论文《运动稳定性一般问题》(1892)开创了非线性微分方程研究的新方向. 1893 年起任哈尔科夫大学教授,1901 年被选为圣彼得堡科学院院士,并担任数学协会主席. 曾被意大利、巴黎科学院选为国外院士. 1886—1902 年在俄国曾领导了数学物理和概率论的研究. 他开创的求非线性常微分方程解的稳定性的李雅普诺夫函数方法(亦称直接方法)奠定了常微分方程稳定性理论的基础. 成为 20 世纪常微分方程理论的三大发展方向之一.

(4) **伯克霍夫**(G. D. Birkhoff,1884—1944)　美国数学家,哈佛大学毕业,曾在普林斯顿大学、哈佛大学任教. 美国数学界公认的领袖人物. 1912 年庞加莱去世前把受限三体问题归结为一个几何问题,但特殊情形未证明. 伯克霍夫证明了这个庞加莱最后定理,还引进了动力系统的运动极小集、回归集等概念,开辟了动力系统研究的新方向. 他提出的极大极小原理推动了大范围变分法的产生. 证明的逐点遍历性定理导致动力系统遍历理论的产生. 他在边值问题、奇异微分方程、奇异差分方程等方面有很多工作.

(5) **李纳**(A. Lienard,1869—1958)　法国科学家,执教于巴

黎矿业学院,后为院长.1933 年当选为法国数学会主席.主要从事电学、磁学、弹性、流体力学研究及研究其他科学中碰到的数学问题.

(6) **范德波尔**(B. Van de Pol,1889—1959)　荷兰科学家.专攻无线电工程方面的理论问题,于 20 世纪 20 年代首先提出无线电振荡的范德波尔方程,从而引起李纳等人对非线性力学中自激振荡的研究.

(7) **斯梅尔马蹄**　1960 年斯梅尔(S. Smale)在巴西里约热内卢访问,在海滩上边休息边考虑拓扑和动力学问题.对二阶常微分方程在扰动下的性态,他曾给了一个猜想.后来,Levinson 写信告诉他以前的一篇文章,包含了其猜想的反例,那篇文章是第二次世界大战期间英国数学家 M. Cartwright 和 J. L. Littlewood 大量工作所阐述,他们分析了由战争所提出的有关无线电波的方程,发现了奇怪的特性、混沌的征兆.斯梅尔夜以继日地工作,以解决信中的问题,把 Levinson 的解析方法转化为自己的几何思考方法,因他的强项是几何分析,只有按自己的方式重新组织了数学时,才认为真正了解了数学.最后他确信 Levinson 是对的,他的猜想错了,在此过程中他发现了马蹄.斯梅尔马蹄是 Cartwright - Littlewood 和 Levinson 的方程按几何观点理解的自然产物,帮助理解混沌的机理,说明动力学中有大量的不可预见性.在海滩上除发现马蹄外,斯梅尔还考虑拓扑学的庞加莱猜想,证明了维数大于 4 时庞加莱猜想成立. 这工作使他获得 1966 年菲尔兹奖.斯梅尔是反越战战士,由于到巴西的访问由美国国家科学基金(NSF)资助,美国总统顾问 1968 年在《科学》杂志上撰文批评浪费纳税人的钱.见[文 40].

(8) **洛伦茨吸引子**　洛伦茨(E. N. Lorenz)毕业于麻省理工学院气象系,1948 年起在麻省理工学院做博士后工作,主要兴趣在全球和大陆尺度的大气结构动力学.1955 年得到了因 M. Thomas 辞职而空缺的位置和科研项目.项目是用计算机进行天气预

报，当时用的是线性统计方法．他接手后提出用不是线性类型的方程组进行检验．选择了大大简化被滤波的数值天气预报方程式，并购买了小型计算机，一次乘法约需 17 ms，打印一行数字约需 10 s．开始时选择 14 个变量的方程组，经压缩又压缩，最后变成 12 个．参数中包含驱动模式天气所需要的外热源的强度和分布，这样可以改变参数进行试验．但总是出现毫无用处的稳定状态．经多次试验后，最后发现了一个解，它明显地模拟出在用水模拟地球空气的转盘实验中所观察到的振荡．这时，他认识到需要一个解是非周期的方程组才可能否定线性预报．这是 1959 年，他准备将这碰巧找到的一个合适的方程组及其试验结果写成《动力方程组解的统计预报》报告参加在东京举行的数值天气预报会议．在进一步进行试验时，数值方法是以 6 小时为增量计算未来天气，4 步即 1 天打印 1 次 12～14 个变量值，约 1 分钟模拟 1 天．为把打印出的数值排成 1 行，数值四舍五入到三位数字．有一次，为了更为详细地检查，决定重复某些计算．停机后重新输入再进行计算，他在走廊上喝了一杯咖啡，约 1 小时，计算机已模拟了 1 个月的天气．但打印出不同的数值，开始以为是真空管或其他计算机部件坏了．经检查才发现是输入时因舍入误差引起的．从而发现了方程组的解对初值敏感这个混沌现象．1961 年到 M. Thomas 建立的旅行者天气中心访问时，B. Seltzmann 告诉他用下面加热产生的对流流体运动的 7 个方程构成的方程组的数值解中有一个解稳定不下来，经查看到其中 4 个变量很快变得非常小．他回到麻省理工学院，取仅有 3 个变量的方程组，得到了他长期寻找的系统．这便是洛伦茨方程，它并不能非常好地描述实际对流运动，主要说明一个确定性的系统能以最简单的方式表现出非周期的形态．当时是湍流研究的热潮．他以“确定性的湍流”为题投稿《气象科学杂志》，编辑认为方程缺少湍流的性质，改以“确定性的非周期流”发表．由于洛伦茨方程的解有界但是在两个不稳定状态中交替且不规则地振荡，与一般的吸引子不同，是一个奇异吸引子．1963—1964 年洛伦茨在

《气象科学杂志》等杂志上发表了4篇有关论文.但仅在气象学家中流传.1972年洛伦茨还为美国科学发展协会会议准备一份报告和新闻公报,其题目为《可预报性:在巴西一只蝴蝶翅膀的拍打能够在美国得克萨斯州产生一个龙卷风吗?》.洛伦茨被称为"蝴蝶效应"提出者,混沌理论之父.洛伦茨于2008年4月16日逝世,享年90岁.虽然洛伦茨已发现了混沌现象,但还需要靠数学家的努力才能得到科学界的公认,成为一门新学科,这是另一个故事了.见[文39].

(9) Li – Yorke **混沌的故事**　混沌的定义是首先由李天岩(Li)和约克(J. A. Yorke)在论文《周期3蕴含混沌》中给出的,这篇开创混沌新学科的文章的发表经过后来由李天岩作了介绍.1972年左右李天岩是美国马里兰大学的研究生,他的博士生导师约克在大学的"流体动力学与应用数学所"工作,所里有一个气象研究项目,由A. Felle教授主持.1972年A. Felle教授将洛伦茨所写的关于"气象预测"模式的4篇文章介绍给约克教授,认为文章过于理论化、数学化,也许搞数学的会比较感兴趣.他们读了那些文章,觉得很有意思.

1973年4月,约克在办公室中对李天岩说"我给你一个好的思想".这即是Li – Yorke定理,其原始出发点在洛伦茨的文章中,李天岩当时即说"这太适合《数学月刊》了!"两个星期后,李天岩完全证明了这个定理.他们写好文章,真的投给《数学月刊》.但给退了回来,认为过于偏向研究性,不宜发表,或转寄或修改.因文章内容与李天岩的博士论文无关.李天岩把它压了下来.

1974年是马里兰大学数学系的生物数学"特别年",请了著名的普林斯顿大学R. May教授来校讲学,最后一次介绍logistic离散模型(见[文49]),提及当参数较大时迭代值在整个区间中四处跑,他无法解释这一现象,认为也许是计算误差所致.约克在送May上飞机时,把那篇在桌上躺了近一年的文章给他看,May看后大吃一惊,认为文章很大程度上解释了他的疑问.约克回来后即找

了李天岩,尽快修改文章发表. 这文章最后发表在《数学月刊》1975 年 12 月份那期上(见[文 41]). May 是举世闻名的教授,暑假到欧洲讲学时将 Li - Yorke 混沌和洛伦茨吸引子四处传播,从而掀起了混沌研究的热潮. 见[文 42].

(10) **日本吸引子** 1961—1962 年,京都大学工学院机电系研究生上田皖亮(Y. Ueda)在用模拟计算机求解达芬方程 $x''+kx'+x^3=B\cos t$ 时曾发现对某些参数如 $k=0.05$, $B=7.5$, 当 t 很大时其解会乱走一通,如图 6.13. 当时其导师及其他人不相信他的结果,认为是计算出错. 在日本当时的环境下他的结果无法发表. 1978 年法国 D. Ruelle 到日本访问才知道上田的结果,后来到处宣扬,上田吸引子或日本吸引子才为人所知. 日本吸引子的发现时间比洛伦茨吸引子还早,是最早的混沌. 但因开始时没有正式发表,后来才为人所知,其发现混沌的功劳被洛伦茨夺去了. 经过 D. Ruelle 等的努力,当时的部分原始数据资料被保存在美国 Brookhaven 国家实验室. 见[文 43].

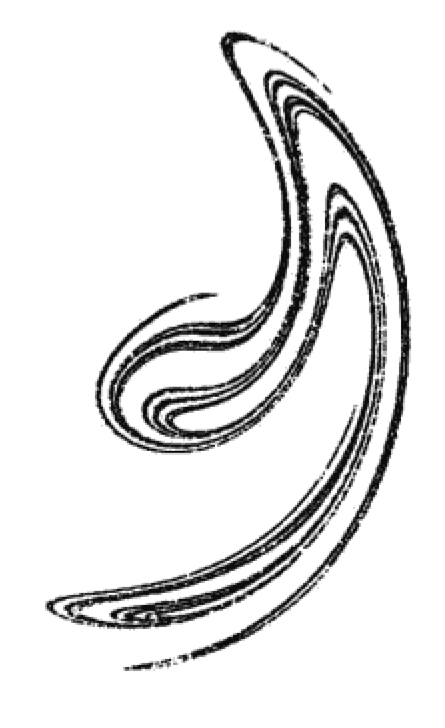


图 6.13 日本吸引子

历史人物尚有:哈密顿([§5.3.4 - (4)])、薛定谔([§8.3.4 - (5)]).

§6.4 习题与习题解答

§6.4.1 测试练习解答

1. (1) 由 $4x-2x^2=2x(2-x)=0$, 驻定解为 $x=0$, $x=2$. 对驻定解 $x=0$, 线性近似方程为 $x'=4x$, 特征方程 $\lambda=4$ 有正根,零解 $x=0$ 不稳定. 对驻定解 $x=2$, 取变换 $y=x-2$, 方程化为 $y'=x'=$

$4x-2x^2=4(y+2)-2(y+2)^2=-4y-2y^2$. 线性近似方程为 $y'=-4y$,特征方程 $\lambda=-4$ 有负根,零解 $y=0$ 即驻定解 $x=2$ 渐近稳定.

(2) 由 $y-x-x^2=0, 3x-y-x^2=0$,两式相加得 $2x-2x^2=2x(1-x)=0$,驻定解为 $x=0, y=0$ 和 $x=1, y=2$. 对驻定解 $x=0$, $y=0$,线性近似方程组为 $x'=y-x, y'=3x-y$,特征方程 $\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1\\ -3 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2+2\lambda-2=0$ 有正根 $\lambda=-1+\sqrt{3}$,驻定解 $x=0, y=0$ 不稳定. 对驻定解 $x=1, y=2$,取变换 $\tilde{x}=x-1, \tilde{y}=y-2$,方程组化为 $\tilde{x}'=\tilde{y}-3\tilde{x}-\tilde{x}^2, \tilde{y}'=\tilde{x}-\tilde{y}-\tilde{x}^2$. 线性近似方程为 $\tilde{x}'=\tilde{y}-3\tilde{x}, \tilde{y}'=\tilde{x}-\tilde{y}$,特征方程 $\begin{vmatrix}\lambda+3 & -1\\ -1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2+4\lambda+2$ 有负根 $\lambda=-2\pm\sqrt{2}$,零解 $\tilde{x}=0, \tilde{y}=0$ 即驻定解 $x=1, y=2$ 渐近稳定.

2. (1) 对应的特征方程为 $\lambda^4+2\lambda^3+4\lambda^2+3\lambda+2=0$. 赫尔维茨行列式

$$a_0=1, \Delta_1=2, \Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=5,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{vmatrix}=2\times 8-9=7, \Delta_4=a_4\Delta_3=2\times 7$$

均大于零,微分方程的零解渐近稳定.

(2) 对应的特征方程为 $\lambda^5+2\lambda^4+4\lambda^3+6\lambda^2+5\lambda+4=0$. 赫尔维茨行列式

$$a_0=1, \Delta_1=2, \Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 6 & 4\end{vmatrix}=2,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 6 & 4 & 2\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix}=2\times 14-28=0.$$

第 3 项不大于零. 微分方程的零解不是渐近稳定.

(3) 一次近似方程为 $x' = -2x - y, y' = x - 2y, z' = x + 3y - z$，其特征方程

$$\begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda+2 & 0 \\ -1 & -3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 9\lambda + 5 = (\lambda+1)(\lambda^2+4\lambda+5) = 0.$$

特征根均具负实部，微分方程的零解渐近稳定.

或赫尔维茨行列式

$$a_0 = 1, \Delta_1 = 5 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 40 > 0, \Delta_3 = a_3\Delta_2 > 0,$$

微分方程的零解渐近稳定.

3. (1) $V = x^2 + y^2$ 定正. V 对方程组的全导数为

$$V' = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot y' = 2x \cdot (y + \alpha x - x^3) + 2y(-x + \alpha y - y^3)$$
$$= 2(\alpha - x^2)x^2 + 2(\alpha - y^2)y^2.$$

当 $\alpha \leqslant 0$ 时 V' 定负，方程组的零解渐近稳定；当 $\alpha > 0$ 时在原点邻域 V' 定正，方程组的零解不稳定.

(2) $V = 2x^2 + y^2$ 定正. V 对方程组的全导数为

$$V' = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot y' = 4x \cdot (-x + xy^2) + 2y(-2x^2y - y^3)$$
$$= -(4x^2 + 2y^4).$$

因 V' 定负，方程组的零解渐近稳定.

(3) $V = y^2 - x^2$ 为变号函数，V 对方程组的全导数

$$V' = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2xy^2$$
$$= x^2 + (x+y)^2 + (1-2x)y^2$$

在原点邻域是定正函数. 因在原点的任意小邻域均存在点 (x, y)，使 $V(x, y) > 0$，故方程组的零解不稳定.

(4) $V = x^2 + x^4 + y^2 + y^4 = x^2(1 + x^2) + y^2(1 + y^2)$ 定正. V 对方程组的全导数为 $V' = (2x + 4x^3)(y + 2y^3) + (2y + 4y^3)(-x - 2x^3) = 0$. 因 V' 恒等于零，方程组的零解稳定.

4. (1) 利用在原点邻域的函数展开式,可将方程组右端化为线性及高次项之和:

$$x' = x - y + [-(e^y - 1 - y) + (\cos y - 1)],$$
$$y' = 3x - 2y - (\sin y - y),$$

其线性近似方程组为 $x' = x - y, y' = 3x - 2y$, 其特征方程 $\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -3 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ 有负实部根(或赫尔维茨行列式均大于零),线性近似方程组的零解渐近稳定. 因线性近似方程组的特征值均无零实部,根据线性近似方程组的稳定性定理,原非线性驻定方程组的零解渐近稳定.

(2) 取定正函数 $V = x^2 + y^2$, 有 $V' = 2\alpha(x^4 + y^6)$. 当 $\alpha < 0$ 时 V'定负,方程组的零解渐近稳定;当 $\alpha = 0$ 时 V'恒等于零,方程组的零解稳定;当 $\alpha > 0$ 时 V'定正,方程组的零解不稳定.

(3) 取定正函数 $V = x^4 + y^2$, 有 $V' = -4x^6 - 4y^6 = -4(x^6 + y^6)$定负,方程组的零解渐近稳定.

(4) 取定正函数 $V = x^2 + y^2 + (y + z)^2$, 有 $V' = 2xy - 2yx + 2(y + z)(-x + x) = 0$, 方程组的零解稳定.

5. (1) 方程是线性方程,奇点为原点,其系数有

$$p = -(a + d) = -4 < 0, q = ad - bc = 4 > 0,$$
$$\Delta = p^2 - 4q = 0, b \neq 0.$$

因此奇点为不稳定退化结点.

(2) 由方程组右端为零时 $2y = 0, x^2 - y^2 - 1 = 0$ 有解 $x = 1, y = 0$ 及 $x = -1, y = 0$. 非线性方程有两个奇点$(1,0)$, $(-1,0)$. 通过变换 $\tilde{x} = x - 1, \tilde{y} = y$ 将奇点$(1,0)$化为原点$(0,0)$,方程变为$\tilde{x}' = 2\tilde{y}, \tilde{y}' = 2\tilde{x} + \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2$,其线性近似方程系数有 $p = 0, q = -4 < 0$,原方程线性奇点$(1,0)$为鞍点(不稳定);通过变换 $\tilde{x} = x + 1, \tilde{y} = y$ 将奇点$(-1,0)$化为原点$(0,0)$,方程变为 $\tilde{x}' = 2\tilde{y}, \tilde{y}' = -2\tilde{x} + \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2$,其线性近似方程系数有 $p = 0, q = 4 > 0$,原方程线性奇点$(1,0)$为中心.

6. (1) 取 $V = x^2 + y^2$,则有 $V' = 2(x^2 + y^2)[1 - (x^2 + y^2)] =$

$2V(1-V)$. 当 $V=1$ 时有闭轨线,且 V 由小于 1 增大到大于 1 时 V' 从正变负,故方程组有稳定极限环 $x^2+y^2=1$.

(2) 当存在 r_0,使 $f(r_0)=0$,则存在闭轨线 $r=r_0,\varphi=t_0+t$. 且当 r 增大,$f(r)$ 的符号从正变负时有稳定极限环,从负变正时有不稳定极限环,通过零时不变号则有半稳定极限环.

7. (1) 垂直等倾斜线为圆 $x^2+y^2=1$,水平等倾斜线为两直线 $x=0,y=0$,奇点有 $(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)$. 轨线图貌如图 6.14(a).

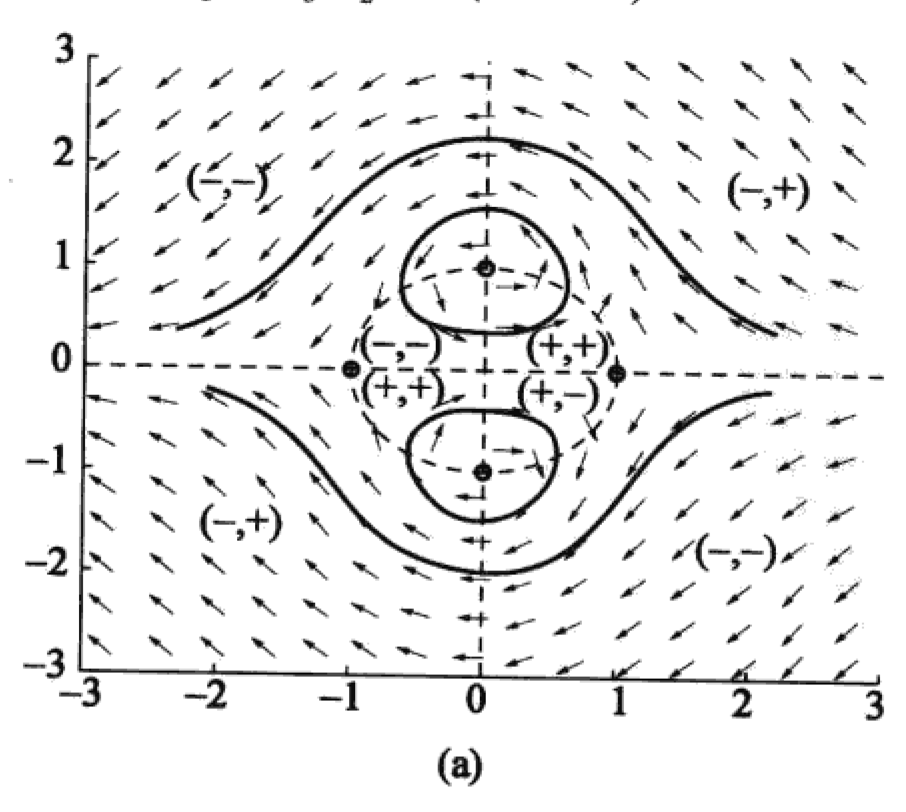
(2) 方程化为 $x'=2(1-x)(2-y),y'=(y-x)(y+x)$,垂直等倾斜线为两直线 $x=1,y=2$,水平等倾斜线为两直线 $y=x,y=-x$,奇点有 $(1,-1),(1,1),(2,2),(-2,2)$. 轨线图貌如图 6.14(b).

§6.4.2 补充习题解答

1. (1) 对应的特征方程为 $\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+2=0$. 零解渐近稳定要求赫尔维茨行列式均大于零:

$$a_0=1,\Delta_1=a>0,\Delta_2=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & b \end{vmatrix}=ab-2>0,$$

$$\Delta_3=a_3\Delta_2=2(ab-2)>0.$$



(a)

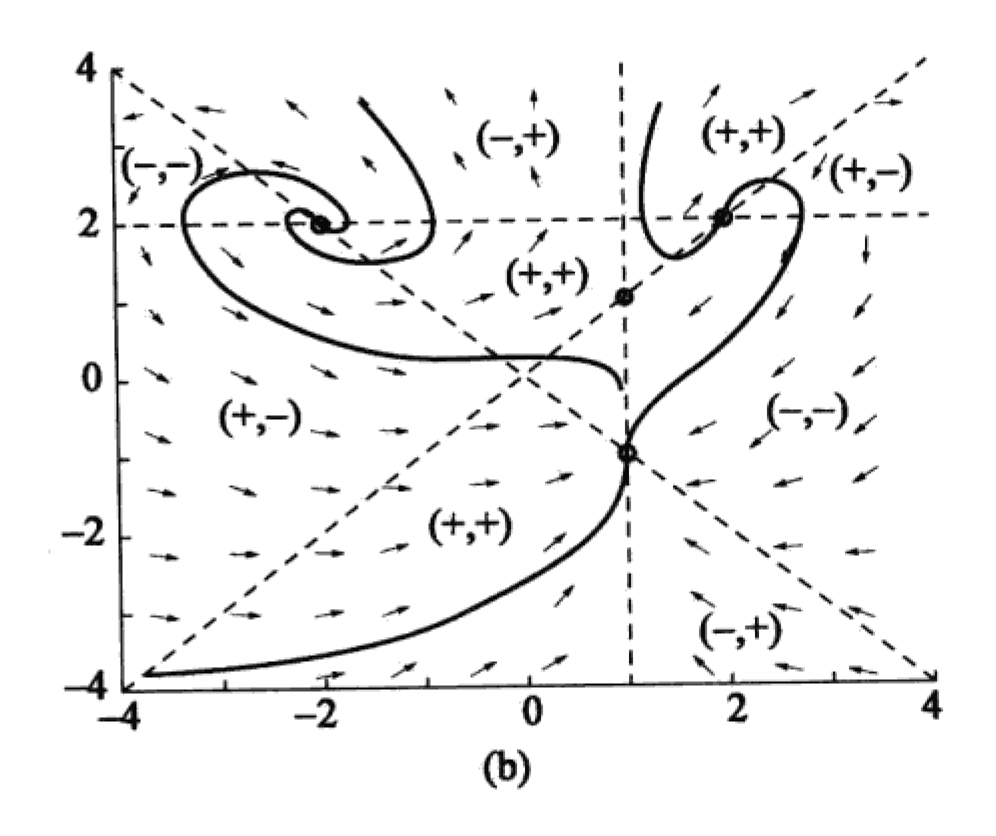


图 6.14　轨线图貌

解得 $a>0, b>\frac{2}{a}$ 时微分方程的零解渐近稳定.

（2）利用展开式 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, x\in(-\infty,+\infty)$ 及

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n, x\in(-1,1],$$

$$(1+x)^{\mu}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}x^n, x\in(-1,1),$$

由 $4y+e^{-3x}=1+4y-3x+\cdots$ 可得

$$\ln(4y+e^{-3x})=\ln(1-3x+4y+\cdots)=-3x+4y+\cdots,$$

$$\sqrt[3]{1-6x}=1+\frac{1}{3}(-6x)+\cdots.$$

将方程组右端写成线性项加高次项形式，则其线性近似方程组为

$$x'=-3x+4y, y'=-2x+2y.$$

其特征方程 $\begin{vmatrix}\lambda+3 & -4\\ 2 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda+2=0$，有特征根 $\lambda=-\frac{1}{2}\pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{7}}{2}$. 因特征根均具负实部，故线性近似方程的零解为渐近稳定，

原方程的零解也是渐近稳定.

2. 当 $\alpha\leqslant 0$ 时取定正函数 $V=x^2+y^2$,因 $V'=2\alpha x^2-2(x^4+y^4)$ 定负,方程组的零解渐近稳定. 而当 $\alpha>0$ 时因线性近似方程组的特征方程 $\lambda^2-\alpha\lambda+1=0$ 的根 $\lambda=\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2-1}$ 有正根,方程组零解不稳定.

注 如要用 V 函数判断当 $\alpha>0$ 时零解的稳定性,可用待定系数法反求使线性近似方程组取 $V'=x^2+y^2$ 的 $V=\frac{1}{\alpha}x^2+xy+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha}{2}\right)y^2$,其存在性根据为[书 §6.2.2 - 定理 6]. 此时在原点邻域 V'定正,V 定正或变号,方程组零解不稳定.

3. (1) 令 $y=x'$,方程化为 $x'=y,y'=-x+\mu(1-x^2)y$. 存在奇点(0,0),当 $\mu>0$ 时线性近似方程 $x'=y,y'=-x+\mu y$ 有 $p=-\mu<0,q=1>0,\Delta=\mu^2-4$. 即奇点(0,0)不稳定. $\mu^2>4$ 为结点; $\mu^2=4$ 为退化结点(因 $b=1\neq 0$);$\mu^2<4$ 为焦点. 而当 $\mu=0$ 时方程有 $p=0,q=1>0$,奇点(0,0)为中心.

另外,因 $F(x)=\int_0^x\mu(x^2-1)\mathrm{d}x=\mu x\left(\frac{1}{3}x^2-1\right)$. 若令 $y=x'+\mu x\left(\frac{1}{3}x^2-1\right)$,则方程化为 $x'=y-\mu x\left(\frac{1}{3}x^2-1\right),y'=-x$. 同样,存在奇点(0,0),当 $\mu>0$ 时线性近似方程 $x'=\mu x+y,y'=-x$ 有 $p=-\mu<0,q=1>0,\Delta=\mu^2-4$. 即奇点(0,0)不稳定. $\mu^2>4$ 为结点; $\mu^2=4$ 为退化结点(因 $b=1\neq 0$);$\mu^2<4$ 为焦点. 而当 $\mu=0$ 时方程有 $p=0,q=1>0$,奇点(0,0)为中心. 结论与令 $y=x'$时一致.

(2) 由方程组右端为零时 $\ln(2-y^2)=0,\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y=0$ 有解 $x=1,y=1$ 及 $x=-1,y=-1$. 非线性方程有两个奇点(1,1),(-1,-1). 通过变换 $\tilde{x}=x-1,\tilde{y}=y-1$ 将奇点(1,1)化为原点(0,0),方程变为

$$\tilde{x}' = \ln(1-2\tilde{y}-\tilde{y}^2) = -2\tilde{y} + [\ln(1-2\tilde{y}-\tilde{y}^2)+2\tilde{y}],$$
$$\tilde{y}' = \mathrm{e}\mathrm{e}^{\tilde{x}} - \mathrm{e}\mathrm{e}^{\tilde{y}} = \mathrm{e}(\tilde{x}-\tilde{y}) + [\mathrm{e}^{\tilde{x}+1} - \mathrm{e}^{\tilde{y}+1} - \mathrm{e}(\tilde{x}-\tilde{y})].$$

其线性近似方程系数有 $p = \mathrm{e} > 0, q = 2\mathrm{e} > 0, \Delta = \mathrm{e}^2 - 8\mathrm{e} = \mathrm{e}(\mathrm{e}-8) < 0$,原方程线性奇点(1,1)为稳定焦点;通过变换 $\tilde{x} = x+1, \tilde{y} = y+1$ 将奇点(-1,-1)化为原点(0,0),方程变为

$$\tilde{x}' = \ln(1+2\tilde{y}-\tilde{y}^2) = 2\tilde{y} + [\ln(1-2\tilde{y}-\tilde{y}^2) - 2\tilde{y}],$$
$$\tilde{y}' = \mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{\tilde{x}} - \mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{\tilde{y}} = \mathrm{e}^{-1}(\tilde{x}-\tilde{y}) + [\mathrm{e}^{\tilde{x}-1} - \mathrm{e}^{\tilde{y}-1} - \mathrm{e}^{-1}(\tilde{x}-\tilde{y})].$$

其线性近似方程系数有 $p = \mathrm{e}^{-1} > 0, q = -2\mathrm{e}^{-1} < 0$,原方程线性奇点(-1,-1)为鞍点(不稳定).

4. (1) 方程组可化为$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = (r-1)(a+\sin^2\varphi)$,此方程有解

$$\frac{\mathrm{d}r}{r-1} = (a+\sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \left(a+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi,$$
$$r-1 = c\mathrm{e}^{\left(a+\frac{1}{2}\right)\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi}.$$

显然 $c=0$ 时 $r(t)=1$ 为闭轨线. 因当 $a < -\dfrac{1}{2}$时随着 $\varphi = t \to +\infty$ 有 $r(t)\to 1$,即 $r(t)=1$ 为稳定极限环;而当 $a > -\dfrac{1}{2}$时随着 $\varphi = t \to -\infty$ 有 $r(t)\to 1$,即 $r(t)=1$ 为不稳定极限环.

(2) 令 $y = x'$,方程化为方程组 $x' = y, y' = -(b-cx)x - ay$. 因当 $a \neq 0$ 时在任意域内均有

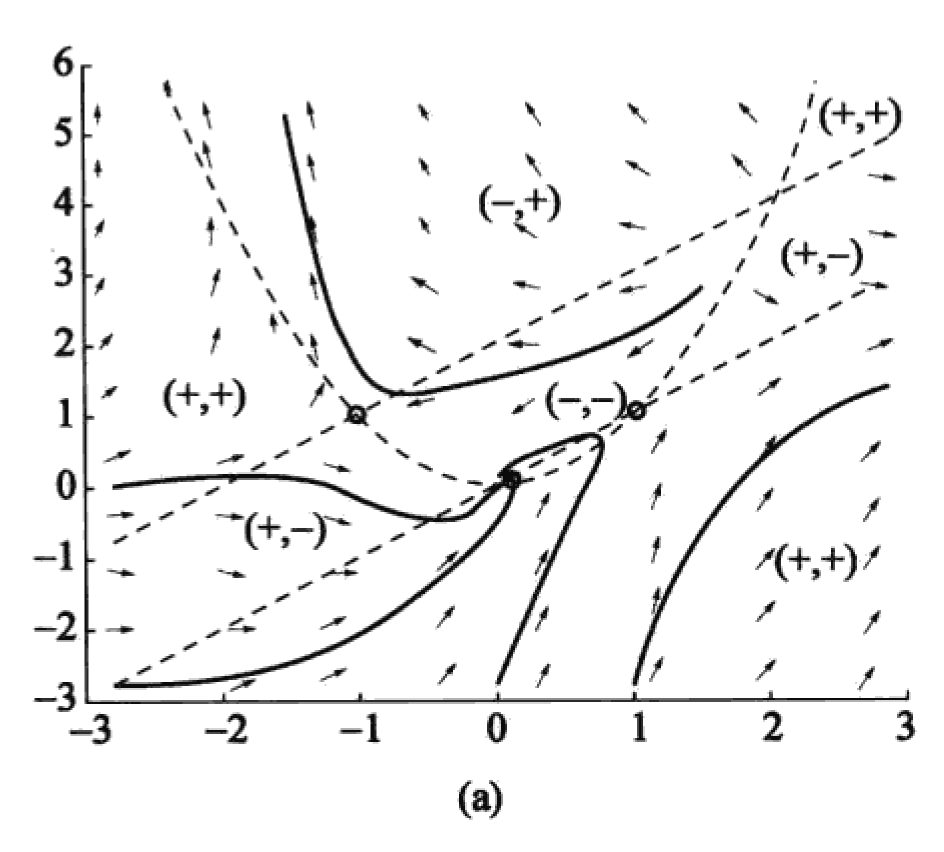
$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = -a$$

不变号,且在其子域内不恒为零,根据[书§6.4-定理9],在相平面不存在极限环.

(3) 证明其不存在极限环. 令 $y = x'$,方程化为方程组 $x' = y$, $y' = -x - F(y)$. 因对 $V = x^2 + y^2, V' = -2yF(y)$. 由条件知当 $y \neq 0$ 时有 $V' < 0$. 若相平面上有极限环 Γ,则在 Γ 上有 $t_0 < t_1$ 使得 $x(t_0) = x(t_1), y(t_0) = y(t_1)$,即 $V(t_0) = V(t_1)$. 但 Γ 上不可能$y(t)$

$=0(t_0\leqslant t\leqslant t_1)$，于是由 $V'<0$ 有 $V(t_0)>V(t_1)$，矛盾. 证得相平面上不可能有极限环.

5. (1) 方程化为 $x'=x^2-y, y'=(x-y)(2+x-y)$，垂直等倾斜线为抛物线 $y=x^2$，水平等倾斜线为两平行直线 $y=x, y=x+2$，奇点有 $(0,0)$，$(1,1)$，$(2,4)$，$(-1,1)$. 轨线图貌如图 6.15(a).



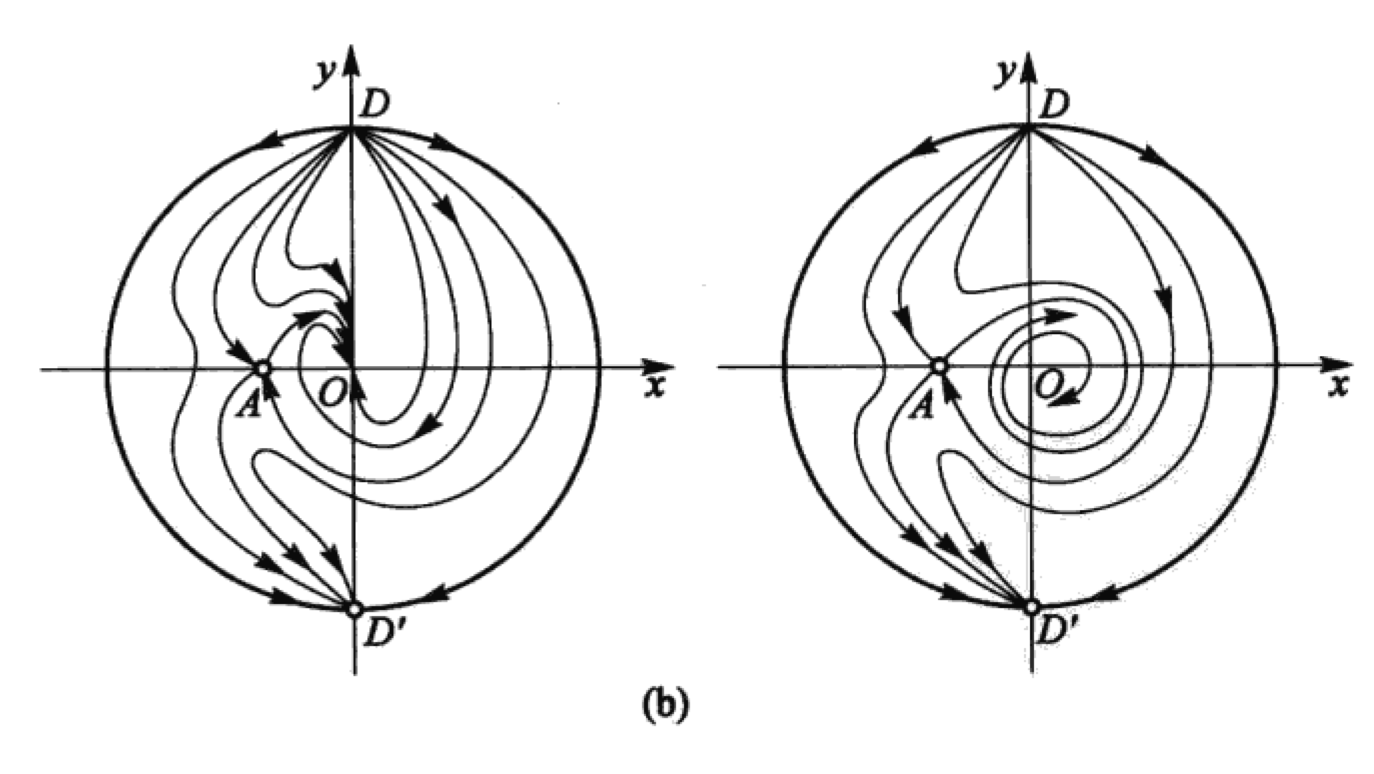


图 6.15 轨线图貌

(2) 令 $y=x'$,方程化为 $x'=y, y'=-x-ay-\mu x^2-y^2$. 有奇点 $O(0,0)$, $A\left(-\frac{1}{\mu},0\right)$. 对于奇点 O,其线性近似方程 $x'=y, y'=-x-ay$,有 $p=a\geqslant 0, q=1>0, \Delta=a^2-4$. 奇点 O 稳定,$a>2$ 为结点;$a=2$ 为退化结点(因 $b=1\neq 0$);$a<2$ 为焦点. 而当 $a=0$ 时方程有 $p=0, q=1>0$,线性奇点(0,0)为中心. 对于奇点 A,通过变换 $\tilde{x}=x+\frac{1}{\mu}, \tilde{y}=y$,化为 $\tilde{x}'=\tilde{y}, \tilde{y}'=\tilde{x}-a\tilde{y}-\mu\tilde{x}^2-\tilde{y}^2$,其线性近似方程 $\tilde{x}'=\tilde{y}, \tilde{y}'=\tilde{x}-a\tilde{y}$,有 $p=a, q=-1<0$. 奇点 A 为鞍点(不稳定).

注 还可以考虑系统的极限环,用 Dulac 判据,取 $B=ae^{2x}$. 因

$$\frac{\partial(BX)}{\partial x}+\frac{\partial(BY)}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(aye^{2x})+\frac{\partial}{\partial y}[ae^{2x}(-x-ay-\mu x^2-y^2)]=-a^2e^{2x}$$

为定号函数,方程无闭轨线. 尚可进一步通过庞加莱变换 $x=\frac{1}{z}$, $u=\frac{u}{z}$及 $x=\frac{v}{z}, u=\frac{1}{z}$分析无穷远奇点的性态,从而得到方程的全局图貌如图 6.15(b). 见[文 18 §9.3.3 例 2].

6. 淋病扩散模型见[§6.3.3-(4)],因 $0\leqslant x\leqslant c_1, y=0$ 线上 $y'>0$, $0\leqslant y\leqslant c_2, x=0$ 线上 $x'>0$,而 $0\leqslant x\leqslant c_1, y=c_2$ 线上 $y'<0$, $0\leqslant y\leqslant c_2, x=c_1$ 线上 $x'<0$,因此在区域 $0\leqslant x\leqslant c_1, 0\leqslant y\leqslant c_2$ 中的方程轨线始终停留在该区域中. 且在区域中,方程的水平、垂直等倾斜线

$$y=\frac{a_1x}{b_1(c_1-x)}\equiv\Phi_1(x), y=\frac{b_2c_2x}{a_2+b_2x}\equiv\Phi_2(x)$$

单调递增. 视 a_1a_2 与 $b_1b_2c_1c_2$ 的大小关系,而将区域划成轨线走向相同的 4 个或 3 个小区域. 对 $a_1a_2<b_1b_2c_1c_2$,方程有唯一正平衡点

$$x_0=\frac{b_1b_2c_1c_2-a_1a_2}{a_1b_2+b_1b_2c_2},y_0=\frac{b_1b_2c_1c_2-a_1a_2}{a_1b_2+b_1b_2c_1}.$$

由[§6.3.3 -(4) 图 6.7(a)],4 个小区域中Ⅰ、Ⅲ区的轨线始终保持在区内,Ⅱ、Ⅳ区的轨线或在区内或进入Ⅰ、Ⅲ区,所有轨线最后均趋于平衡点(x_0,y_0),淋病病人数保持平衡. 而当 $a_1a_2\geqslant b_1b_2c_1c_2$ 时,由图 6.7(b),3 个小区域中Ⅱ区的轨线始终保持在区内,Ⅰ、Ⅲ区的轨线进入Ⅱ区,所有的轨线最后均趋于原点(0,0),淋病病人数趋于零,淋病不会扩散.

§6.4.3 习题 6.1 及其解答

1. 对下列方程,(a) 求出其驻定解,并画出方程的经过$(0,x_0)$的积分曲线与轨线的走向(草图),从而判断各驻定解的稳定性;(b) 作变量变换,使各驻定解对应于新方程的零解:

(1) $\frac{dx}{dt}=Ax+Bx^2,A>0,B>0,-\infty<x_0<+\infty$.

解 (a) 由 $Ax+Bx^2=0$ 解得 $x=0,x=-\frac{A}{B}$. 故驻定解为 $x=0$ 和 $x=-\frac{A}{B}$. 因 $x>0$ 时$\frac{dx}{dt}>0$;$0>x>-\frac{A}{B}$时$\frac{dx}{dt}<0$;$x<-\frac{A}{B}$时$\frac{dx}{dt}>0$. 因此对 $x_0>0$ 有 $x(t)\to\infty$;对 $x_0<0$ 有 $x(t)\to-\frac{A}{B}$. 驻定解 $x=0$ 不稳定,驻定解 $x=-\frac{A}{B}$稳定.

(b) 驻定解 $x=0$ 本身已是方程的零解;对驻定解 $x=-\frac{A}{B}$,作变量变换 $y=x+\frac{A}{B}$,方程变为$\frac{dy}{dt}=By\left(y-\frac{A}{B}\right)$. 驻定解 $x=-\frac{A}{B}$ 对应于新方程的零解.

积分曲线与轨线图如图 6.16(a).

(2) $\frac{dx}{dt}=x(x-1)(x-3)$.

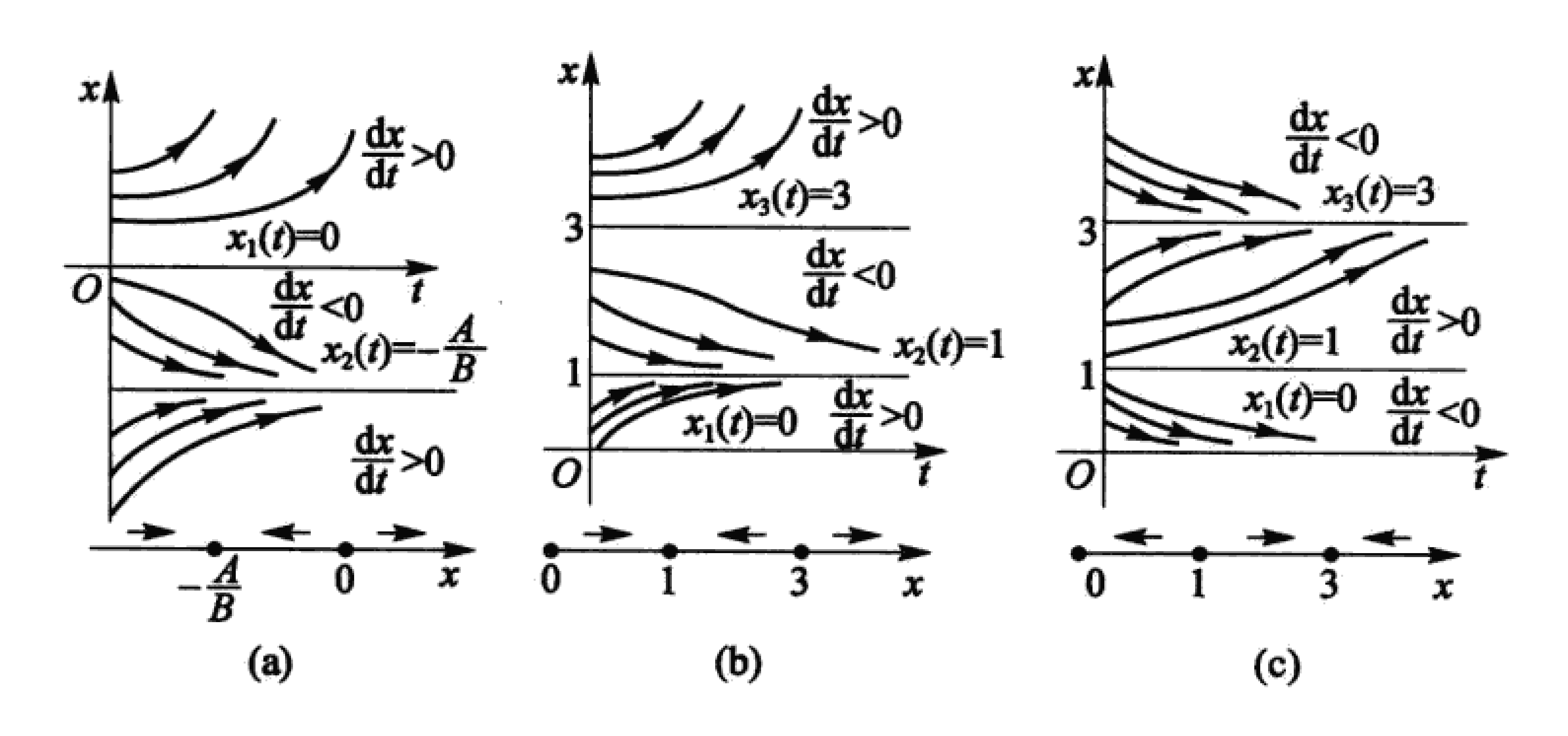


图 6.16　积分曲线与轨线图

提示　(a) 驻定解为 $x=0,x=1,x=3$. 当 $x_0>3$ 时 $x(t)\to\infty$；当 $0<x_0<3$ 时 $x(t)\to 1$；当 $x_0<0$ 时 $x(t)\to-\infty$. 其中 $x=0,x=3$ 不稳定，$x=1$ 稳定.

(b) 驻定解 $x=0$ 为原方程的零解；原方程的驻定解 $x=1$ 为变换 $y=x-1$ 后新方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(y+1)(y-2)$ 的零解；原方程的驻定解 $x=3$ 为变换 $z=x-3$ 后新方程 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=z(z+2)(z+3)$ 的零解.

积分曲线与轨线图如图 6.16(b).

(3) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(1-x)(x-3)$.

提示　(a) 驻定解为 $x=0,x=1,x=3$. 当 $x_0>1$ 时 $x(t)\to 3$；当 $x_0<1$ 时 $x(t)\to 0$. 其中 $x=0,x=3$ 稳定，$x=1$ 不稳定.

(b) 驻定解 $x=0$ 为原方程的零解；原方程的驻定解 $x=1$ 为变换 $y=x-1$ 后新方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(y+1)(y-2)$ 的零解；原方程的驻定解 $x=3$ 为变换 $z=x-3$ 后新方程 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=z(z+2)(z+3)$ 的零解.

积分曲线与轨线图如图 6.16(c).

2. 直接由解(6.5)出发,讨论方程(6.4)的解 $y_1(t)=0$ 和 $y_2(t)=\dfrac{A}{B}$的稳定性态(即稳定、渐近稳定、不稳定).

解 方程(6.4)的积分曲线图如图6.17.因方程(6.4)的解为

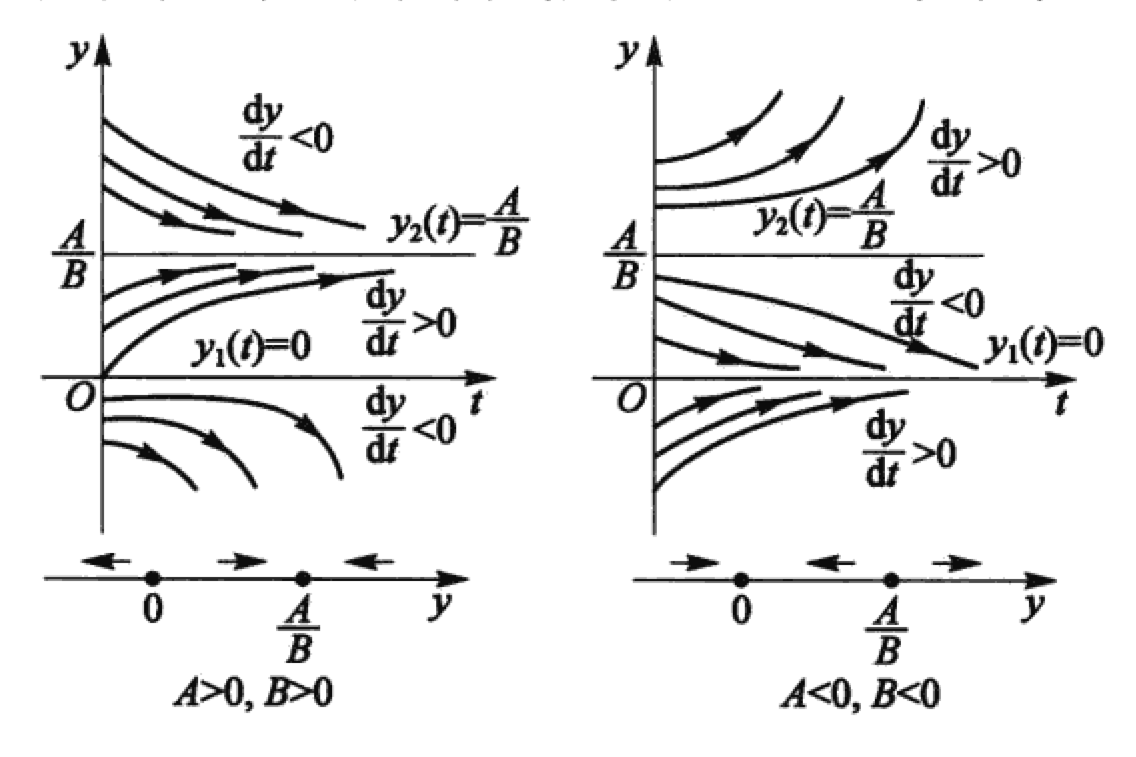


图6.17 积分曲线图

$$y=\frac{A}{B+\left(\dfrac{A}{y_0}-B\right)\mathrm{e}^{-At}},$$

当 $A>0,B>0$ 时解 $y_1(t)=0$ 为原方程的零解,因对给定的 $\varepsilon<\dfrac{A}{B}$ 例如 $\varepsilon=\dfrac{A}{2B}$,不管 $\delta,0<\delta<\varepsilon$ 如何小,总有 $y_0,|y_0|=\delta$,使得由初值条件 $y(0)=y_0$ 确定的解 $y(t)$,当 $t_1=\dfrac{1}{A}\ln\left(\dfrac{A}{\delta B}-1\right)>0,t\geqslant t_1$ 时有

$$\left(\frac{A}{\delta B}-1\right)\mathrm{e}^{-At}>1,y(t)=\frac{A}{B+B\left(\dfrac{A}{y_0B}-1\right)\mathrm{e}^{-At}}>\frac{A}{2B}=\varepsilon,$$

于是解 $y_1(t)=0$ 不稳定.

方程(6.4)通过变换 $x=y-\dfrac{A}{B}$化为新方程$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-Ax-Bx^2$.

其解 $y_2(t)=\frac{A}{B}$对应新方程的零解 $x=0$,新方程有解

$$x(t)=y(t)-\frac{A}{B}=\frac{A}{B+\left(\frac{A}{x_0+\frac{A}{B}}-B\right)e^{-At}}-\frac{A}{B}$$

$$=\frac{x_0A}{(x_0B+A)e^{At}-x_0B}=\frac{x_0Ae^{-At}}{A+x_0B(1-e^{-At})}.$$

因 $t\geqslant 0$ 时$(x_0B+A)e^{At}-x_0B\geqslant A$,即对任意小的 $\varepsilon<\frac{A}{B}$,可取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$,只要 x_0满足$|x_0|\leqslant\delta$,则对 $t\geqslant 0$ 有

$$|x(t)|=\left|\frac{x_0A}{(x_0B+A)e^{At}-x_0B}\right|\leqslant\left|\frac{x_0A}{A}\right|=|x_0|\leqslant\delta<\varepsilon.$$

故新方程的零解 $x=0$ 是稳定的.

取 $\delta_0=\frac{A}{B}>0$,当$|x_0|<\delta_0$时,若 $x_0>0$,则因 $A+x_0B\cdot(1-e^{-At})\geqslant A$,对 $t\geqslant 0$ 有

$$|x(t)|=\left|\frac{x_0Ae^{-At}}{A+x_0B(1-e^{-At})}\right|\leqslant\frac{x_0Ae^{-At}}{A}<\frac{A}{B}e^{-At},$$

即 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$;若 $x_0<0$,则因 $0>x_0>-\frac{A}{B}$有 $A+x_0B(1-e^{-At})>A+x_0B>0$,故对 $t\geqslant 0$ 有

$$|x(t)|=\left|\frac{x_0Ae^{-At}}{A+x_0B(1-e^{-At})}\right|<\left|\frac{x_0Ae^{-At}}{A+x_0B}\right|$$

$$=\left|\frac{x_0A}{A+x_0B}\right|e^{-At},$$

同样得 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$. 证得零解 $x=0$ 渐近稳定,即原方程的解 $y_2(t)=\frac{A}{B}$渐近稳定.

当 $A<0,B<0$ 时类似可证明 $y_1(t)=0$ 为渐近稳定，$y_2(t)=\frac{A}{B}$为不稳定.

3. 试求出下列方程组的所有驻定解，并讨论相应的驻定解的稳定性态：

(1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(1-x-y),\\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{4}y(2-3x-y).\end{cases}$

解 微分方程组右端函数构成的代数方程组

$$\begin{cases}x(1-x-y)=0,\\ \dfrac{1}{4}y(2-3x-y)=0.\end{cases}$$

有 4 组解$(0,0)$；$(0,2)$；$(1,0)$；$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. 因此微分方程组有 4 组驻定解：

$$x=0,y=0;\ x=0,y=2;\ x=1,y=0;\ x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}.$$

对驻定解 $x=0,y=0$，对应的线性近似微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x,\\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{2}y\end{cases}$$

的特征方程

$$\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0\\ 0 & \lambda-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=(\lambda-1)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)=0$$

有两个正特征根 $\lambda=1,\lambda=\frac{1}{2}$. 因此微分方程组的驻定解 $x=0$，$y=0$ 是不稳定的.

对驻定解 $x=0,y=2$，取变换 $\tilde{x}=x,\tilde{y}=y-2$. 新方程组及其对

应的线性近似微分方程组分别为

$$\begin{cases}\dfrac{d\tilde{x}}{dt}=\tilde{x}(-1-\tilde{x}-\tilde{y}),\\ \dfrac{d\tilde{y}}{dt}=\dfrac{1}{4}(\tilde{y}+2)(-3\tilde{x}-\tilde{y})\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}\dfrac{d\tilde{x}}{dt}=-\tilde{x},\\ \dfrac{d\tilde{y}}{dt}=-\dfrac{3}{2}\tilde{x}-\dfrac{1}{2}\tilde{y}.\end{cases}$$

线性近似方程组有两负特征根 $\lambda=-1,\lambda=-\frac{1}{2}$. 因此微分方程组的驻定解 $x=0,y=2$ 是渐近稳定的.

对驻定解 $x=1,y=0$,取变换 $\tilde{x}=x-1,\tilde{y}=y$. 新方程组及其对应的线性近似微分方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{d\tilde{x}}{dt}=(\tilde{x}+1)(-\tilde{x}-\tilde{y}),\\ \dfrac{d\tilde{y}}{dt}=\dfrac{1}{4}\tilde{y}(-1-3\tilde{x}-\tilde{y})\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}\dfrac{d\tilde{x}}{dt}=-\tilde{x}-\tilde{y},\\ \dfrac{d\tilde{y}}{dt}=-\dfrac{1}{4}\tilde{y}.\end{cases}$$

线性近似方程组有两负特征根 $\lambda=-1,\lambda=-\frac{1}{4}$. 因此微分方程组的驻定解 $x=1,y=0$ 是渐近稳定的.

对驻定解 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}$,取变换 $\tilde{x}=x-\frac{1}{2},\tilde{y}=y-\frac{1}{2}$. 新方程组及其对应的线性近似微分方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{d\tilde{x}}{dt}=\left(\tilde{x}+\dfrac{1}{2}\right)(-\tilde{x}-\tilde{y}),\\ \dfrac{d\tilde{y}}{dt}=\dfrac{1}{4}\left(\tilde{y}+\dfrac{1}{2}\right)(-3\tilde{x}-\tilde{y})\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}\dfrac{d\tilde{x}}{dt}=-\dfrac{1}{2}\tilde{x}-\dfrac{1}{2}\tilde{y},\\ \dfrac{d\tilde{y}}{dt}=-\dfrac{3}{8}\tilde{x}-\dfrac{1}{8}\tilde{y}.\end{cases}$$

对应的线性近似微分方程组有一正一负两实根 $\lambda=-\frac{1}{16}\cdot(5\pm\sqrt{57})$. 因此微分方程组的驻定解 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}$ 是不稳定的.

(2) $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=9x-6y+4xy-5x^2,\\ \dfrac{dy}{dt}=6x-6y-5xy+4y^2.\end{cases}$$

提示 驻定解为

$$x=0,y=0;\ x=2,y=1;\ x=1,y=2.$$

驻定解 $x=0,y=0$ 的线性近似方程 $\dot{x}=9x-6y,\dot{y}=6x-6y$ 有 $p=-3,q=-18$，得 $x=0,y=0$ 不稳定.

驻定解 $x=2,y=1$ 经变换 $\tilde{x}=x-2,\tilde{y}=y-1$ 后的线性近似方程 $\dot{\tilde{x}}=-7\tilde{x}+2\tilde{y},\dot{\tilde{y}}=\tilde{x}-8\tilde{y}$ 有 $p=15,q=54,\Delta=p^2-4q=9>0$，得驻定解 $x=2,y=1$ 渐近稳定.

驻定解 $x=1,y=2$ 经变换 $\tilde{x}=x-1,\tilde{y}=y-2$ 后的线性近似方程 $\dot{\tilde{x}}=7\tilde{x}-2\tilde{y},\dot{\tilde{y}}=-4\tilde{x}+5\tilde{y}$ 有 $p=-12,q=27,\Delta=p^2-4q=36>0$，得驻定解 $x=1,y=2$ 不稳定.

(3) $$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+\mu(y-x^2),\mu>0.\end{cases}$$

提示 驻定解为 $x=0,y=0$ 和 $x=-\dfrac{1}{\mu},y=0$. 对驻定解 $x=0,y=0$，线性近似方程 $\dot{x}=y,\dot{y}=-x+\mu y$ 的特征方程 $\lambda^2-\mu\lambda+1=0$ 有正实部根，得驻定解 $x=0,y=0$ 不稳定. 对驻定解 $x=-\dfrac{1}{\mu},y=0$，取变换 $\tilde{x}=x+\dfrac{1}{\mu},\tilde{y}=y$，变换后的线性近似方程 $\dot{\tilde{x}}=\tilde{y},\dot{\tilde{y}}=\tilde{x}+\mu\tilde{y}$ 的特征方程 $\lambda^2-\mu\lambda-1=0$ 有正实部根，得驻定解 $x=-\dfrac{1}{\mu},y=0$ 不稳定.

(4) $$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-x,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y-x^2-(x-y)\left(y^2-2xy+\dfrac{2}{3}x^2\right).\end{cases}$$

提示 方程组右端有零解 $(0,0)$，$(1,1)$，驻定解为 $x=0,y=0$ 和 $x=1,y=1$. 对驻定解 $x=0,y=0$，线性近似方程 $\dot{x}=y-x,\dot{y}=$

y 的特征方程 $\lambda^2-1=0$ 有正根，得驻定解 $x=0,y=0$ 不稳定. 对驻定解 $x=1,y=1$，取变换 $\tilde{x}=x-1,\tilde{y}=y-1$，变换后的线性近似方程 $\dot{\tilde{x}}=\tilde{y}-\tilde{x},\dot{\tilde{y}}=-\frac{5}{3}\tilde{x}+\frac{2}{3}\tilde{y}$ 的特征方程 $\lambda^2+\frac{1}{3}\lambda+1=0$ 有负实部根，得驻定解 $x=1,y=1$ 渐近稳定.

4. 研究下列方程零解的稳定性：

(1) $\frac{d^3x}{dt^3}+5\frac{d^2x}{dt^2}+6\frac{dx}{dt}+x=0.$

解 微分方程的特征方程为 $\lambda^3+5\lambda^2+6\lambda+1=0$，其赫尔维茨行列式

$$a_0=1>0,\Delta_1=5>0,\Delta_2=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & 6\end{vmatrix}=29>0,$$

$$\Delta_3=a_3\Delta_2=29>0,$$

知特征方程的所有根均具负实部，微分方程的零解 $x=\frac{dx}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=0$ 渐近稳定.

(2) $\frac{dx}{dt}=\mu x-y,\frac{dy}{dt}=\mu y-z,\frac{dz}{dt}=\mu z-x$（$\mu$ 为常数）.

解 特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda-\mu & 1 & 0\\ 0 & \lambda-\mu & 1\\ 1 & 0 & \lambda-\mu\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-\mu)^3+1=\lambda^3-3\mu\lambda^2+3\mu^2\lambda-\mu^3+1=0.$$

当 $\mu<-\frac{1}{2}$ 时，其赫尔维茨行列式

$$a_0=1>0,\Delta_1=-3\mu>0,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}-3\mu & 1\\ 1-\mu^3 & 3\mu^2\end{vmatrix}=-(1+8\mu^3)>0,$$

$$\Delta_3=a_3\Delta_2=(1-\mu^3)\Delta_2>0.$$

特征方程的所有根均具负实部，微分方程的零解 $x=y=z=0$ 渐近稳定；

当 $\mu=-\frac{1}{2}$ 时，特征方程 $\lambda^3+\frac{3}{2}\lambda^2+\frac{3}{4}\lambda+\frac{9}{8}=\left(\lambda+\frac{3}{2}\right)\left(\lambda^2+\frac{3}{4}\right)=0$ 有特征根 $\lambda_1=-\frac{3}{2}$，$\lambda_{2,3}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，特征方程的所有根均非正实部且没有重根，微分方程的零解 $x=y=z=0$ 稳定；

当 $\mu>-\frac{1}{2}$ 时，特征方程

$$(\lambda-\mu)^3+1=(\lambda-\mu+1)[\lambda^2-(2\mu+1)\lambda+\mu^2+\mu+1]=0$$

有特征根

$$\lambda_1=\mu-1,\lambda_{2,3}=\frac{1}{2}\left[2\mu+1\pm\sqrt{(2\mu+1)^2-4(\mu^2+\mu+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(2\mu+1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}).$$

特征方程有正实部特征根，微分方程的零解 $x=y=z=0$ 不稳定.

(3) $$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-x-y+z,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x-2y+2z,\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=x+2y+z.\end{cases}$$

提示 特征方程 $f(\lambda)\equiv\lambda^3+2\lambda^2-5\lambda-9=0$，因 $f(0)=-9<0$，$f(3)=21>0$，必有一正根. 零解 $x=y=z=0$ 不稳定.

5. 某自激振动系统以数学形式表示如下（范德波尔方程）：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\mu(x^2-1)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=0\quad(\mu>0),$$

试讨论系统的平衡状态（即驻定解）的稳定性态.

提示 令 $y=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，方程化为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=\mu(1-x^2)y-x.\end{cases}$$

平衡状态为 $x=y=0$,线性近似微分方程组的特征方程 $\lambda^2-\mu\lambda+1=0$ 有正实部根 $\lambda=\frac{1}{2}\left(\mu\pm\sqrt{\mu^2-4}\right)$. 零解 $x=y=0$ 不稳定.

§6.4.4 习题 6.2 及其解答

1. 试判别下列函数的定号性:

(1) $V(x,y)=x^2$;

(2) $V(x,y)=x^2-2xy^2$;

(3) $V(x,y)=x^2-2xy^2+y^4+x^4$;

(4) $V(x,y)=x^2+2xy+y^2+x^2y^2$;

(5) $V(x,y)=x\cos x+y\sin y$.

解 (1) $V(0,y)=0$, $V(x,y)$ 常正.

(2) $V(x,0)=x^2>0(x\neq0)$, $V(y^2,y)=-y^4<0(y\neq0)$, $V(x,y)$ 变号.

(3) $V(x,y)=(x-y^2)^2+x^4$, $V(x,y)$ 定正.

(4) $V(x,y)=(x+y)^2+x^2y^2$, $V(x,y)$ 定正.

(5) $V\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$, $V(\pi,\pi)=-\pi$, $V(x,y)$ 变号.

2. 试用形如 $V(x,y)=ax^2+by^2$ 的李雅普诺夫函数确定下列方程组零解的稳定性:

(1) $\frac{dx}{dt}=-xy^2$, $\frac{dy}{dt}=-yx^2$.

提示 取 $V(x,y)=x^2+y^2$,有 $V'(x,y)=2xx'+2yy'=-4x^2y^2$. $V(x,y)$ 定正, $V'(x,y)$ 常负. 零解稳定.

(2) $\frac{dx}{dt}=-x+xy^2$, $\frac{dy}{dt}=-2x^2y-y^3$.

提示 取 $V=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$,有 $V'=-x^2(1+y^2)-y^4$. V 定正,V' 定负. 零解渐近稳定.

(3) $\frac{dx}{dt}=-x+2y^3, \frac{dy}{dt}=-2xy^2$.

解 取 $V(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$,有 $V'(x,y)=-x^2$. $V(x,y)$ 定正,$V'(x,y)$ 常负,且 $V'(x,y)=0$ 的点集 $x=0$(y 轴)除零解 $x=y=0$ 外不含方程的其他解. 故零解 $x=y=0$ 渐近稳定.

(4) $\frac{dx}{dt}=x^3-2y^3, \frac{dy}{dt}=xy^2+x^2y+\frac{1}{2}y^3$.

提示 取 $V=\frac{1}{2}x^2+y^2$,有 $V'=(x^2+y^2)^2$. V, V' 均定正,零解 $x=y=0$ 不稳定.

3. 研究下列方程组零解的稳定性:

(1) $\frac{dx}{dt}=-x-y+(x-y)(x^2+y^2)$,

$\frac{dy}{dt}=x-y+(x+y)(x^2+y^2)$.

提示 取 $V=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$,有 $V'=-(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)$. V 定正,V' 在原点附近定负. 零解渐近稳定.

(2) $\frac{dx}{dt}=-y^2+x(x^2+y^2), \frac{dy}{dt}=-x^2-y^2(x^2-y^2)$.

提示 取 $V=-(x+y)$,有 $V'=(x^2+y^2)(1-x-y^2)+2x^2y^2$. 在原点附近 V' 定正,且在原点的任意小邻域均有 $(\tilde{x},\tilde{y})$,使 $V(\tilde{x},\tilde{y})=-(\tilde{x}+\tilde{y})>0$,故零解不稳定.

(3) $\frac{dx}{dt}=-xy^6, \frac{dy}{dt}=y^3x^4$.

提示 取定正 $V=x^4+y^4$,有 $V'\equiv 0$,零解稳定.

(4) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax-xy^2,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x^4y$($a$ 为参数).

提示 当 $a\leqslant 0$ 时取定正 $V=x^4+y^2$,有 $V'=4ax^4$,恒为零或常负.零解 $x=y=0$ 稳定.当 $a>0$ 时取 $V=x^4-y^2$,在原点的任意小邻域均有$(\tilde{x},\tilde{y})$,使 $V(\tilde{x},\tilde{y})=\tilde{x}^4-\tilde{y}^2>0$,而 $V'=4ax^4-8x^4y^2=4aV+W$,其中 $W=4y^2(a-2x^4)$当 x 足够小时为常正函数,故零解 $x=y=0$ 不稳定.

(5) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax-y^2,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x^3y$($a$ 为参数).

提示 当 $a\leqslant 0$ 时取定正 $V=x^4+y^2$,有 $V'=4ax^4$,恒为零或常负,且 $V'=0$ 的点集 $x=0$(y 轴)除零解 $x=y=0$ 外不含方程的其他解.零解 $x=y=0$ 渐近稳定.当 $a>0$ 时取 $V=x^4-y^2$,有 $V'=4aV+W$,其中 $W=4y^2(a-2x^3)$.零解 $x=y=0$ 不稳定.

4. 给定微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-xf(x,y),\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x-yf(x,y),$$

其中$f(x,y)$有连续一阶偏导数.试证明在原点邻域内如 $f>0$ 则零解为渐近稳定的,而 $f<0$ 则零解不稳定.

提示 取定正 $V=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$,有 $V'=-(x^2+y^2)f(x,y)$.当 $f>0$ 时 V'定负,零解渐近稳定,而 $f<0$ 时 V'定正,零解不稳定.

5. 给定方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+f(x)=0,$$

其中 $f(0)=0$,而当 $x\neq 0$ 时 $xf(x)>0(-k<x<k)$.试将其化为平面方程组,并用形如

$$V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$$

的李雅普诺夫函数讨论方程组零解的稳定性.

解 令 $y=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,方程化为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -f(x). \end{cases}$$

函数 $V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x f(s)\,ds$ 有 $V(0,0)=0$ 及当 $x^2+y^2 \neq 0$ 时由积分中值定理有

$$V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + xf(\xi), \xi \in (0,x) \text{或} \xi \in (x,0),$$

ξ 与 x 同号. 因当 $x \neq 0$ 时 $xf(x)>0$,知 $f(x)$ 与 x 同号,即 $f(\xi)$ 与 ξ 及 x 同号. 故 V 是定正函数,而

$$V'(x,y) = yy' + f(x)x' \equiv 0.$$

得方程组零解 $x=y=0$ 稳定.

6. 方程组

$$\frac{dx}{dt} = y - x^3, \ \frac{dy}{dt} = -2(x^3+y^5)$$

能否由线性近似方程决定其稳定性问题?试寻求李雅普诺夫函数以解决这方程组的零解的稳定性问题,同时变动高次项使新方程组的零解为不稳定的.

解 线性近似方程 $\frac{dx}{dt}=y, \frac{dy}{dt}=0$ 的特征方程 $\lambda^2=0$ 有重零根,不能由线性近似方程决定其稳定性问题. 取定正函数 $V=x^4+y^2$,则 $V'=-4(x^6+y^6)$ 定负,方程组的零解渐近稳定.

若变动高次项使新方程组为

$$\frac{dx}{dt} = y + x^3, \frac{dy}{dt} = -2(x^3-y^5),$$

则对定正函数 $V=x^4+y^2$,有 $V'=4(x^6+y^6)$ 定正,方程组的零解不稳定.

7. 试将下列线性方程化成线性方程组,然后对方程组求二次型 V 函数 $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$,使其通过方程组的全导数 $\frac{dV}{dt} = -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$,并

判断函数 $V(x)$ 的定号性：

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+6\dfrac{dy}{dt}+9y=0.$

解 令 $x_1=y, x_2=\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dx_1}{dt}$，方程化为

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=-9x_1-6x_2.\end{cases}$$

因对线性方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，取 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 时有

$$\begin{aligned}V'(\boldsymbol{x})&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\\&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

为使 $V'=-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，要求 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{E}$（$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵）. 对上面方程组有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\-9&-6\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-9&-6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-9\\1&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}.$$

即

$$\begin{bmatrix}-9b&a-6b\\-9c&b-6c\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-9b&-9c\\a-6b&b-6c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-18b&a-6b-9c\\a-6b-9c&2b-12c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}.$$

于是得方程组

$$\begin{cases}-18b=-1,\\2b-12c=-1,\\a-6b-9c=0.\end{cases}$$

解得 $b=\frac{1}{18}, c=\frac{2b+1}{12}=\frac{5}{54}, a=6b+9c=\frac{1}{3}+\frac{5}{6}=\frac{7}{6}$，即二次型 V 函数为

$$V(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\frac{7}{6} & \frac{1}{18}\\ \frac{1}{18} & \frac{5}{54}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\frac{7}{6}x_1^2+\frac{1}{9}x_1x_2+\frac{5}{54}x_2^2.$$

因 $\boldsymbol{B}$ 的主子行列式有

$$B_{11}=\frac{7}{6}>0, B_{22}=\begin{vmatrix}\frac{7}{6} & \frac{1}{18}\\ \frac{1}{18} & \frac{5}{54}\end{vmatrix}=\frac{7\times5}{2^2\times3^4}-\frac{1}{2^2\times3^4}>0,$$

故 $\boldsymbol{B}$ 正定，二次型 V 函数 $V(\boldsymbol{x})=\frac{7}{6}x_1^2+\frac{1}{9}x_1x_2+\frac{5}{54}x_2^2$ 是定正函数.

方程组的零解渐近稳定.

(2) $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}+5\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+6\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=0.$

提示 令 $x_1=y, x_2=\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, x_3=\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$，方程化为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_2,\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=x_3,\\ \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}=-x_1-6x_2-5x_3.\end{cases}$$

由 $\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{E}$，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -6 & -5\end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=[b_{ij}], b_{ij}=b_{ji},$$

可得

$$[b_{ij}]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}[b_{ij}] = -\boldsymbol{E},$$

即

$$\begin{bmatrix} -b_{13} & b_{11}-6b_{13} & b_{12}-5b_{13} \\ * & b_{12}-6b_{23} & b_{22}-5b_{23} \\ * & * & b_{23}-5b_{33} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -b_{13} & -b_{23} & -b_{33} \\ * & b_{12}-6b_{23} & b_{13}-6b_{33} \\ * & * & b_{23}-5b_{33} \end{bmatrix} = -\boldsymbol{E}.$$

于是得方程组

$$\begin{cases} -2b_{13} = -1, \\ 2b_{12} - 12b_{23} = -1, \\ 2b_{23} - 10b_{33} = -1, \\ b_{11} - 6b_{13} - b_{23} = 0, \\ b_{12} - 5b_{13} - b_{33} = 0, \\ b_{13} + b_{22} - 5b_{23} - 6b_{33} = 0. \end{cases}$$

解得

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3\frac{31}{58} & 2\frac{41}{58} & \frac{1}{2} \\ 2\frac{41}{58} & 3\frac{12}{29} & \frac{31}{58} \\ \frac{1}{2} & \frac{31}{58} & \frac{6}{29} \end{bmatrix}.$$

主子式有

$$B_{11}=3\frac{31}{58}>0, B_{22}=\begin{vmatrix} 3\frac{31}{58} & 2\frac{41}{58} \\ 2\frac{41}{58} & 3\frac{12}{29} \end{vmatrix}=\frac{15\ 941}{3\ 364}>0,$$

$$B_{33}=\det \boldsymbol{B}=\frac{3\ 795}{6\ 728}>0,$$

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 正定，二次型 $V=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 定正. 零解渐近稳定.

8. 给定线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=5x_1-x_2, \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=3x_1+x_2,$$

试求出二次型 V 函数 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$，使其通过上述方程组的全导数

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=x_1^2+2x_1x_2+4x_2^2,$$

并判断函数 $V(\boldsymbol{x})$ 的定号性.

提示 由 $V'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}$ 知 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，这里 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=x_1^2+2x_1x_2+4x_2^2$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 得

$$\begin{bmatrix} 5a+3b & -a+b \\ 5b+3c & -b+c \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5a+3b & 5b+3c \\ -a+b & -b+c \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 10a+6b & -a+6b+3c \\ -a+6b+3c & -2b+2c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

有解

$$c=\frac{143}{96}, b=-\frac{49}{96}, a=\frac{39}{96}.$$

于是

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} \frac{39}{96} & -\frac{49}{96} \\ -\frac{49}{96} & \frac{143}{96} \end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \frac{1}{96}(39x_1^2 - 98x_1x_2 + 143x_2^2).$$

主子式

$$B_{11} = \frac{39}{96} > 0, B_{22} = \begin{vmatrix} \frac{39}{96} & -\frac{49}{96} \\ -\frac{49}{96} & \frac{143}{96} \end{vmatrix} = \frac{2\ 825}{9\ 216} > 0.$$

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 正定,二次型 $V = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 定正. 零解渐近稳定.

§6.4.5 习题 6.3 及其解答

1. 试求下列线性方程组的奇点,并通过变换将奇点变为原点,进一步判断奇点的类型及稳定性:

(1) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x - y + 1, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - y - 5.$

解 线性方程组

$$\begin{cases} -x - y + 1 = 0, \\ x - y - 5 = 0 \end{cases}$$

有解 $x = 3, y = -2$. 奇点为$(3, -2)$. 取线性变换

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - 3, \\ \tilde{y} = y + 2. \end{cases}$$

微分方程化为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = -\tilde{x} - \tilde{y}, \\ \dot{\tilde{y}} = \tilde{x} - \tilde{y}. \end{cases}$$

由特征方程

$$\begin{vmatrix} \lambda + 1 & 1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0, \lambda_{1,2} = -1 \pm \mathrm{i}$$

或

$$p=-(a+d)=2>0,q=ad-bc=2>0,p^2-4q=-4<0,$$

知奇点(3,-2)为稳定焦点.

(2) $\frac{dx}{dt}=2x-7y+19,\frac{dy}{dt}=x-2y+5.$

提示 代数方程组 $2x-7y+19=0,x-2y+5=0$ 有解 $x=1$, $y=3$. 奇点为(1,3). 经线性变换 $\tilde{x}=x-1,\tilde{y}=y-3$ 后化为 $\dot{\tilde{x}}=2\tilde{x}-7\tilde{y},\dot{\tilde{y}}=\tilde{x}-2\tilde{y}$,由

$$p=-(a+d)=0,q=ad-bc=3>0,$$

奇点(1,3)为中心.

2. 试讨论方程组

$$\frac{dx}{dt}=ax+by,\frac{dy}{dt}=cy$$

的奇点类型,其中 a,b,c 为实常数且 $ac\neq0$.

提示 由 $p=-(a+c),q=ac,p^2-4q=(a-c)^2$ 或特征方程

$$\begin{vmatrix}\lambda-a & -b\\ 0 & \lambda-c\end{vmatrix}=(\lambda-a)(\lambda-c)=0,\lambda_1=a,\lambda_2=c.$$

知奇点(原点)当 $ac<0$ 时为鞍点;$ac>0,a<0,a\neq c$ 时为稳定结点;$ac>0,a>0,a\neq c$ 时为不稳定结点;$a=c<0,b\neq0$(重根)时为稳定退化结点;$a=c>0,b\neq0$(重根)时为不稳定退化结点;$a=c$, $b=0$(重根)时为奇结点.

3. 对线性方程组

$$\frac{dx}{dt}=ax+by,\frac{dy}{dt}=cx+dy,$$

其中 a,b,c,d 为实常数,记 $p=-(a+d),q=ad-bc,\Delta=p^2-4q$.

(1) 试用 p,q,Δ 的符号确定方程组的奇点的可能类型(鞍点,结点,焦点,中心);

(2) 试用 p,q 的符号确定方程组零解的稳定性.

解 因线性微分方程组的特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的特征根有

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}(-p\pm\sqrt{\Delta}),\lambda_1+\lambda_2=-p,\lambda_1\cdot\lambda_2=q.$$

于是

(1) 当 $q<0$ 时特征根符号不同,奇点为鞍点;

当 $q>0,p=0$ 时特征根为共轭虚根,奇点为中心;

当 $\Delta<0,p\neq0$ 时特征根为实部不为零的共轭复根,奇点为焦点;

当 $\Delta\geqslant0,q>0$ 时特征根为同号实根,奇点为结点;

当 $q=0$ 时特征根有一零根,存在奇线 $ax+by=0$.

(2) 当 $p>0,q>0$ 时特征根为负实部根或为负根,方程组的零解渐近稳定;

当 $p=0,q>0$ 时特征根为共轭虚根,原点为中心,方程组的零解稳定;

当 $p<0$ 或 $q<0$ 时特征根为正实部根或有正根,方程组的零解不稳定.

4. RLC 振动回路(如图 6.18)中电流变化规律满足微分方程

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=0\quad(L>0,R\geqslant0,C>0),$$

试讨论这一系统的平衡状态(即方程的奇点)的可能类型.

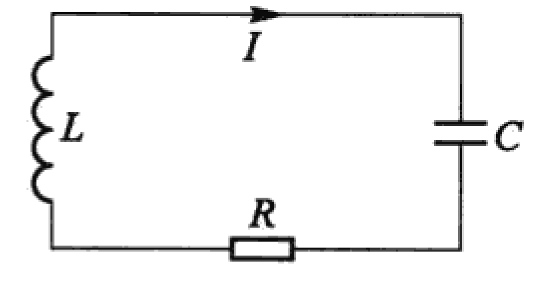


图 6.18 RLC 电路

解 令 $x=I,y=\frac{dx}{dt}=\frac{dI}{dt}$,则微分方程变为微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=y,\frac{dy}{dt}=\frac{d^2I}{dt^2}=-\frac{1}{CL}x-\frac{R}{L}y.$$

方程组的平衡状态为奇点(0,0),即原点. 特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{1}{CL} & \lambda + \frac{R}{L} \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{CL} = 0,$$

$$p = \frac{R}{L}, q = \frac{1}{CL}, \Delta = \frac{1}{CL^2}(R^2C - 4L).$$

由条件 $L > 0, R \geqslant 0, C > 0$ 知：$p \geqslant 0, q > 0$. 于是

当 $R = 0$ 时方程有共轭虚根，原点为中心；当 $R > 0, R^2C - 4L > 0$ 时方程有两负实根，原点为稳定结点；当 $R^2C - 4L = 0$ 时方程有重负实根，原点为稳定退化结点；当 $R^2C - 4L < 0$ 时方程有负实部共轭复根，原点为稳定焦点.

§6.4.6 习题 6.4 及其解答

1. 试确定下列方程组的周期解、极限环，并讨论极限环的稳定性：

(1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - x(x^2 + y^2 - 1)^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y(x^2 + y^2 - 1)^2. \end{cases}$

解 取极坐标 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，因

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta,$$

方程组 $\dot{x} = X, \dot{y} = Y$ 化为

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta = X, \quad ①$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta = Y. \quad ②$$

①$\cos\theta$ + ②$\sin\theta$ 及 − ①$\sin\theta$ + ②$\cos\theta$ 可分别得

$$\dot{r} = X\cos\theta + Y\sin\theta, r\dot{\theta} = -X\sin\theta + Y\cos\theta.$$

代入原方程得

$$\dot{r} = [-y - x(r^2 - 1)^2]\cos\theta + [x - y(r^2 - 1)^2]\sin\theta = -r(r^2 - 1)^2,$$

$$r\dot{\theta} = -[-y - x(r^2 - 1)^2]\sin\theta + [x - y(r^2 - 1)^2]\cos\theta = r.$$

于是方程组有平衡解 $r=0,\theta=t$ 和 $r=1,\theta=t$. 且当 $r\neq0,1$ 时 $\dot{r}<0,\dot{\theta}>0$,知任意初值为 $r(t_0)\neq0,1$ 的解 $(r(t),\theta(t))$ 当初值 $r(t_0)>1$ 时均有 $r(t)\to1,\theta(t)=t\to+\infty$;而当初值 $r(t_0)<1$ 时均有 $r(t)\to0,\theta(t)=t\to+\infty$,即 $r=1$ 为半稳定极限环. 奇点 $r=0$ 稳定.

对应于直角坐标系,得原方程组的平衡解为原点(0,0)和圆周 $x^2+y^2=1$. 当 $t\to\infty$ 时轨线逆时针方向趋于圆周 $x^2+y^2=1$ 或原点(0,0). 圆周 $x^2+y^2=1$ 为半稳定极限环.

(2) $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2-1),\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=-x-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2-1),\end{cases}\quad 当\ x^2+y^2\neq0,$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}=0,\qquad 当\ x^2+y^2=0.$$

提示 取极坐标 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,方程组化为

$$r\dot{r}=-r(r^2-1),\ \dot{\theta}=-1.$$

奇点为 $r=0,1$. 有特解(平衡解) $r=0,\theta=-t$ 和 $r=1,\theta=-t$. 因 $\theta(t)=t_0-t$,解顺时针方向旋转. 又 $r>1$ 时 $\dot{r}<0$;$0<r<1$ 时 $\dot{r}>0$,当 $r(t_0)\neq0,1$ 时 $r(t)\to1\ (t\to\infty)$. $r=1$ 为稳定极限环.

直角坐标系中,原方程有周期为 2π 的周期解 $x^2(t)+y^2(t)=1$,圆周 $x^2+y^2=1$ 是稳定极限环.

(3) $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)-y(x^2+y^2-4),\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)+x(x^2+y^2-4).\end{cases}$$

提示 取极坐标 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,方程组化为

$$\dot{r}=r(r^2-1)(r^2-9),\ \dot{\theta}=r^2-4.$$

奇点为 $r=0,1,3$. 有 3 个特解(平衡解):$(t\geq t_0)$

$$r_1=0,\theta_1=4(t_0-t);r_2=1,$$
$$\theta_2=3(t_0-t);r_3=3,\theta_3=5(t-t_0).$$

因 $r>3$ 时 $\dot{r}>0$；$1<r<3$ 时 $\dot{r}<0$；$0<r<1$ 时 $\dot{r}>0$. 即当 $r(t_0)>3$ 时 $r(t)\to 3\ (t\to-\infty)$，$r(t)\to+\infty\ (t\to+\infty)$；当 $1<r(t_0)<3$ 时 $r(t)\to 3\ (t\to-\infty)$，$r(t)\to 1\ (t\to+\infty)$；当 $0<r(t_0)<1$ 时 $r(t)\to 1\ (t\to+\infty)$. $r=3$ 为不稳定极限环；$r=1$ 为稳定极限环.

直角坐标系中，原方程有奇点 $(0,0)$ 和两个周期解 $x^2(t)+y^2(t)=9$，$x^2(t)+y^2(t)=1$. 圆周 $x^2+y^2=9$ 是不稳定极限环，$x^2+y^2=1$ 是稳定极限环.

2. 试判别下列方程组有无极限环存在：

(1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y+\dfrac{1}{3}x^3-y^2x,\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+y+yx^2+\dfrac{2}{3}y^3.\end{cases}$

提示 因 $\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}=2+2x^2+y^2>0$，全平面无极限环存在.

(2) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-2x+y-2xy^2,\\ \dfrac{dy}{dt}=y+x^3-x^2y.\end{cases}$

提示 因 $\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}=-(1+x^2+2y^2)<0$，全平面无极限环存在.

(3) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y-x+x^3,\\ \dfrac{dy}{dt}=-x-y+y^3.\end{cases}$

解 因 $\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}=-2+3(x^2+y^2)$，在域 $x^2+y^2\leqslant\dfrac{2}{3}$ 内无极限环存在. 在全平面无法判断. 取极坐标 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，方程

组化为

$$\dot{r} = -r + r^3(\cos^4\theta + \sin^4\theta) = r\left[-1 + r^2\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta\right)\right],$$

$$r\dot{\theta} = -r + r^3\cos\theta\sin\theta(-\cos^2\theta + \sin^2\theta),\ \dot{\theta} = -1 - \frac{1}{4}r^2\sin 4\theta.$$

有两特解 $r_1 = 0, \theta_1 = t_0 - t; r_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta}}, \theta_1 = \theta_1(t, t_0)$. 且

$1 \leqslant r_2 \leqslant \sqrt{2}, \dot{\theta} < 0$.

于是,在圆 $r = 1$ 上,有

$$\dot{r} = -\frac{1}{2}\sin^2 2\theta < 0,\ \dot{\theta} = -1 - \frac{1}{4}\sin 4\theta < 0,$$

轨线在圆 $r = 1$ 上沿顺时针方向从圆 $r = 1$ 外走进圆 $r = 1$ 内. 而在圆 $r = \sqrt{2}$ 上,有

$$\dot{r} = \sqrt{2}(1 - \sin^2 2\theta) > 0,\ \dot{\theta} = -1 - \frac{1}{2}\sin 4\theta < 0.$$

轨线在圆 $r = \sqrt{2}$ 上沿顺时针方向从圆 $r = \sqrt{2}$ 内走出圆 $r = \sqrt{2}$ 外. 同时,除 $r = 0$ 外不存在与 θ 无关的 r 使 $\dot{r} = 0$,即不含奇点. 于是,在环形闭域 $D: 1 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}$ 内不含奇点,且在其边界上轨线均离开该域,由[书 §6.4 - 定理 8],在域 D 内必存在不稳定极限环.

3. 考虑方程组

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y),\ \frac{dy}{dt} = Y(x, y),$$

其中函数 $X(x, y), Y(x, y)$ 在单连通区域 D 内有连续偏导数. 假设存在函数 $B(x, y)$,其一阶偏导数在域 D 内连续,且

$$\frac{\partial}{\partial x}(BX) + \frac{\partial}{\partial y}(BY)$$

不变号和不恒等于零. 试证明方程组在域 D 内不存在任何周期解.

证 反证法. 假设结论不成立,在域 D 内存在某周期为 T 的周期解

$$\Gamma: x=x(t), y=y(t), 0\leqslant t\leqslant T.$$

对由 Γ 围成的域 $D_\Gamma\subset D$,由格林公式有

$$\begin{aligned}&\iint_{D_\Gamma}\left[\frac{\partial(BX)}{\partial x}+\frac{\partial(BY)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_\Gamma[(BX)\mathrm{d}y-(BY)\mathrm{d}x]\\&=\int_0^T B\left(X\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-Y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^T B(x(t),y(t))(XY-YX)\mathrm{d}t=0.\end{aligned}$$

这与假设矛盾. 故在域 D 内不存在任何周期解.

4. 证明方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+ax+b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\alpha x^2-\beta\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2=0$$

没有极限环存在,其中 a,b,α,β 为常数,且 $b\neq0$. (提示:利用上题结果.)

证 令 $y=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,则微分方程变为微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-ax-by+\alpha x^2+\beta y^2.$$

即 $X=y,Y=-ax-by+\alpha x^2+\beta y^2$,于是

$$\frac{\partial}{\partial x}(BX)+\frac{\partial}{\partial y}(BY)=y\frac{\partial B}{\partial x}+B(2\beta y-b)+Y\frac{\partial B}{\partial y}.$$

按第 3 题的结果,如果能选取 $B(x,y)$,使得 $\frac{\partial B}{\partial y}=0$, $y\frac{\partial B}{\partial x}+B(2\beta y-b)$不变号,则可证明不存在任何周期解及极限环. 观察可得当取 $B(x,y)=b\mathrm{e}^{-2\beta x}$时有

$$\frac{\partial}{\partial x}(BX)+\frac{\partial}{\partial y}(BY)=y\frac{\partial B}{\partial x}+B(2\beta y-b)+Y\frac{\partial B}{\partial y}$$

$$= -b^2 e^{-2\beta x} < 0,$$

即在全平面上不变号且在任意子域不恒为零. 故方程不存在任何周期解及极限环.

5. 证明下列方程(组)存在唯一的稳定极限环:

(1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y - x^5 - 3x^2 y. \end{cases}$

证 将方程组转化为二阶方程:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + (3x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x + x^5 = 0.$$

此为李纳方程 $f(x) = 3x^2 - 1, g(x) = x + x^5$. $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数, 且 $f(0) = -1 < 0, xg(x) = x^2 + x^6 > 0$, 同时 $F(x) = \int_0^x (3x^2 - 1)dx = x^3 - x$ 有唯一正零点 $x = 1$, 当 $x \geq 1$ 时 $F(x)$ 单调增加, 且当 $x \to \pm\infty$ 时 $F(x) \to \pm\infty$. 根据[书 §6.4 - 定理 10], 方程存在唯一稳定极限环.

(2) $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + \alpha(x^{2n} - \beta)\dfrac{dx}{dt} + \gamma x^{2m-1} = 0$ (α, β, γ 为正常数, n, m 为正整数).

提示 利用[书 §6.4 - 定理 10], $f(x) = \alpha(x^{2n} - \beta), g(x) = \gamma x^{2m-1}, F(x) = \dfrac{\alpha}{2n+1}x^{2n+1} - \alpha\beta x$.

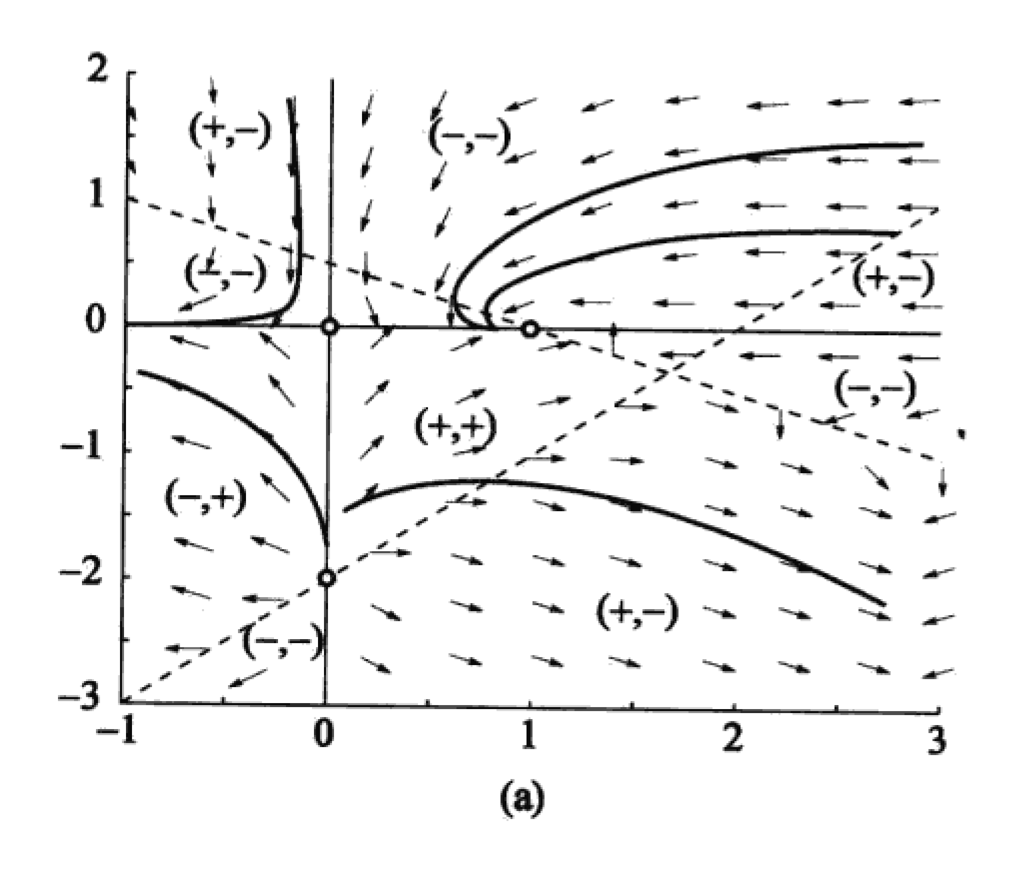
6. 试用等倾斜线法在相平面上画出下列方程的轨线图貌:

(1) $\dot{x} = x(1 - x - 2y), \dot{y} = y(x - 2 - y)$.

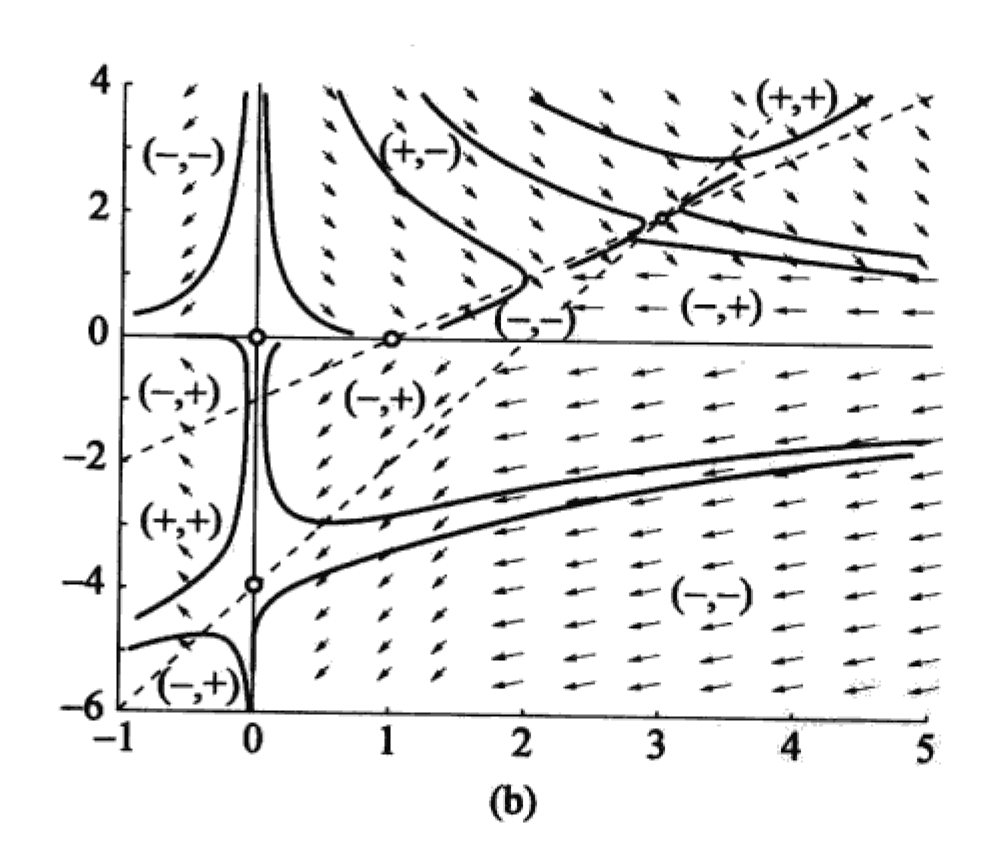
解 垂直等倾斜线 $x(1 - x - 2y) = 0$ 为两直线 $x = 0, x + 2y = 1$; 水平等倾斜线 $y(x - 2 - y) = 0$ 为两直线 $y = 0, x - y = 2$. 轨线图貌如图 6.19(a).

(2) $\dot{x} = x(1 - x + y), \dot{y} = y\left(x - 2 - \dfrac{1}{2}y\right)$.

提示 垂直等倾斜线 $x=0, x-y=1$；水平等倾斜线 $y=0, x-\frac{1}{2}y=2$. 轨线图貌如图 6.19(b).



(a)



(b)

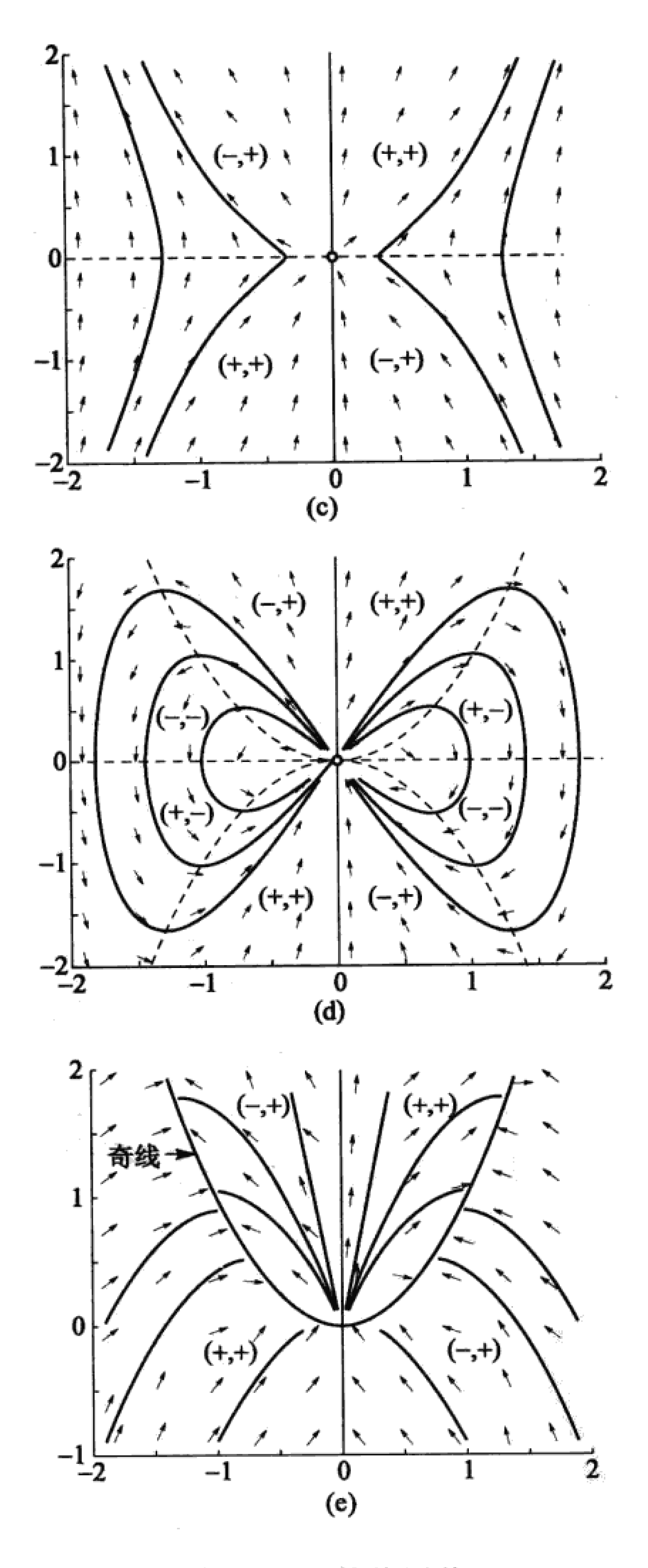


图 6.19　轨线图貌

(3) $\dot{x} = xy, \dot{y} = y^2 + x^4$.

提示 垂直等倾斜线 $x=0, y=0$；不存在水平等倾斜线. 轨线图貌如图 6.19(c).

(4) $\dot{x} = xy, \dot{y} = y^2 - x^4$.

提示 垂直等倾斜线 $x=0, y=0$；水平等倾斜线 $y = \pm x^2$. 轨线图貌如图 6.19(d).

(5) $\dot{x} = xy - x^3, \dot{y} = y^2 - 2x^2y + x^4$.

提示 垂直等倾斜线 $x=0, y=x^2$；水平等倾斜线 $y=x^2$. 实际上，$y=x^2$ 是方程的奇线. 轨线图貌如图 6.19(e).

7. 试详细讨论两种群模型(6.52)中的被捕食－捕食模型的各种情形.

解 设被捕食者数量为 $x \geqslant 0$，捕食者数量为 $y \geqslant 0$. 当没有捕食者时被捕食者数量应增加，而当没有被捕食者时捕食者数量应减少，因此被捕食－捕食模型为

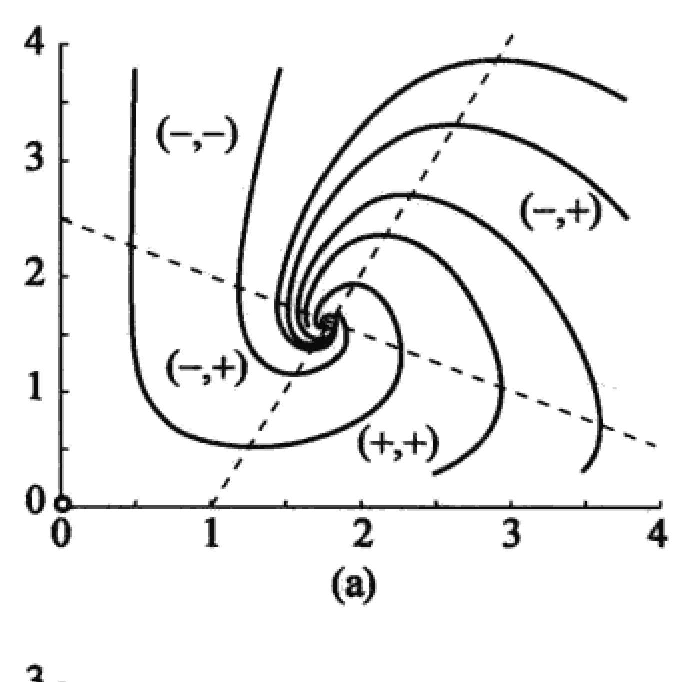
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = rx(1 - ax - by), \\ \dfrac{dy}{dt} = sy(-1 + cx - dy), \end{cases}$$

其中 r, s, a, b, c 为正常数，d 为可正可负的常数. 微分方程右端的代数方程有解 $(0,0)$，$\left(0, -\dfrac{1}{d}\right)$，$\left(\dfrac{1}{a}, 0\right)$，$\left(\dfrac{d+b}{ad+bc}, \dfrac{c-a}{ad+bc}\right)$，此即为相平面上的奇点. 如仅考虑对模型有意义的第 1 象限，则边界（x 轴和 y 轴）上有 2 或 3 个奇点 $(0,0)$，$\left(0, -\dfrac{1}{d}\right)$，$\left(\dfrac{1}{a}, 0\right)$，而第 1 象限内（特殊情况在边界上）有或没有奇点 $\left(\dfrac{d+b}{ad+bc}, \dfrac{c-a}{ad+bc}\right)$，视系数计算出的值是否大于或等于零而定.

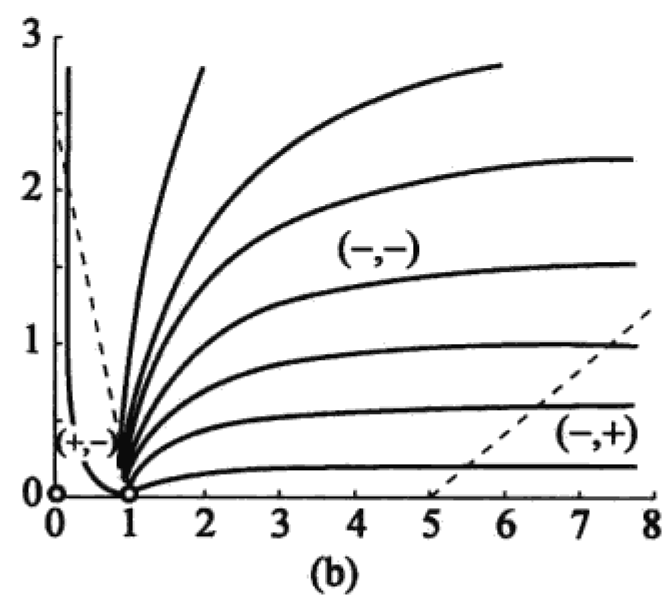
垂直等倾斜线为两直线 $x=0, ax+by=1$，一个是 y 轴，另一个是与 x 轴正半轴和 y 轴正半轴相交的斜线；水平等倾斜线为两直线 $y=0, cx-dy=1$，一个是 x 轴，另一个是与 x 轴正半轴和 y 轴相交的斜线.

轨线图貌先设 $d\geqslant 0$,此时可分 $a\leqslant c$ 和 $a>c$ 两种情形,$a\leqslant c$ 时在第一象限内有奇点 $\left(\frac{d+b}{ad+bc},\frac{c-a}{ad+bc}\right)$,$a>c$ 时在第一象限内没有奇点.

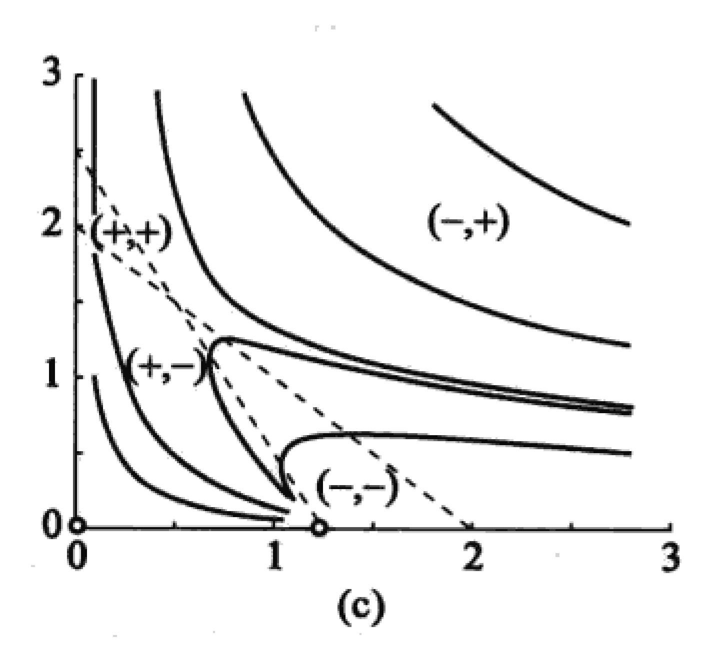
当 $d<0$ 时又可分 $-d\geqslant b$ 及 $-d<b$ 两种情形,再与 $d\geqslant 0$ 时 $a\geqslant c$ 和 $a<c$ 两种情形合并组成四种情形. 如图 6.20.



(a)



(b)



(c)

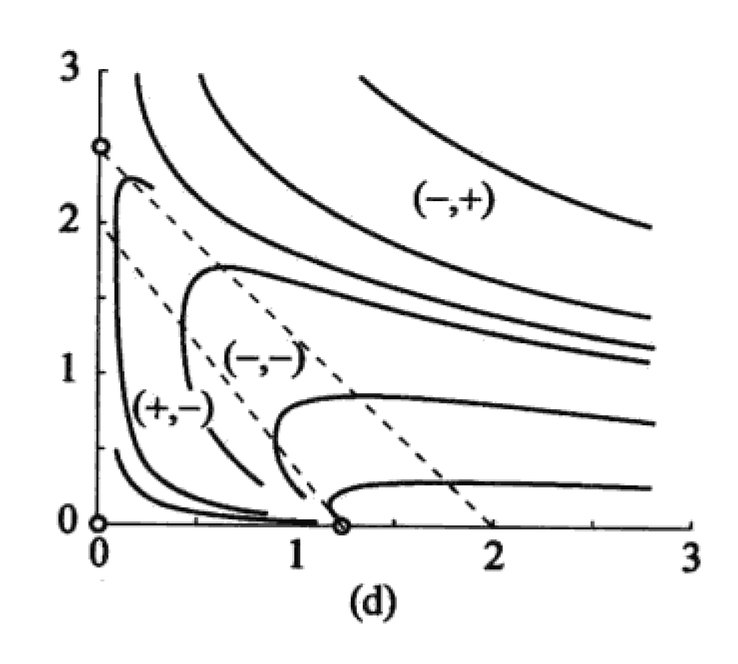


图 6.20　被捕食－捕食模型轨线图貌

§6.4.7　习题 6.5 及其解答

1. 试判别下列一维单参数微分方程的 λ 的分支值：

（1） $\dot{x}=\lambda+2x+x^2$.

解　平衡点为 $\lambda+2\xi+\xi^2=0$ 的解 $\xi=-1\pm\sqrt{1-\lambda}$，当 $\lambda\leqslant 1$ 时才有实平衡点. 经变换 $y=x-\xi$ 方程化为 $\dot{y}=\lambda+2(y+\xi)+(y+\xi)^2=2(1+\xi)y+y^2$.

$\lambda=1$ 时平衡点 $\xi=-1$，因 $\dot{y}=y^2>0$，原点 $y=0$，即平衡点 $\xi=-1$ 半稳定；$\lambda<1$ 时有两平衡点 $\xi=-1\pm\sqrt{1-\lambda}$，由 $\dot{y}=\pm 2\sqrt{1-\lambda}\,y+y^2$，知原点 $y=0$，即平衡点 $\xi=-1+\sqrt{1-\lambda}$ 不稳定，平衡点 $\xi=-1-\sqrt{1-\lambda}$（渐近）稳定.

从 $\lambda<1$ 到 $\lambda=1$ 再到 $\lambda>1$ 时，从两个平衡点变为一个平衡点，再变为无平衡点. 故 $\lambda=1$ 为分支点.

（2） $\dot{x}=1+2\lambda x+x^2$.

提示　平衡点为 $\xi=-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-1}$，当 $\lambda^2\geqslant 1$ 时才有实平衡点. 经变换 $y=x-\xi$ 方程化为 $\dot{y}=2(\lambda+\xi)y+y^2$. $\lambda=\pm 1$ 时平衡点 $\xi=\mp 1$ 均为半稳定；$\lambda^2>1$ 时平衡点 $\xi=-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-1}$ 一个不稳定，一个稳定. $\lambda=\pm 1$ 为分支值，在 $\lambda=\pm 1$ 的两端平衡点个数

不同.

(3) $\dot{x}=x-3\lambda x^2+x^4$.

提示 平衡点为 $\xi=0$ 及 $\xi^3-3\lambda\xi+1=0$ 的解,由一元三次方程判别式 $\Delta=\frac{1}{4}-\lambda^3$ 知 $\Delta\leqslant 0$ 即 $\lambda\geqslant 4^{-\frac{1}{3}}$ 时才有三实根,$\lambda=4^{-\frac{1}{3}}$ 时两个相等,$\lambda>4^{-\frac{1}{3}}$ 时三个不相等. 当 λ 的大小变化使其平衡点个数不同,故分支值为 $\lambda=4^{-\frac{1}{3}}$.

2. 试通过计算平衡点和线性奇点性态求下列平面单参数微分方程的 λ 的分支值,并画图验证(令 $\dot{x}=y$):

(1) $\ddot{x}+(x^2-\lambda)\dot{x}+x=0$.

解 令 $\dot{x}=y$,方程化为 $\dot{x}=y,\dot{y}=(\lambda-x^2)y-x$. 平衡点为原点(0,0),线性近似方程 $\dot{x}=y,\dot{y}=-x+\lambda y$ 的特征方程有

$$p=-\lambda,q=1,\Delta=\lambda^2-4.$$

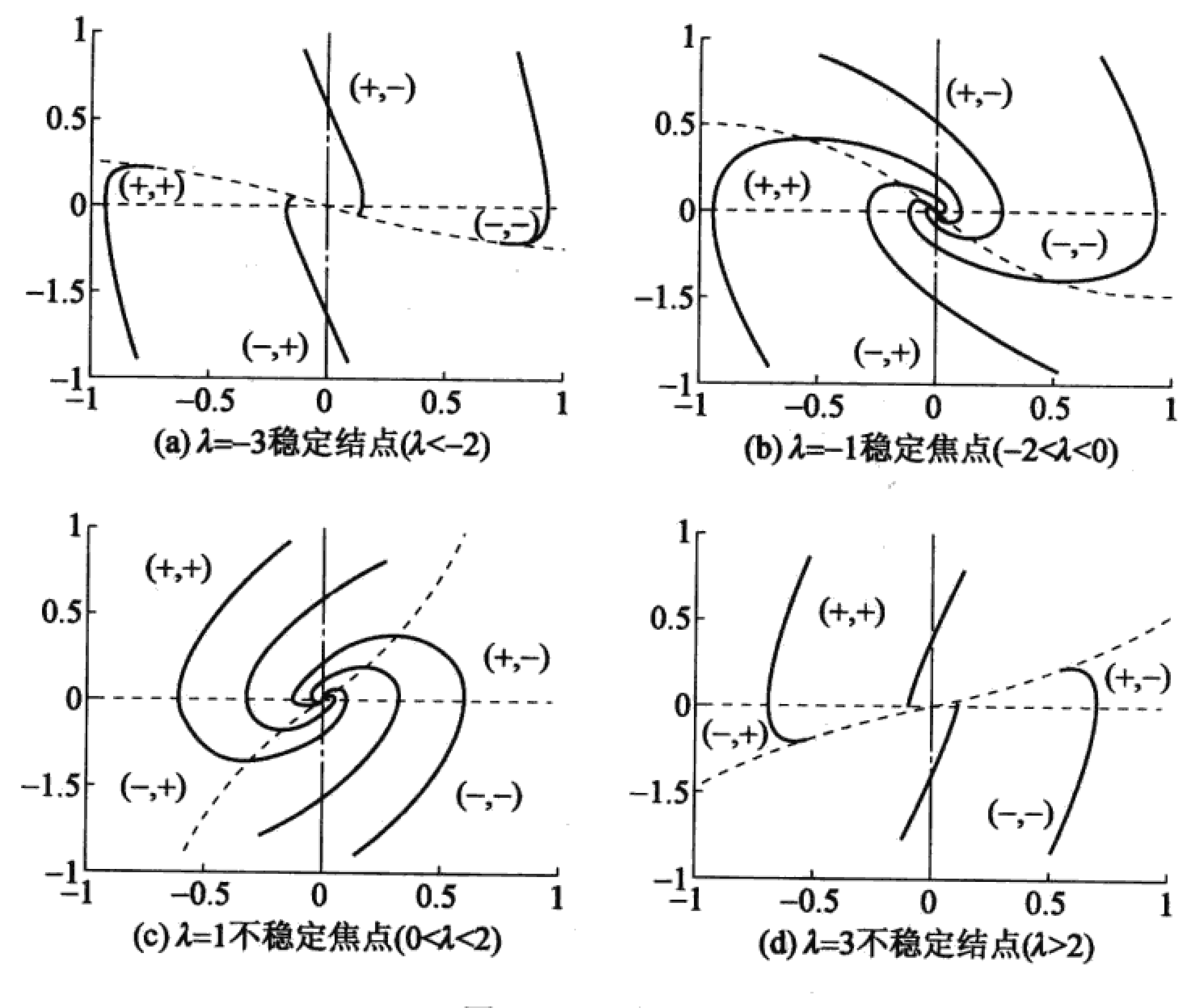
当 $-\infty<\lambda\leqslant-2$ 时 $p>0,\Delta\geqslant 0$,方程平衡点为稳定结点;当 $-2<\lambda<0$ 时 $p>0,\Delta<0$,方程平衡点为稳定焦点;当 $\lambda=0$ 时 $p=0$, $\Delta<0$,方程平衡点为非线性奇点;当 $0<\lambda<2$ 时 $p<0,\Delta<0$,方程平衡点为不稳定焦点;当 $2\leqslant\lambda<+\infty$ 时 $p<0,\Delta\geqslant 0$,方程平衡点为不稳定结点. 故方程的分支值为 $\lambda=0,\pm 2$. 其分支图如图 6.21.

(2) $\ddot{x}+(x-1)\dot{x}+\lambda x=0$.

提示 令 $\dot{x}=y$,方程化为 $\dot{x}=y,\dot{y}=(1-x)y-\lambda x$. 平衡点为原点(0,0),线性近似方程 $\dot{x}=y,\dot{y}=-\lambda x+y$ 的特征方程有 $p=-1,q=\lambda,\Delta=1-4\lambda$. 按 $-\infty<\lambda<0,0<\lambda<\frac{1}{4},\frac{1}{4}<\lambda<+\infty$ 区分方程的平衡点:鞍点,结点,焦点. 分支值为 $\lambda=0,\frac{1}{4}$. 分支图如图 6.22.

(3) $\ddot{x}+\dot{x}+x^2-\lambda=0$.

提示 令 $\dot{x}=y$,方程化为 $\dot{x}=y,\dot{y}=\lambda-x^2-y$. 当 $\lambda<0$ 时



(a) λ=−3稳定结点(λ<−2)　(b) λ=−1稳定焦点(−2<λ<0)

(c) λ=1不稳定焦点(0<λ<2)　(d) λ=3不稳定结点(λ>2)

图 6. 21　分支图

无平衡点，当 $\lambda \geqslant 0$ 时平衡点为$(\pm\sqrt{\lambda},0)$. 对 $\lambda \geqslant 0$，经变换 $\tilde{x} = x \mp \sqrt{\lambda}$，$\tilde{y} = y$，方程化为 $\dot{\tilde{x}} = \tilde{y}$，$\dot{\tilde{y}} = \mp 2\sqrt{\lambda}\,\tilde{x} - \tilde{x}^2 - \tilde{y}$. 其线性近似方程 $\dot{\tilde{x}} = \tilde{y}$，$\dot{\tilde{y}} = \mp 2\sqrt{\lambda}\,\tilde{x} - \tilde{y}$ 的特征方程有 $p = 1$，$q = \pm 2\sqrt{\lambda}$，$\Delta = 1 \mp 8\sqrt{\lambda}$. 可按 $-\infty < \lambda < 0$，$0 < \lambda < \frac{1}{64}$，$\frac{1}{64} < \lambda < +\infty$ 区分方程的平衡点$(\sqrt{\lambda},0)$：无平衡点，稳定结点，稳定焦点；而按 $-\infty < \lambda < 0$，$0 < \lambda < +\infty$ 区分方程的平衡点$(-\sqrt{\lambda},0)$：无平衡点，鞍点. 分支值为 $\lambda = 0, \frac{1}{64}$. 分支图如图 6. 23.

3. 试证明 n 维空间中容积 U 沿驻定微分方程的解的变化率

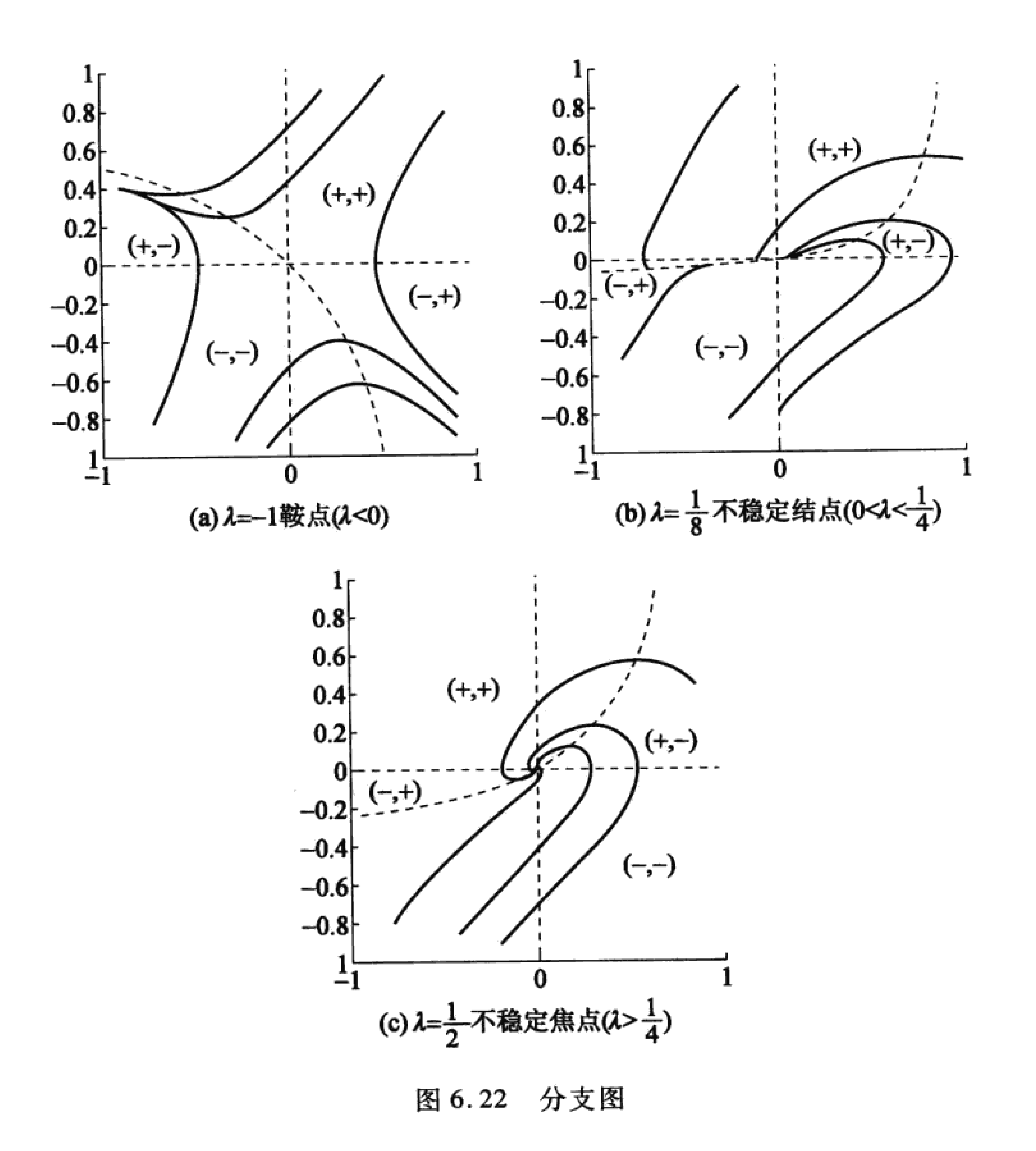
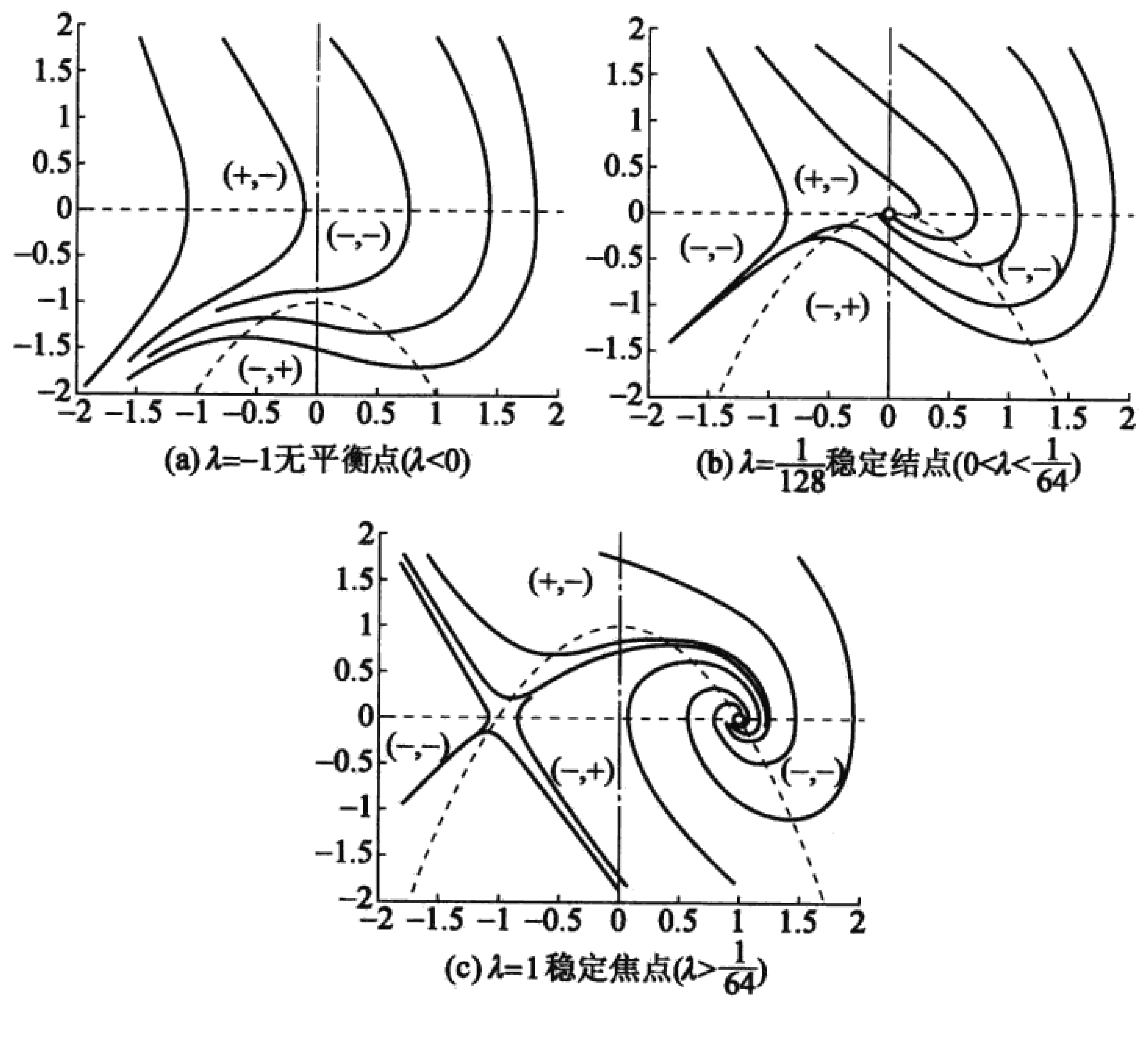


图 6.22 分支图

公式(6.60).

证 在 n 维(相)空间$(\boldsymbol{x}) \equiv (x_1, x_2, \cdots, x_n)$中由驻定微分方程 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$定义的向量场为$(\boldsymbol{f})$,通过容积 U 的 $\mathrm{d}x_i$ 面的 x_i 方向沿方程的解的单位变化量为

$$\left(f_i \pm \frac{1}{2} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i\right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{i-1} \mathrm{d}x_{i+1} \cdots \mathrm{d}x_n,$$



(a) $\lambda=-1$无平衡点($\lambda<0$)　(b) $\lambda=\frac{1}{128}$稳定结点($0<\lambda<\frac{1}{64}$)

(c) $\lambda=1$稳定焦点($\lambda>\frac{1}{64}$)

图 6.23　分支图

其中 ± 表示 U 的 x_i 方向的两侧,其 x_i 方向的总单位变化量为

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{i-1}\mathrm{d}x_{i+1}\cdots\mathrm{d}x_n=\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

于是容积 U 的沿方程的解的总变化量为

$$\oint_{\partial U}\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}S=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\cdot U,$$

其中 $\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}S$ 是任意面元的沿向量场($\boldsymbol{f}$)的变化量,∂U 表示容积 U 的闭合表面,U 容积为所有 U 中单位体积 $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$ 之和. 于是得容积 U 沿驻定微分方程的解的变化率

$$\alpha=\frac{1}{U}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{U}\oint_{\partial U}\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}S$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \equiv \operatorname{div} \boldsymbol{f}.$$

4. 试用计算机绘出洛伦茨方程(1.26)在参数 $a=10, b=\frac{8}{3}$ 和初值(1,1,0)下不同参数 $c=\frac{1}{3}$,13,20,120 的轨线图貌.

提示 参见[书附录Ⅱ §2 例8、§3 例8 和 §4 例7]. 可先定义参数 a,b,c 及其值,其洛伦茨方程用参数表示. 简单修改参数 c 的值后便得到不同 c 参数值下的轨线图貌. 亦可见[§10.2.3-(3a), §10.3.2-(3b), §10.4.3-(3a), §10.5.2-(3b)].

§6.4.8 习题 6.6 及其解答

1. 试证明泊松括号满足反对称、双线性和雅可比行列式.

证 对泊松括号

$$\{F,G\} = \nabla F^{\mathrm{T}} \nabla G = \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{q}}, \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{p}}\right) - \left(\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{q}}, \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{p}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}\right),$$

有反对称性:

$$\{F,G\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}\right) = -\{G,F\}.$$

双线性:

$$\{aF+bG,K\} = \left(\frac{\partial(aF+bG)}{\partial \boldsymbol{q}}, \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{p}}\right) - \left(\frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{q}}, \frac{\partial(aF+bG)}{\partial \boldsymbol{p}}\right)$$

$$= a\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{q}}, \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{p}}\right) - a\left(\frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{q}}, \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{p}}\right) + b\left(\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{q}}, \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{p}}\right) - b\left(\frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{q}}, \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{p}}\right)$$

$$= a\{F,K\} + b\{G,K\}.$$

雅可比行列式:由定义知

$$\{H,\{F,G\}\}=\left\{H,\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}-\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}\right)\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 F}{\partial q_j\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}+\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial^2 G}{\partial q_j\partial q_i}-\right.$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 F}{\partial q_j\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}-\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial^2 G}{\partial q_j\partial p_i}-$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial^2 F}{\partial p_j\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial^2 G}{\partial p_j\partial q_i}+$$

$$\left.\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial^2 F}{\partial p_j\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}+\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial^2 G}{\partial p_j\partial p_i}\right).$$

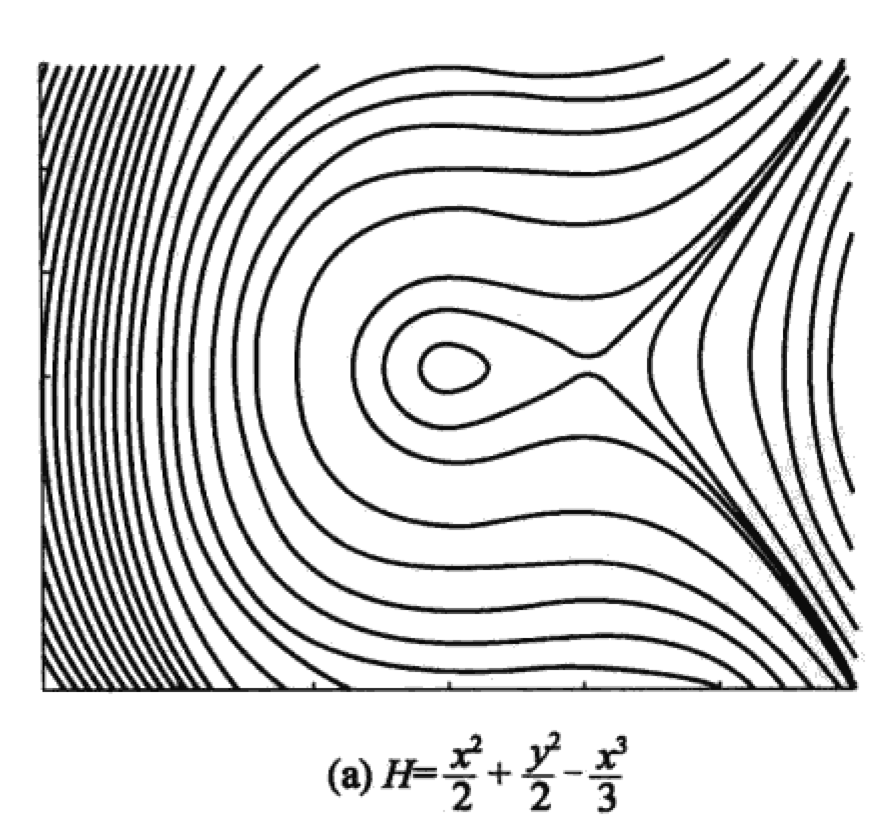
$\{F,\{G,H\}\}$，$\{G,\{H,F\}\}$依此类推，展开后可推得

$$\{H,\{F,G\}\}+\{F,\{G,H\}\}+\{G,\{H,F\}\}=0.$$

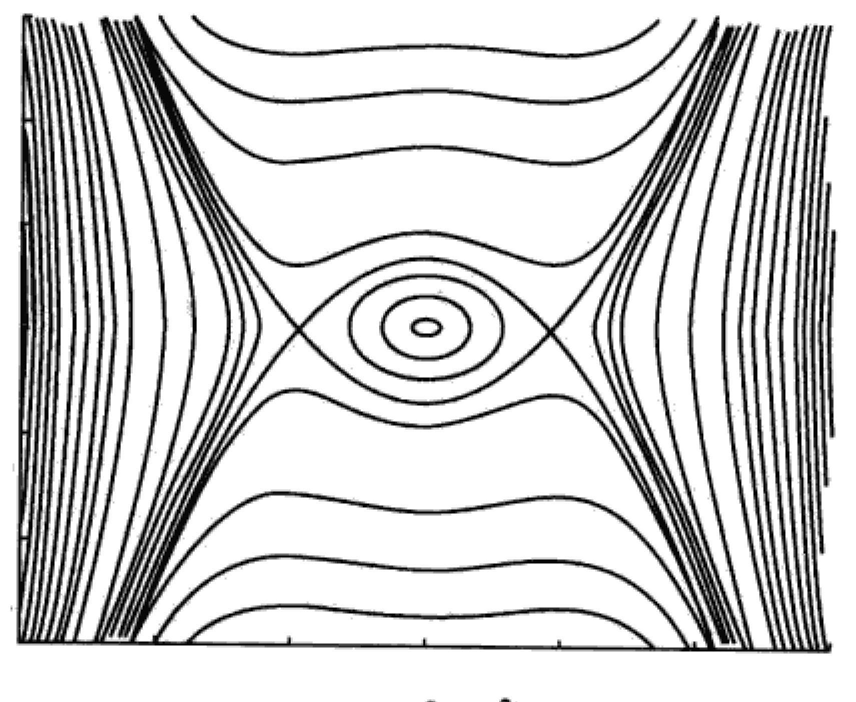
2. 将下列方程化为哈密顿方程（令 $\dot{x}=-y$），并画出其相图：

(1) $\ddot{x}+x-x^2=0$.

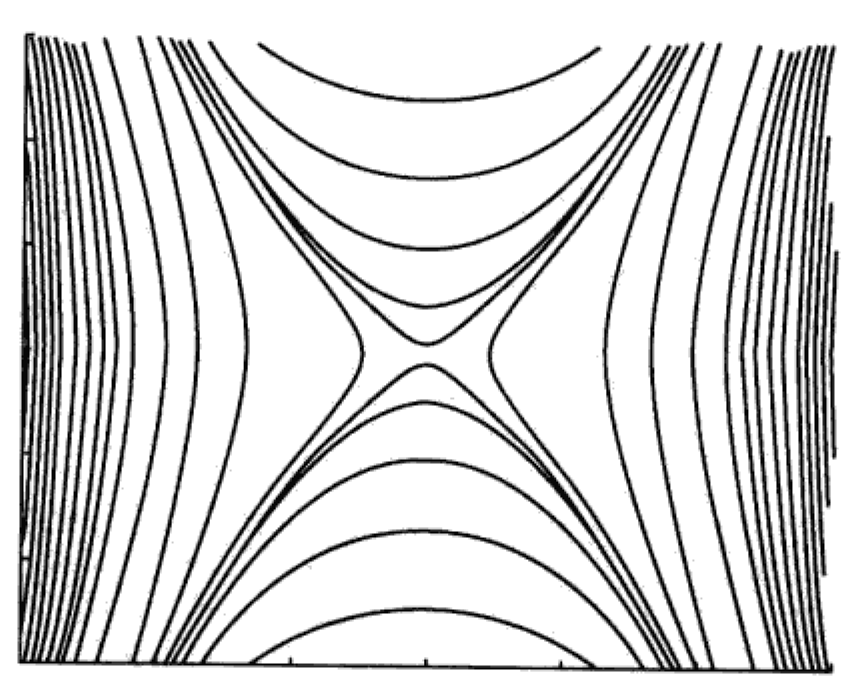
解 令 $\dot{x}=-y$，方程化为 $\dot{x}=-y$，$\dot{y}=x-x^2$. 方程是哈密顿方程，哈密顿函数为 $H=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3$. 其哈密顿函数相图为图 6.24(a).



(a) $H=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{x^3}{3}$



(b) $H=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{x^4}{4}$



(c) $H=-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{x^4}{4}$

图 6.24　H 函数图

（2）$\ddot{x}+x-x^3=0$.

提示　令 $\dot{x}=-y$,方程化为 $\dot{x}=-y,\dot{y}=x-x^3$. 哈密顿函数为 $H=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4$. 相图为图 6.24(b).

（3）$\ddot{x}-x-x^3=0$.

提示 令 $\dot{x}=-y$,方程化为 $\dot{x}=-y,\dot{y}=-x-x^3$. 哈密顿函数为 $H=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4$. 相图为图 6.24(c).

3. 计算例 4 中的梅利尼科夫函数 $M(t_0)$.

解 令 $\dot{x}=-y$,方程化为 $\dot{x}=-y,\dot{y}=x-x^2-\varepsilon\cos\omega t$. 当 $\varepsilon=0$ 时方程有哈密顿函数 $H=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3$. 相平面上原点是中心,双曲鞍点 $\boldsymbol{p}_0=\left(\frac{3}{2},0\right)$产生同宿轨 $\boldsymbol{q}^0(t)$. 在 $\Gamma^0=\{\boldsymbol{p}_0\}\cup\{\boldsymbol{q}^0(t)\mid t\in\mathbf{R}\}$ 内充满周期轨道. 对 $\boldsymbol{q}^0(t)$ 取 $H=\frac{1}{6}$,它满足$3y^2+3x^2-2x^3=1$,于是$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y=\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-3x^2+2x^3}$. 令 $x=1-u^2$,则方程变为$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\pm\frac{\sqrt{3}}{6}u\sqrt{3-2u^2}$. 初值条件为 $x(t_0)=-\frac{1}{2}$,即 $u(t_0)=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$. 方程可积分得 $u=\sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{sech}\left[\frac{1}{2}(t-t_0)\right]$. 即 $\boldsymbol{q}^0(t)$可表为

$$x=1-\frac{3}{2}\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}(t-t_0)\right],$$

$$y=\frac{3}{2}\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}(t-t_0)\right]\cdot\operatorname{th}\left[\frac{1}{2}(t-t_0)\right].$$

方程可记为$\boldsymbol{f}=(-y,x-x^2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{g}=(0,-\cos\omega t)^{\mathrm{T}}$,于是梅利尼科夫函数为

$$\begin{aligned}M(t_0)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}^0(t-t_0))\wedge\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}^0(t-t_0),t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}y(t-t_0)\cos\omega t\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3}{2}\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}(t-t_0)\right]\cdot\operatorname{th}\left[\frac{1}{2}(t-t_0)\right]\cdot\cos\omega t\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}3\operatorname{sech}^2t\cdot\operatorname{th}t\cdot\cos\omega(2t+t_0)\,\mathrm{d}t\equiv 3J.\end{aligned}$$

积分号内函数有奇点，利用复变函数的留数定理计算梅利尼科夫函数.将积分化为复数形式，有

$$M^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t - e^{-t}}{(e^t + e^{-t})^3} \cdot e^{\omega i(2t+t_0)} dt,$$

$$M(t_0) = 4\text{Im } M^*,$$

其中 Im M^* 为 M^* 的虚部. 函数 $F(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{(e^z + e^{-z})^3} \cdot e^{\omega i(2z+t_0)}$ 在复平面的 $P\left(0, \frac{\pi}{2}i\right)$ 处有奇点，根据留数定理有

$$\oint_L F(z) dz = 2\pi i R(P).$$

这里 $R(P)$ 是 $F(z)$ 在点 P 处的留数，而 L 为围绕 P 点的路径，如图 6.25 所示. 于是

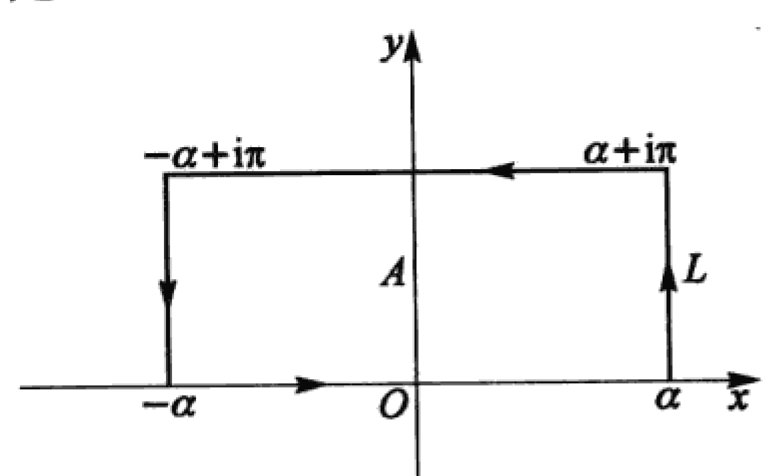


图 6.25　积分路径图

$$2\pi i R(P) = \int_{-\alpha}^{\alpha} F(x) dx + \int_{\alpha}^{-\alpha} F(x + i\pi) dx +$$

$$i\int_0^{\pi} F(\alpha + iy) dy + i\int_{-\pi}^{0} F(-\alpha + iy) dy.$$

因当 $\alpha \to \infty$ 时有 $\int_0^{\pi} F(\alpha + iy) dy \to 0$, $\int_{-\pi}^{0} F(-\alpha + iy) dy \to 0$，故

$$[1 - e^{-\omega(2\pi + t_0)}] M^* = 2\pi i R(P) = \frac{\pi}{4}[(4\omega^2 - 1)i - 1] e^{-\pi\omega}.$$

从而得

$$M(t_0)=\frac{3}{2}\pi(4\omega^2-1)\operatorname{csch}\omega\pi\cdot\sin\omega t_0.$$

4. 讨论非线性电容的振荡电路系统 $\ddot{x}+\varepsilon k\dot{x}+x-x^2=\varepsilon\mu\cos\omega t$.

(1) 求系统当 $\varepsilon=0$ 时的哈密顿函数;

(2) 求系统当 $\varepsilon=0$ 时的同宿轨 $\boldsymbol{q}^0(t)$ 的参数表示式;

(3) 计算同宿轨 $\boldsymbol{q}^0(t)$ 的梅利尼科夫函数 $M(t_0)$.

(4) 求满足 $M(t_0)$ 有简单零点的系统混沌的条件.

解 令 $\dot{x}=-y$,方程化为

$$\dot{x}=-y,\dot{y}=x-x^2+\varepsilon(ky-\mu\cos\omega t).$$

(1) 系统当 $\varepsilon=0$ 时的方程 $\dot{x}=-y,\dot{y}=x-x^2$ 为哈密顿方程,哈密顿函数为 $H=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3$.

(2) 由第 3 题的解答知 $H=\frac{1}{6}$ 对应未扰动运动方程的同宿轨 $\boldsymbol{q}^0(t)$. 其解可表为

$$x=1-\frac{3}{2}\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}(t-t_0)\right],$$

$$y=\frac{3}{2}\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}(t-t_0)\right]\cdot\operatorname{th}\left[\frac{1}{2}(t-t_0)\right].$$

(3) 方程可记为 $\boldsymbol{f}=(-y,x-x^2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{g}=(0,ky-\mu\cos\omega t)^{\mathrm{T}}$,于是梅利尼科夫函数为

$$\begin{aligned}M(t_0)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}^0(t-t_0))\wedge\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}^0(t-t_0),t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}[-ky^2(t-t_0)+\mu y(t-t_0)\cos\omega t]\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{-\frac{9}{4}k\operatorname{sech}^4\left[\frac{1}{2}(t-t_0)\right]\cdot\operatorname{th}^2\left[\frac{1}{2}(t-t_0)\right]+\right.\\&\quad\left.\frac{3}{2}\mu\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}(t-t_0)\right]\cdot\operatorname{th}\left[\frac{1}{2}(t-t_0)\right]\cdot\cos\omega t\right\}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{9}{2}k\mathrm{sech}^4 t \cdot \mathrm{th}^2 t + \right.$$

$$\left. 3\mu\mathrm{sech}^2 t \cdot \mathrm{th}\ t \cdot \cos\omega(2t + t_0) \right] \mathrm{d}t$$

$$\equiv -\frac{9}{2}kI + 3\mu J,$$

其中

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sech}^4 t \cdot \mathrm{th}^2 t \mathrm{d}t, J = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sech}^2 t \cdot \mathrm{th}\ t \cdot \cos\omega(2t + t_0)\mathrm{d}t.$$

容易计算

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sech}^4 t \cdot \mathrm{th}^2 t \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{sh}^2 t}{\mathrm{ch}^6 t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2-6}\frac{\mathrm{sh}\ t}{\mathrm{ch}^5 t}\bigg|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2-6}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{ch}^6 t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\frac{\mathrm{sh}\ t}{\mathrm{ch}^4 t}\bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{ch}^4 t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\frac{\mathrm{sh}\ t}{\mathrm{ch}^3 t}\bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{ch}^2 t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{15}\cdot\frac{\mathrm{sh}\ t}{\mathrm{ch}\ t}\bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{15}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-2t}}{1+\mathrm{e}^{-2t}}\bigg|_{t=+\infty} - \frac{\mathrm{e}^{2t}-1}{\mathrm{e}^{2t}+1}\bigg|_{t=-\infty}\right) = \frac{4}{15}.$$

而在第 3 题的解答中已求得 $J = \frac{1}{2}\pi(4\omega^2 - 1)\mathrm{csch}\ \omega\pi \cdot \sin\omega t_0$.

从而

$$M(t_0) = -\frac{6}{5}k + \frac{3}{2}\pi\mu(4\omega^2 - 1)\mathrm{csch}\ \omega\pi \cdot \sin\omega t_0.$$

(4) 当参数满足条件 $\frac{k}{|\mu|} < \frac{5}{4}\pi\mu\,|4\omega^2 - 1|\mathrm{csch}\ \omega\pi$ 时 $M(t_0)$ 有简单零点,系统具混沌性态.

5. 推导用双曲函数表示 $\varphi'^2 = \varphi^2(a - 2\varphi)$ 的精确解(6.68).

解 方程化为 $\varphi' = \varphi\sqrt{a - 2\varphi}$,令 $y = \sqrt{a - 2\varphi}$,$a = b^2$,则 $\varphi =$

$\frac{1}{2}(b^2-y^2)$. 方程化为 y 的方程并可积分

$$\varphi' = -yy' = \frac{1}{2}(b^2-y^2)y, 2y' = y^2 - b^2,$$

$$\frac{2\mathrm{d}y}{y^2-b^2} = \mathrm{d}\xi, \frac{1}{b}\ln\left|\frac{y-b}{y+b}\right| = \xi - \xi_0.$$

考虑到当 $\xi \to \pm\infty$ 时应 $\varphi \to 0$，即 $y \to b$，取

$$\frac{y-b}{y+b} = -\mathrm{e}^{b(\xi-\xi_0)},$$

$$\begin{aligned} y &= b - \frac{2b\mathrm{e}^{b(\xi-\xi_0)}}{1+\mathrm{e}^{b(\xi-\xi_0)}} \\ &= b - \frac{2b\mathrm{e}^{\frac{b}{2}(\xi-\xi_0)}}{\mathrm{e}^{\frac{b}{2}(\xi-\xi_0)} + \mathrm{e}^{-\frac{b}{2}(\xi-\xi_0)}} \\ &= b - \frac{b\mathrm{e}^{\frac{b}{2}(\xi-\xi_0)}}{\mathrm{ch}\left[\frac{b}{2}(\xi-\xi_0)\right]}. \end{aligned}$$

记 $s = \frac{b}{2}(\xi-\xi_0)$，于是有

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2}(b^2-y^2) = \frac{b^2\mathrm{e}^s}{\mathrm{ch}\ s} - \frac{b^2\mathrm{e}^{2s}}{2\mathrm{ch}^2 s} \\ &= \frac{b^2\mathrm{e}^s(2\mathrm{ch}\ s - \mathrm{e}^s)}{2\mathrm{ch}^2 s} = \frac{b^2\mathrm{e}^s(\mathrm{e}^s + \mathrm{e}^{-s} - \mathrm{e}^s)}{2\mathrm{ch}^2 s} \\ &= \frac{b^2}{2\mathrm{ch}^2 s} = \frac{b^2}{2}\mathrm{sech}^2 s = \frac{a}{2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{\sqrt{a}}{2}(\xi-\xi_0)\right]. \end{aligned}$$

得解

$$\varphi(x-at) = \frac{a}{2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{a}(x-at-\xi_0)\right].$$

6. 在空间 (x,t,u) 中画出 KdV 方程的单、双孤立子解 (6.68)，(6.71) 图.

解 其程序及图见第十章[§10.2.3 -(3b)，§10.3.2 -(3cd)，§10.4.3 -(3b)，§10.5.2 -(3b)].

第七章　一阶线性偏微分方程

§7.1　内 容 提 要

§7.1.1　基本概念

一阶偏微分方程：由多个自变量、一个未知函数及其一阶偏导数组成的关系式

$$F\left(x_1,\cdots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0.$$

一阶线性偏微分方程：

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}=0,\quad（齐次）$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}=Z(x_1,\cdots,x_n).\quad（非齐次）$$

一阶拟线性偏微分方程：

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i(x_1,\cdots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}=Z(x_1,\cdots,x_n,u).$$

函数 $u=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 称为偏微分方程的解，如果 $u=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $(x_1,\cdots,x_n)$ 空间的某域 D 内存在、连续且存在一阶偏导数，将 $u=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 代入相应偏微分方程时在 D 内变成恒等式.

$u=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 可视为在 $(x_1,\cdots,x_n,u)$ 空间的 n 维曲面，故解 $u=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 亦称为偏微分方程的积分曲面.

在域 D 内偏微分方程一切解的表示式称为通解.

齐次线性偏微分方程的特征方程为对应的写成对称形式的常微分方程组：

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n}.$$

拟线性偏微分方程的特征方程为

$$\frac{dx_1}{Y_1}=\frac{dx_2}{Y_2}=\cdots=\frac{dx_n}{Y_n}=\frac{du}{Z}.$$

§7.1.2 一阶线性偏微分方程与常微分方程组的关系

（1）**首次积分** 常微分方程初值问题

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x,y_1,\cdots,y_n),y_i(x_0)=y_i^0,i=1,\cdots,n, \qquad ①$$

其中 f_i 在域 G 内满足解的存在唯一性条件. 如存在 G 内连续、可微且不恒为常数的函数 $\psi(x,y_1,\cdots,y_n)$，当 y_i 用方程①的解 $y_i=y_i(x)(i=1,\cdots,n)$ 代替时，ψ 变为常数，则关系式 $\psi(x,y_1,\cdots,y_n)=c$（这里 c 为允许范围内的任意常数）称为方程组①的首次积分，有时亦称 $\psi(x,y_1,\cdots,y_n)$ 为首次积分.

方程组①的 n 个首次积分 $\psi_i(x,y_1,\cdots,y_n)=c_i(i=1,\cdots,n)$ 称为彼此独立的，如果雅可比行列式

$$\frac{D(\psi_1,\cdots,\psi_n)}{D(y_1,\cdots,y_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial\psi_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}$$

在 G 内恒不为零.

对称形式的常微分方程组的 $n-1$ 个首次积分 $\varphi_i(x,y_1,\cdots,y_n)=c_i(i=1,\cdots,n-1)$ 称为彼此独立的，如果矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}$$

的秩为 $n-1$.

(2) **首次积分充要条件定理** $\psi(x,y_1,\cdots,y_n)=c$ 是方程组①的首次积分的充要条件为在域 G 内成立恒等式

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}+f_1\frac{\partial \psi}{\partial y_1}+f_2\frac{\partial \psi}{\partial y_2}+\cdots+f_n\frac{\partial \psi}{\partial y_n}\equiv 0.$$

§7.1.3 利用首次积分求解常微分方程组

(1) **通积分** 常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}=f_i(x,y_1,\cdots,y_n),\ i=1,\cdots,n, \qquad ②$$

其中 f_i 在域 G 内满足解的存在唯一性条件.

定理 如果 $\psi_i(x,y_1,\cdots,y_n)=c_i(i=1,\cdots,n)$ 是方程组②的 n 个彼此独立的首次积分,则方程组②的任一解均可通过适当选取一组常数 c_i 而得到.

方程组②的 n 个彼此独立的首次积分全体称为方程组的通积分.

(2) **求首次积分的方法** 将方程组②写成对称形式的方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{g_0}=\frac{\mathrm{d}y_1}{g_1}=\frac{\mathrm{d}y_2}{g_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}y_n}{g_n},$$

其中 $g_i=g_0f_i(i=1,\cdots,n)$. 选取 $n+1$ 个不同时为零的函数 $\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_n$ 使得

$$\mu_0g_0+\mu_1g_1+\cdots+\mu_ng_n=0,\mu_0\mathrm{d}x+\mu_1\mathrm{d}y_1+\cdots+\mu_n\mathrm{d}y_n=\mathrm{d}\varphi,$$

其中 φ 为某函数,则 $\varphi=c$ 是方程组②的首次积分.

§7.1.4 一阶线性偏微分方程的解法

(1) 一阶齐次线性偏微分方程

通解结构定理 设 $\psi_i(x_1,\cdots,x_n)=c_i(i=1,\cdots,n-1)$是对称形式的常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{X_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{X_n}$$

的 $n-1$ 个彼此独立的首次积分,则一阶齐次线性偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}=0$$

的通解可表为

$$u=\Phi(\psi_1,\cdots,\psi_{n-1}),$$

其中 Φ 是其变元的任意连续可微函数.

一阶非齐次线性偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}=Z(x_1,\cdots,x_n)\quad（非齐次）$$

可作为一阶拟线性偏微分方程进行处理.

(2) 一阶拟线性偏微分方程

通解结构定理 设 $\psi_i(x_1,\cdots,x_n,u)=c_i(i=1,\cdots,n)$是对称形式的常微分方程组(特征方程)

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{Y_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{Y_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{Y_n}=\frac{\mathrm{d}u}{Z}$$

的 n 个彼此独立的首次积分,则一阶拟线性偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i(x_1,\cdots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}=Z(x_1,\cdots,x_n,u)$$

的通解可表为

$$\Phi(\psi_1,\cdots,\psi_n)=0,$$

其中 Φ 是其变元的任意连续可微函数. 可从其通解中得出解 $u=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$.

§7.1.5 柯西问题

(1) **线性偏微分方程柯西问题存在唯一性定理** 假设 $X_i(x_1, \cdots, x_n)(i=1,\cdots,n)$ 在域 D 内连续可微，且 $X_n \neq 0$，则柯西问题

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}=0, u|_{x_n=x_n^0}=f(x_1,\cdots,x_{n-1})$$

存在唯一解. 其中 x_n^0 是任意给定的数，$f(x_1,\cdots,x_{n-1})$ 是已知的连续可微函数.

(2) **拟线性方程柯西问题存在唯一性定理** 假设 $Y_i(x_1,\cdots,x_n,u)(i=1,\cdots,n)$ 和 $Z(x_1,\cdots,x_n,u)$ 在某域内连续可微，且 $Y_n \neq 0$，则柯西问题

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i(x_1,\cdots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}=Z(x_1,\cdots,x_n,u),$$

$$u|_{x_n=x_n^0}=g(x_1,\cdots,x_n,u)$$

存在唯一解，其中 x_n^0 是任意给定的数，$g(x_1,\cdots,x_n,u)$ 是已知的连续可微函数.

(3) **柯西问题的求解** 先利用对称形式常微分方程求相互独立首次积分，再应用通解结构和通积分式，寻求满足初值条件的柯西问题的解.

§7.2 学习辅导

§7.2.1 解题指导

(1) 要求熟悉一阶线性偏微分方程基本概念和理论，如线性和拟线性、柯西问题、积分曲面、通解、首次积分、函数独立性和通解结构，能化线性偏微分方程为对应的对称形式常微分方程组、求首次积分、判断函数独立性，求偏微分方程通解和初值问题的解.

(2) 求解 n 个自变量的一阶齐次线性偏微分方程先化为对应

的对称形式的 $n-1$ 个常微分方程组，通过积分因子求 $n-1$ 个首次积分，对 $n-1$ 个首次积分用雅可比行列式判断函数独立性，应用通解结构得到由 $n-1$ 个首次积分表示的任意连续可微函数便是所求的通解，或再结合初值条件求满足柯西问题的特解.

(3) 求解 n 个自变量的一阶非齐次线性或拟线性偏微分方程同样化为对应的对称形式的 n 个常微分方程组，只是连同因变量和右端函数多了一个方程. 求其 n 个独立的首次积分，含因变量的 n 个首次积分的任意连续可微函数便是所求的隐函数形式的通解，或再结合初值条件求满足柯西问题的特解.

(4) 一阶线性偏微分方程的求解转化为求常微分方程组的解，即其首次积分. 求首次积分多用积分因子法，但不一定能求得足够多的独立首次积分. 其求解有较多的技巧性和偶然性.

(5) 求常微分方程组的首次积分方法也是求解常微分方程组的一种方法，是一阶常微分方程积分因子法的推广. 其常微分方程组包括非线性方程组，与第六章不直接求出方程组的解而间接判断解的性态有所不同.

§7.2.2 例题选讲

例 1 设 $f(u)$ 是 u 的任意可微函数，试由关系式 $z=f(x^2-y^2)$ 中消去 f.

解 $z=f(x^2-y^2)$ 分别对 x,y 取偏导数：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_u(x^2-y^2),\frac{\partial z}{\partial y}=-2yf_u(x^2-y^2).$$

消去 f 得一阶线性齐次偏微分方程：

$$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

例 2 试写出下列偏微分方程的特征方程，并求其通解：

(1) $x\frac{\partial z}{\partial x}=x+y+2z$；　　(2) $e^x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=e^x y$；

(3) $x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=x^2y+z$.

解 (1) 方程可改写为 $x\frac{\partial z}{\partial x}+0\frac{\partial z}{\partial y}=x+y+2z$. 特征方程为 $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{0}=\frac{dz}{x+y+2z}$. 有解 $dy=0$, $y=\tilde{c}$. 及 $\frac{dx}{x}=\frac{dz}{x+y+2z}$, $\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=1+\frac{y}{x}$. 视 y 为常数时方程为线性常微分方程, 有解 $z=e^{2\ln|x|}\cdot\left[\int\left(1+\frac{y}{x}\right)x^{-2}\partial x+C(y)\right]=-x-\frac{1}{2}y+x^2C(y)$, 它已含解 y 为常数, 此即为拟线性偏微分方程的解.

(2) 特征方程为 $\frac{dx}{e^x}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{e^xy}$. 有 $\frac{dx}{e^x}=\frac{dy}{y^2}$, $\int e^{-x}dx=\int y^{-2}dy+c_1$. 得首次积分 $y^{-1}-e^{-x}=c_1$. 又有 $\frac{dx}{e^x}=\frac{dy}{y^2}=\frac{d(\ln|y|)}{y}=\frac{d(x-\ln|y|)}{e^x-y}=\frac{dz}{e^xy}$, $\frac{d(x-\ln|y|)}{y^{-1}-e^{-x}}=dz$. 利用第一首次积分后可积分得 $dz-\frac{d(x-\ln|y|)}{c_1}=0$, $z-\frac{1}{c_1}(x-\ln|y|)=c_2$, 于是第二首次积分为 $z-\frac{x-\ln|y|}{y^{-1}-e^{-x}}=c_2$. 两个首次积分之比不为常数, 故相互独立. 于是偏微分方程的通解为 $F\left(y^{-1}-e^{-x}, z-\frac{x-\ln|y|}{y^{-1}-e^{-x}}\right)=0$.

(3) 特征方程为 $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{2y}=\frac{dz}{x^2y+z}$. 有 $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{2y}$, $\ln|x|^2=\ln|y|+\tilde{c}_1$, $x^2=c_1y$, 得首次积分 $\frac{x^2}{y}=c_1$. 又有 $\frac{dx}{x}=\frac{2yxdx}{2yx^2}=\frac{x^2dy}{2yx^2}=\frac{2yxdx+x^2dy}{4yx^2}=\frac{d(x^2y)}{4x^2y}=\frac{dz}{x^2y+z}$, 进一步有

$$\frac{dx}{x}=\frac{d(x^2y)}{4x^2y}=\frac{3dz}{3(x^2y+z)}=\frac{d(x^2y-3z)}{x^2y-3z},$$

$$\ln|x^2y-3z|=\ln|x|+\tilde{c}_2, x^2y-3z=c_2x,$$

又得首次积分 $xy-\dfrac{3z}{x}=c_2$. 两个首次积分之比不为常数,故相互独立. 于是拟线性偏微分方程的通解为 $F\left(\dfrac{x^2}{y},xy-\dfrac{3z}{x}\right)=0$.

例 3 试求解下列偏微分方程:

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=1+x^2y$; (2) $z_{xt}=\sin t+x$.

解 (1) 原方程可变为$\dfrac{\partial z}{\partial x}+0\dfrac{\partial z}{\partial y}=1+x^2y$. 其特征方程为$\dfrac{\mathrm{d}x}{1}=\dfrac{\mathrm{d}y}{0}=\dfrac{\mathrm{d}z}{1+x^2y}$,有 $\mathrm{d}y=0$,得首次积分 $y=\tilde{c}$. 又有$\dfrac{\mathrm{d}x}{1}=\dfrac{\mathrm{d}z}{1+x^2y}$,$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1+x^2y$,利用第一首次积分视 y 为常数,方程为常微分方程,有 $\mathrm{d}z=(1+x^2\tilde{c})\mathrm{d}x$,$z=x+\dfrac{1}{3}x^3\tilde{c}+c$. 将第一首次积分代回,因上式积分时视 y 为常数,可视积分常数 c 为 y 的任意函数 $c=C(y)$,于是有 $z=x+\dfrac{1}{3}x^3y+C(y)$,其积分常数 $C(y)$ 为 y 的任意函数. 此为偏微分方程的解.

注 当偏微分方程仅含一个自变量的偏导数时,可将其他自变量视为常数. 于是可像常微分方程那样处理. 但此时的积分常数应视为其他自变量的任意函数. 例如,偏微分方程$\dfrac{\partial z}{\partial x}=1+x^2y$ 中可直接视 y 为常数,方程视为常微分方程,可对 x 积分得

$$z=x+\frac{1}{3}x^3y+C(y),$$

其积分常数 $C(y)$ 为 y 的任意函数. 此即为偏微分方程的解.

(2) 令 $u=z_x$,则方程变为 $u_t=\sin t+x$,可视 x 为常数对 t 积分得 $u=-\cos t+xt+C(x)$,即 $z_x=-\cos t+xt+C(x)$. 再对 x 积分(视 t 为常数),最后得

$$z = -x\cos t + \frac{1}{2}x^2 t + f(x) + g(t),$$

式中 $f(x), g(t)$ 均为任意函数. 此即为偏微分方程的解.

例 4 试求下列一阶微分方程组的首次积分:

(1) $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y}$; (2) $\frac{dy}{dx} = \frac{z}{x}, \frac{dz}{dx} = \frac{z(y+2z-1)}{x(y-1)}$.

解 (1) 由第一、二式得

$$\frac{x dx}{xz} = \frac{dy}{xz} = \frac{x dx - dy}{0}, x dx - dy = 0, x^2 = 2y + c_1.$$

代入第一、三式有

$$\frac{dx}{z} = \frac{dz}{y} = \frac{dz}{\frac{x^2}{2} - \frac{c_1}{2}}, \left(\frac{x^2}{2} - \frac{c_1}{2}\right)dx = z dz, \frac{x^3}{6} - \frac{c_1 x}{2} = \frac{z^2}{2} + \tilde{c}_2.$$

方程有两个独立的首次积分

$$x^2 - 2y = c_1, x^3 - 3x(x^2 - 2y) - 3z^2 = c_2,$$

其中 c_1, c_2 为积分常数.

(2) 将方程写成对称形式 $\frac{dx}{x(y-1)} = \frac{dy}{z(y-1)} = \frac{dz}{z(y+2z-1)}$.

由后两式有 $\frac{dz}{dy} = \frac{2}{y-1}z + 1$, 是线性微分方程, 有解

$$z = e^{\ln|y-1|^2}\left(\int e^{-\ln|y-1|^2} dy + \tilde{c}\right) = (y-1)^2\tilde{c} - (y-1).$$

代入前两式有

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{z} = \frac{dy}{(y-1)^2\tilde{c} - (y-1)} = \left[\frac{\tilde{c}}{(y-1)\tilde{c} - 1} - \frac{1}{y-1}\right]dy.$$

积分得

$$\frac{(y-1)\tilde{c} - 1}{y-1} = x + c, -(y-1)^{-1} - x = c - \tilde{c}.$$

于是方程有两个独立的首次积分

$$z = (y-1)^2\tilde{c} - (y-1), -(y-1)^{-1} - x = c - \tilde{c},$$

其中 $\tilde{c}, c$ 为积分常数.

例 5 求解下列满足给定条件的偏微分方程(柯西问题)：

(1) $(2xy^2+xz)\frac{\partial z}{\partial x}-(yz+3x^3y)\frac{\partial z}{\partial y}=3x^3z-2y^2z, y^2=z, x=3$；

(2) $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}+z^2=0, x-y=0, x-yz=1.$

解 (1) 特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{2xy^2+xz}=\frac{\mathrm{d}y}{-yz-3x^3y}=\frac{\mathrm{d}z}{3x^3z-2y^2z}$. 于是

$$\frac{\mathrm{d}z}{3x^3z-2y^2z}=\frac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{xy(2y^2-3x^3)}=\frac{3x^2\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y-\mathrm{d}z}{0}.$$

由第一式求得首次积分

$$-\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{xy}=\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{\mathrm{d}y}{y}, xyz=c_1.$$

而由第三式求得首次积分

$$3x^2\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y-\mathrm{d}z=0, x^3+y^2-z=c_2,$$

其中 c_1,c_2为积分常数.

由方程条件 $y^2=z, x=3$ 代入可求得 $c_2=27$, c_1任意. 得解为

$$x^3+y^2-z=27.$$

(2) 特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{y^2}=\frac{\mathrm{d}y}{yz}=-\frac{\mathrm{d}z}{z^2}$. 由后两式可求首次积分

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{\mathrm{d}z}{z}, yz=c_1.$$

将首次积分代入前两式得

$$\frac{\mathrm{d}x}{y^2}=\frac{\mathrm{d}y}{yz}=\frac{\mathrm{d}y}{c_1}, c_1\mathrm{d}x=y^2\mathrm{d}y,$$

$$\frac{1}{3}y^3=c_1x+\tilde{c}_2, y^3-3xyz=c_2,$$

其中 c_1,c_2为积分常数. 这两个首次积分相互独立(其比不为常数),由条件 $x-y=0, x-yz=1$ 消去 x,y,z,可求得

$$x=y=yz+1=1+c_1, y^3-3xyz=(1+c_1)^3-3(1+c_1)c_1=c_2.$$

于是有解

$$(1+yz)^3=3(1-x+yz)yz+y^3.$$

§7.2.3 测试练习

1. 试从关系式$(x-a)^2+(y-b)^2+z=1$中消去参数a,b化为偏微分方程.

2. 试判断下列偏微分方程的类型,并写出其对应的特征方程(具体求解另见[§7.3.1－3]):

(1) $y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=x-y$;　　(2) $y\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x}$;

(3) $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+xy\frac{\partial u}{\partial z}=0$,当$z=0$时$u=x^2+y^2$.

3. 试求下列微分方程组的通积分:

(1) $\frac{dx}{z}=\frac{dy}{u}=\frac{dz}{x}=\frac{du}{y}$;　　(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y},\frac{dz}{dx}=\frac{z}{y}$;

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{z-x},\frac{dz}{dx}=y+1$.

4. 试求下列偏微分方程的解:

(1) $\frac{\partial z}{\partial x}=4x\frac{\partial z}{\partial y}$;　　(2) $\sin^2x\frac{\partial z}{\partial x}+\tan z\frac{\partial z}{\partial y}=\cos^2z$;

(3) $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$.

5. 试求下列满足给定条件的偏微分方程(柯西问题)的解:

(1) $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{z}{2}\frac{\partial u}{\partial z}=0,x=1,u=y+z^2$;

(2) $2yz\frac{\partial z}{\partial x}-xz\frac{\partial z}{\partial y}+xy=0,x^2+y^2=ay,z=0$;

(3) $z\frac{\partial z}{\partial x}+(z^2-x^2)\frac{\partial z}{\partial y}+x=0,y=x^2,z=2x$.

§7.3 补充提高

§7.3.1 补充习题

1. 求解下列偏微分方程：

(1) $xz_x = x + 2y + 2z$；　　(2) $u_{xt} = \sin t + 2x$；

(3) $z_{xx} = 6xy + 12x$.

2. 试用可积组合法求解 §5.3.1 第 3 题.

3. 具体求出 §7.2.3 第 2 题中线性偏微分方程的解.

4. 求解下列线性偏微分方程：

(1) $(y - z)u_x + (z - x)u_y + (x - y)u_z = 0$；

(2) $yzuu_x + zxuu_y + xyuu_z = xyz$；

(3) $z_x \tan x + z_y \tan y = \tan z$；

(4) $xzz_x + yzz_y = x^2 + y^2 + z^2$；

(5) $xyz_x - y(2x + y)z_y + 2xz = 0$；

(6) $(cy - bz)z_x + (az - cx)z_y = bx - ay$, a, b, c 为常数.

5. 求解下列线性偏微分方程的柯西问题：

(1) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + (xz + y)\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$, $x + y = 2z, xz = 1$；

(2) $x^2 z_x + y^2 z_y = z^2$, $x = 5y = 2z$；

(3) $x^2 z_x + y^2 z_y + z^2 = 0$, $xy = x + y, z = 1$.

§7.3.2 排疑解惑

(1) **首次积分**　首次积分，又称初积分，是由常微分方程组的解(因变量)与自变量构成的特殊的函数，解代入这个函数后函数值不变(与自变量无关). 对 n 维一阶微分方程组，其通解应有 n 个任意常数. 可通过对通解反求这些任意常数得到首次积分. 反求时要先通过雅可比行列式不为零判断这些通解是相互独立的. 实

际上，第二章中积分恰当微分方程或通过积分因子得到的通解便是首次积分. 对 n 个对称微分方程组，因自变量包含于变量中，其独立的首次积分个数为 $n-1$ 个，相应雅可比行列式的秩为 $n-1$ 来定义其相互独立性. 求得多个首次积分后，必须验证它们相互独立. 由于常微分方程组的首次积分对应一阶线性偏微分方程的解（见[书 §7.2 定理 1]），因此，既可以通过求常微分方程组的首次积分来解一阶线性偏微分方程，也可以通过求解一阶线性偏微分方程来得到常微分方程组的首次积分. 常微分方程组便通过首次积分和一阶线性偏微分方程联系在一起.

（2）**积分曲面与柯西问题**　n 个自变量的一阶偏微分方程的解可视为自变量和因变量的 $n+1$ 维空间中的一张 n 维曲面，这样的曲面称为一阶偏微分方程的积分曲面. 而对应的对称（常）微分方程组的首次积分在 $n+1$ 维空间中表示一条曲线，被称为特征曲线. 由 n 条相互独立的特征曲线编织成的曲面称为特征曲面. 因此一阶偏微分方程的积分曲面也就是对应的对称（常）微分方程组的特征曲面. 两者合而为一. 所谓柯西问题，是偏微分方程的初值问题，就是求通过某给定曲线的积分曲面的一阶偏微分方程. 由于此曲线的任意性，柯西问题的解是不确定的. 当此曲线是一特征曲线时可能有无穷多个积分曲面通过它，即有无穷多个解. 也可能积分曲面无法包含该曲线，即解不存在，没有满足条件的解. 仅当在一定条件下，柯西问题才存在唯一解（[书 §7.5－定理 5、定理 6]）.

（3）**偏微分方程**　首先是偏微分方程的导出，由物理、力学等自然规律导出的偏微分方程往往称为数学物理方程，见[§7.3.3－6]. 此外，还可以由函数导出偏微分方程，见[§7.2.2－1，§7.2.3－1]. 微积分理论形成后不久，在 18 世纪初，人们就结合物理问题研究偏微分方程. 开始是弦振动方程、热传导方程和拉普拉斯方程（调和方程），后来是更复杂的偏微分方程组. 偏微分方程的研究往往从一阶到高阶，从线性到非线性，从特殊方程到一般

方程.会根据物理问题的需要,提出并形成多种多样的定解问题,包括初值(柯西)、边值及初边值问题,还要考虑解的适定性.二阶线性偏微分方程可分为双曲、抛物、椭圆及混合型分别研究.此外,还有用解析函数方法及泛函分析方法研究偏微分方程.

(4) **偏微分方程的求解** 求解偏微分方程一般比求解常微分方程复杂.求解常微分方程可首先求出包含若干任意常数的通解,然后通过满足给定的条件确定任意常数的值,从而得到所要求的解.而对偏微分方程,通解往往表示为某些函数(如首次积分)的任意函数,而要满足给定的条件来确定有关函数,有时不可能,有时十分困难.因而对给定条件,提出相应的各种求解方法.即先假设问题的提法在数学上是适定的(即解存在、唯一和稳定的),然后从各种方法中找出适用的方法求解,最后再验证所得结果的正确性.其基本的典型解法有:解偏微分方程的特征方程方法(拉格朗日-沙比解法);解线性方程的分离变量法与叠加原理;解初边值混合问题的特征函数方法;线性偏微分及其伴随算子的格林公式方法等.

(5) **一阶偏微分方程** 设两个自变量 x,y 和一个未知函数 z,一阶偏微分方程的一般形式是

$$F(x,y,z,z_x,z_y)=0.$$

若在 Oxy 平面上某区域内所有点 (x,y),x,y 的函数 z 及其偏导数恒满足上式,则称 z 为偏微分方程的解或积分.若解含有与自变量数目相同的任意常数,则称解为全积分.若解含有任意函数,则称解为通积分.既不属于通积分也不属于全积分的解称为奇积分.

一阶偏微分方程的特殊形式:

(a) 不含变量 x,y,z,即 $f(z_x,z_y)=0$ 型.其全积分为 $z=ax+by+c$,a,b,c 为常数,且 $f(a,b)=0$.

(b) 只含变量 x,y,z 中的一个,即 $f(x,z_x,z_y)=0$,$f(y,z_x,z_y)=0$,$f(z,z_x,z_y)=0$ 型之一:

（ⅰ）$f(x,z_x,z_y)=0, f_{z_x}\neq 0$. 设 $z_y=a$ 为常数，解出 $z_x=\Phi(x,a)$，则 $\mathrm{d}z=\Phi(x,a)\mathrm{d}x+a\mathrm{d}y$，得全积分 $z=\int\Phi(x,a)\mathrm{d}x+ay+b$.

（ⅱ）$f(y,z_x,z_y)=0, f_{z_y}\neq 0$. 设 $z_x=a$ 为常数，解出 $z_y=\Phi(y,a)$，则 $\mathrm{d}z=a\mathrm{d}x+\Phi(y,a)\mathrm{d}y$，得全积分 $z=ax+\int\Phi(y,a)\mathrm{d}y+b$.

（ⅲ）$f(z,z_x,z_y)=0$. 设 $z_y=az_x$ 得 $f(z,z_x,az_x)=0$. 对此方程的 z_x 求解，有 $z_x=\Phi(z,a)$，则 $\mathrm{d}z=\Phi(z,a)(\mathrm{d}x+a\mathrm{d}y)$，得全积分 $x+ay=\int\Phi^{-1}(z,a)\mathrm{d}z+b$.

（c）可分离变量型 $f(x,z_x)=g(y,z_y)$. 设 a 为任意常数，对 $f(x,z_x)=g(y,z_y)=a$，若可解出 $z_x=\Phi(x,a), z_y=\Psi(y,a)$，则 $\mathrm{d}z=\Phi(x,a)\mathrm{d}x+\Psi(y,a)\mathrm{d}y$，得全积分 $z=\int\Phi(x,a)\mathrm{d}x+\int\Psi(y,a)\ \mathrm{d}y+b$.

（d）$z=xz_x+yz_y+f(z_x,z_y)$ 型. 是推广了的克莱罗微分方程，其全积分为 $z=ax+by+f(a,b)$.

（6）**一阶偏微分方程的特征方程** 设两个自变量 x,y 和一个未知函数 z，记 $p=z_x, q=z_y$. 则一阶偏微分方程

$$f(x,y,z,p,q)=0$$

的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{f_p}=\frac{\mathrm{d}y}{f_q}=\frac{\mathrm{d}z}{f_pp+f_qq}=\frac{\mathrm{d}p}{-(f_x+pf_z)}=\frac{\mathrm{d}q}{-(f_y+qf_z)}.$$

若对特征方程通过分子分母的组合变成形式$\frac{\varphi}{0}$，则有首次积分（全积分）$\varphi=c$. 用此方法可求一般一阶偏微分方程的全积分，而不限于一阶线性偏微分方程.

例 试求方程 $q=xp+p^2$ 的全积分，其中 $p=z_x, q=z_y$.

解 $xp+p^2-q=0$ 的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x+2p}=\frac{\mathrm{d}y}{-1}=\frac{\mathrm{d}z}{p(x+2p)-q}=\frac{\mathrm{d}p}{-p}=\frac{\mathrm{d}q}{0}.$$

由第二、四式有$\frac{dy}{-1}=\frac{dp}{-p}$，$\ln|p|=y+\ln a$，$p=ae^y$. 于是原方程变为$q=axe^y+a^2e^{2y}$. 由关系式$dz=pdx+qdy$可得

$$dz=ae^y dx+(axe^y+a^2e^{2y})dy=ad(xe^y)+\frac{a^2}{2}d(e^{2y}).$$

积分得全积分

$$z=axe^y+\frac{a^2}{2}e^{2y}+b.$$

*(7) **偏微分方程与孤立子、特征值问题及反散射方法**　在非线性偏微分方程中发现了一大类可化为完全可积的哈密顿系统的孤立子方程，如KdV方程$u_t-6uu_x+u_{xxx}=0$([书§6.6.3])、MKdV方程$u_t-6u^2u_x+u_{xxx}=0$、伯格斯(Burgers)方程$u_t=2uu_x-u_{xx}$、正弦戈登(Sine-Gordon)方程$u_{xt}=\sin u$、双曲正弦戈登(Sinh-Gordon)方程$u_{xt}=\sinh u$及正弦拉普拉斯(Sine-Laplace)方程$u_{tt}+u_{xx}=\sin u$，双曲正弦拉普拉斯(Sinh-Laplace)方程$u_{tt}+u_{xx}=\sinh u$等. 它们往往对应于一个特征值问题$L(\varphi)=\lambda\varphi$，从而可通过反散射方法求解. 其特征值问题的边值条件是$\pm\infty$. 这样，通过孤立子，偏微分方程和常微分方程、边值问题又联系在一起. 参见[§6.3.2-(12)，§8.3.2-(5)、(6)].

§7.3.3　应用实例

(1) **人口发展方程**　只考虑自然出生死亡，不计及迁移等社会因素影响时，可引入人口的分布函数和密度函数. 时刻t时年龄小于r的人口数称为人口分布函数$F(r,t)$，它是一个非负非减函数，最高年龄r_m可视为$r_m\to+\infty$. 记时刻t的人口总数为$N(t)$，则有性质：$F(0,t)=0$，$F(r_m,t)=N(t)$. 定义人口密度函数$p(r,t)=\frac{\partial F}{\partial r}$，记时刻$t$时年龄为$r$的人口死亡率为$\mu(r,t)$. 考虑时刻$t$时年龄在$[r,r+dr]$段的人到时刻$t+dt$的情况，由年龄转变和死亡人数，应有$p(r,t)dr-p(r+dr_1,t+dt)dr=\mu(r,t)p(r,t)drdt$. 改写为

$[p(r+\mathrm{d}r_1,t+\mathrm{d}t)-p(r,t+\mathrm{d}t)]\mathrm{d}r+[p(r,t+\mathrm{d}t)-p(r,t)]\mathrm{d}r=-\mu(r,t)p(r,t)\mathrm{d}r\mathrm{d}t$,注意到 $\mathrm{d}r_1=\mathrm{d}t$. 于是得含定解条件的一阶线性偏微分方程——人口发展方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial p}{\partial r}+\dfrac{\partial p}{\partial t}=-\mu(r,t)p(r,t),\\ p(r,0)=p_0(r),\\ p(0,r)=f(t),\end{cases}$$

其中初始密度函数记为 $p(r,0)=p_0(r)$,$f(t)$为婴儿出生率. 此方程描述了人口的演变过程. 各年龄段的人口数即人口分布函数及人口总数分别为

$$F(r,t)=\int_0^r p(s,t)\mathrm{d}s \quad 和 \quad F(r,t)=\int_0^{r_m} p(s,t)\mathrm{d}s.$$

当社会稳定,死亡率与时间无关即 $\mu(r,t)=\mu(r)$时方程有解

$$p(r,t)=\begin{cases}p_0(r-1)\mathrm{e}^{-\int_{r-t}^{r}\mu(s)\mathrm{d}s}, & 0\leqslant t\leqslant r,\\ f(t-r)\mathrm{e}^{-\int_0^r\mu(s)\mathrm{d}s}, & t>r.\end{cases}$$

可通过方程或其解进一步讨论人口的生育率、生育模式与平均年龄、平均寿命、老龄化指标以及人口控制等问题,参见[文 15 §5.6].

(2) **交通流** 考虑一段公路上的汽车流动,在 t 时刻,点 x 与点 $x+\Delta x$ 之间的汽车数量记为 $n(x,x+\Delta x,t)$. 若有连续函数$k(x,t)$,使得 $n(x,x+\Delta x,t)=\int_x^{x+\Delta x}k(x,t)\mathrm{d}x$. 则 $k(x,t)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{n(x,x+\Delta x,t)}{\Delta x}$. 在 t 时刻通过点 x 的汽车数量称为流速 $q(x,t)$. 而 t 时刻到 $t+\Delta t$ 时刻的汽车数量为 $Q(x,t,t+\Delta t)=\int_t^{t+\Delta t}q(x,t)\mathrm{d}x$ 及 $q(x,t)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{Q(x,t,t+\Delta t)}{\Delta t}$. 由车辆守恒可得,在任何时刻有$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_x^{x+\Delta x}k(x,t)\mathrm{d}x=q(x,t)-q(x+\Delta x,t)$. 由$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_x^{x+\Delta x}k(x,t)\mathrm{d}x$

$=\int_{x}^{x+\Delta x}\dfrac{\partial k(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}x$,用 Δx 除以全式并取极限可得交通流的基本守恒方程 $\dfrac{\partial k}{\partial t}+\dfrac{\partial q}{\partial x}=0$. 假设 $q=q(k)$,方程变为 $\dfrac{\partial k}{\partial t}+\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}k}\dfrac{\partial k}{\partial x}=0$(*). 可通过实测数据求出其关系式再求解方程. 如考虑这段路上的自由速度 v_f 和拥挤密度 k_j 的 Greenshields 模型 $q=v_f k\left(1-\dfrac{k}{k_j}\right)$. 对方程(*),其特征方程为 $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}k}\mathrm{d}t$,有首次积分 $x-\left(\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}k}\right)t=c$. 方程(*)的通解为 $k(x,t)=\Phi\left(x-\left(\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}k}\right)t\right)$,其中 $\Phi(u)$ 为变量 u 的任意连续可微函数. 见[文 9 § 14].

(3) **流体动力学、伯努利定律和容器小孔液体流** 流体流动涉及流体的速度、密度和压强. 对二维不可压缩流体,密度 ρ 为常数. 设时间 t 和位置 (x,y) 处其速度分量为 $u(t,x,y)$ 和 $v(t,x,y)$. 考虑宽 Δx、长 Δy 的长方体的流入、流出量,如图 7.1,可得连续性方程:$[u(t,x+\Delta x,y)-u(t,x,y)]\Delta y\Delta t+[v(t,x,y+\Delta y)-v(t,x,y)]\Delta x\Delta t=0$,即 $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$. 考虑流体受力情况,由牛顿动力学定律,平行 x 轴方向两端的压力差有

$$\rho\Delta x\Delta y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-[p(t,x+\Delta x,y)-p(t,x,y)]\Delta y,$$

得动量方程 $\rho\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\partial p}{\partial x}$;同样平行 y 轴方向加上重力作用有 $\rho\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\partial p}{\partial y}-\rho g$. 由质点运动速度 $x_u=u,y_v=v$ 知 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}u+\dfrac{\partial u}{\partial y}v$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial v}{\partial x}u+\dfrac{\partial v}{\partial y}v$,代入

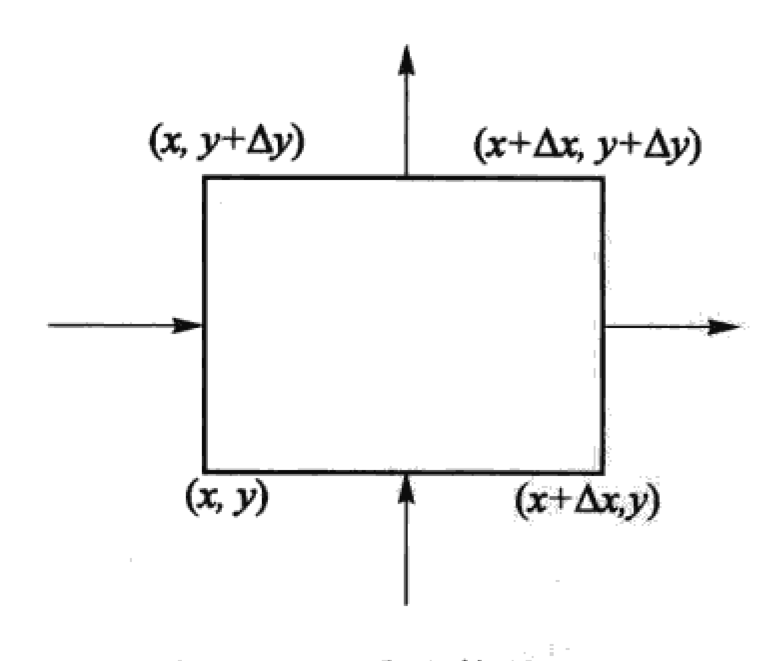


图 7.1 二维流体单元

动量方程最后为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x},\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}-g.\end{cases}$$

此即为二维不可压缩流体动力学方程组.

对稳定流,其流体速度和压强均与时间无关. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial v}{\partial t}=\dfrac{\partial p}{\partial t}=0$,沿流线有$\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=u\dfrac{\partial p}{\partial x}+v\dfrac{\partial p}{\partial y}$,代入动量方程可得 $u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+gv=0$. 因$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\equiv y'=v$,最后积分得伯努利定律

$$\frac{1}{2}U^2+\frac{1}{\rho}p+gy=\text{常数},U^2=u^2+v^2.$$

U 称为速度模长.

对三维不可压缩流体,类似有流体动力学方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x},\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y},\\ \dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}-g.\end{cases}$$

其伯努利定律为

$$\frac{1}{2}U^2+\frac{1}{\rho}p+gz=\text{常数},U^2=u^2+v^2+w^2.$$

利用伯努利定律可计算流体在容器出口处的速度. 如图 7.2,设容器截面积为 S. A,B 分别为液面和出口位置,相应的速度为

S_A, S_B. 由伯努利定律有 $\frac{1}{2}U_A^2 + \frac{1}{\rho}p_A + gy_A = \frac{1}{2}U_B^2 + \frac{1}{\rho}p_B + gy_B$. 显然 $U_B >> U_A$. 当液体由重力作用下流出时 $p_B = p_A$，上式变为 $U_B = \sqrt{2g(y_A - y_B)} = \sqrt{2gh}$，其中 h 为相对出口处的高度.

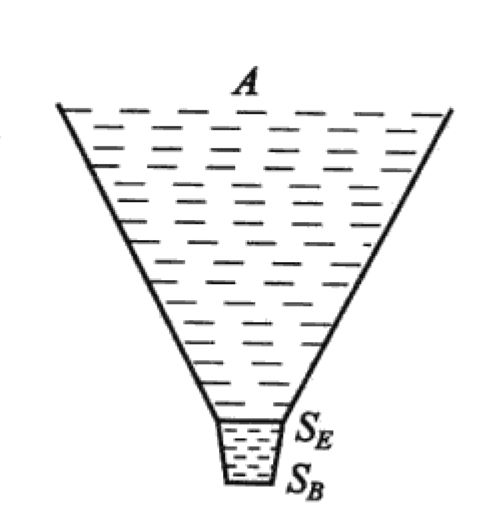


图7.2 容器出口流体

当流体从面积为 S_B 的一个小孔 B 流出时，流体微团不能马上改变方向，从小孔流出的流束截面 S_E 有一个收缩现象. $c = \frac{S_E}{S_B}$ 称为收缩比，它依赖于半收缩角 α. 对二维流收缩比的理论计算与实验值很接近，当 $\alpha = 22.5°, 45°, 67.5°, 90°$ 时，收缩比分别约为 $c = 0.86, 0.75, 0.67, 0.62$. 对底部开小孔容器，有 $\alpha = 90°$，即收缩比为 $c = 0.62$，此即为[§2.3.3 -(4)]中的公式 $0.62B\sqrt{2gh}$ 的根据. 对锥形容器，液体流动不是平面流，而是轴对称流，其收缩比不同. $\alpha = 90°$ 时为 $c = 0.58$. 知道出口处流速和收缩比即可计算液体排完时间. 可参见[文 14 §14].

(4) **电报方程** 在高频情况下讨论电磁波在时间空间的传播时，表征的物理量是电场强度和电磁强度，描述介质特性的是介电系数、电导率和磁导率等，遵从麦克斯韦偏微分方程(见[§7.3.3 -(6)]). 如仅研究高频电磁波沿传输线在时间空间的传播时，仍可引用电子电路中电流强度 I 和传输线同轴双线间的电压 V 等概念表征此种电磁波传播过程的物理量，而用单位传输线的电阻 R、电感 L、电容 C 和电漏 G 描述物理特性，但这些不是集中分布，而是时间空间的连续分布. 设同轴传输线为平行于 x 轴的双线，任取其中一段微元 $[x, x + dx]$，其等效电路为 $CRLG$ 电路，如图7.3. 根据基尔霍夫定律得

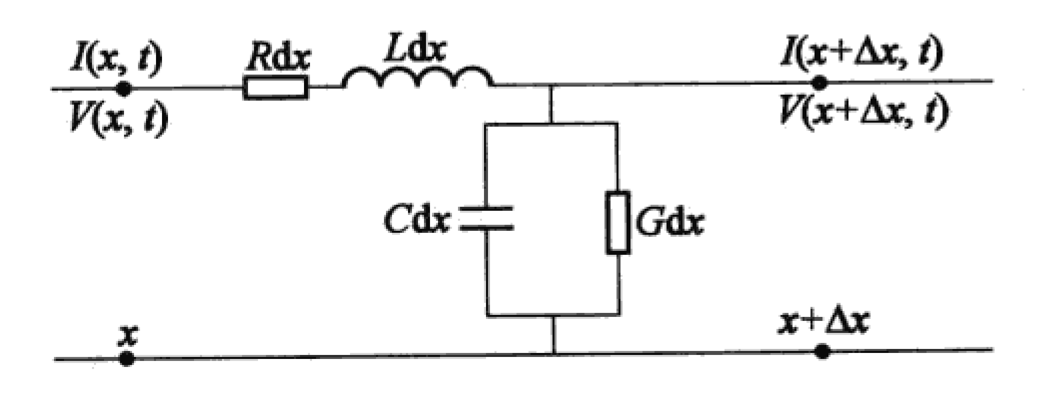


图 7.3　同轴传输线等效电路

$$\begin{cases} I(x,t)R\mathrm{d}x+\dfrac{\partial I(x,t)}{\partial t}L\mathrm{d}x+V(x+\mathrm{d}x,t)-V(x,t)=0, \\ V(x,t)G\mathrm{d}x+\dfrac{\partial V(x,t)}{\partial t}C\mathrm{d}x+I(x+\mathrm{d}x,t)-I(x,t)=0. \end{cases}$$

令 $\mathrm{d}x\to 0$ 取极限,得一阶偏微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}+L\dfrac{\partial I}{\partial t}+RI=0, \\ \dfrac{\partial I}{\partial t}+C\dfrac{\partial V}{\partial t}+GI=0, \end{cases}$$

称为电报方程组. 再利用求导及加减消去等变换可化为二阶偏微分方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-(LG+RC)\frac{\partial V}{\partial t}-RGV=0$$

或

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}-LC\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}-(LG+RC)\frac{\partial I}{\partial t}-RGI=0,$$

称为电报方程. 对没有损耗的理想情形,$R=G=0$,变为标准的波动方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-\frac{1}{LC}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0 \quad 或 \quad \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}-\frac{1}{LC}\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}=0.$$

可根据物理条件讨论电报方程或电报方程组的定解问题,包括初值问题或边值问题. 见[文 25 §1.2.7].

*(5) **奇非线性行波方程的常微分方程方法**　一阶线性偏微分

方程可以用常微分方程求解，一些数学物理方程往往可以通过分离变量而化为常微分方程求解. 对非线性偏微分方程，在[书§6.6.3]及[§7.3.2-(7)]提及近代发现了一大类可化为完全可积的哈密顿系统的孤立子方程，如 KdV 方程等. 由于激光物理等的实际应用需要，曾掀起研究孤立子的热潮. 1993 年美国物理学家曾推导出一个浅水波动方程 $u_t+2ku_x-u_{xxt}+3uu_x=2u_xu_{xx}+uu_{xxx}$ (Camassa - Holm 方程)，当 $k=0$ 时有尖峰的孤立尖波解 $u=ce^{-|x-ct|}$. 但对 $k\neq 0$ 时是否存在孤立尖波解争论不休. 类似地，还有其他类型的奇非线性行波方程的特殊形式孤立波解的存在问题. 后来，由中国数学家李继彬、戴晖晖、刘正荣等提出"奇非线性行波方程研究的动力系统方法"，用常微分方程定性方法解决了这类问题. 如 Camassa - Holm 方程当 $k\neq 0$ 时存在孤立尖波解 $u=(k+c)e^{-|x-ct|}-k$ (见[文 34]). 其方法核心是通过形如 $u=\varphi(\xi),\xi=x-ct$ 的行波解化为 φ 的常微分方程，再利用 $\frac{d\varphi}{d\xi}=\psi$ 将方程变为驻定微分方程 $\frac{d\psi}{d\xi}=\frac{\Phi(\varphi,\psi)}{\Psi(\varphi,\psi)}$，从而有 $\frac{d\psi}{d\varphi}=\frac{\Phi(\varphi,\psi)}{\psi\Psi(\varphi,\psi)}$. 为避免分析时存在分母为零出现无穷大值的困难，将方程分拆为方程组 $\frac{d\varphi}{d\tau}=\psi\Psi(\varphi,\psi)$，$\frac{d\psi}{d\tau}=\Phi(\varphi,\psi)$，用常微分方程定性方法和分支理论分析相空间 (φ,ψ) 中方程的轨线图貌，其分界线往往对应特殊形式的孤立波解. 他们用动力系统方法建立了奇非线性行波方程分支理论，并得到了一批存在各种形式的奇异孤立波解的奇非线性行波方程. 这是常微分方程在偏微分方程中的又一应用. 具体分析可参看专著[文 33]及有关论文.

*(6) **数学物理方程** 在实际与理论研究中提出大量数学物理方程. 数学物理方程主要指从物理学及自然科学、技术科学中产生的偏微分方程，有时也包括与此有关的积分方程、微分积分方程和常微分方程.

力学中，由牛顿的引力理论产生的引力势满足拉普拉斯方程或泊松方程（椭圆型）：

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \Delta u = -4\pi\rho(x,y,z).$$

流体力学中有纳维－斯托克斯方程组（有黏性）和欧拉方程组（无黏性）：

$$\rho\frac{Dv}{Dt}=\rho K-\mathbf{grad}\ p+\mu\Delta v,\ \rho\frac{Dv}{Dt}=\rho K-\mathbf{grad}\ p,$$

其中$\frac{DF}{Dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+u\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}+w\frac{\partial F}{\partial z}$（$u,v,w$ 为速度的三个分量）称拉格朗日导数.

弹性力学有圣维南方程组：

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\Delta\bar{u}+\rho X=0,$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\Delta\bar{v}+\rho Y=0, (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\Delta\bar{w}+\rho Z=0,$$

其中 $\theta\equiv\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}$.

波的传播由波动方程（双曲型）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

描述. 在直线上为弦振动方程$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

传热和扩散现象归结为热传导方程（抛物型）：

$$L(u)\equiv\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\Delta u=f(x,y,z,t).$$

这些是古典的数学物理方程. 19 世纪后新出现的数学物理方程有刻画电磁场变化的麦克斯韦（Maxwell）方程

$$\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{rot}\ \boldsymbol{H}-\boldsymbol{J}_0,\ \varepsilon_0\mathrm{div}\ \boldsymbol{E}=\rho_0,$$

$$\mu_0 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t} = -\,\mathbf{rot}\ \boldsymbol{E} - \boldsymbol{J}_m,\ \mu_0 \mathrm{div}\ \boldsymbol{H} = \rho_m.$$

描述微观粒子的薛定谔(Schrödinger)方程和狄拉克(Dirac)方程

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = H\phi;\ \mathrm{i}\frac{\partial \phi}{\partial t} = H\phi, H = c\alpha \cdot p + mc^2\beta.$$

广义相对论中确定引力场的爱因斯坦(Einstein)方程和基本粒子研究的杨－米尔斯方程等.

§7.3.4 历史与人物

(1) **简史(偏微分方程)** 偏微分方程在达朗贝尔(1744)和欧拉处理流体力学的物理问题时开始研究. 但一般理论的研究是从拉格朗日和拉普拉斯开始的. 由于同物理问题密切联系,二阶线性方程从18世纪以来就成为研究的主流. 椭圆型、双曲型和抛物型的分类以及各个边值问题、初值问题的解的研究直到19世纪. 傅里叶在热传导方程、格林在位势方程、泊松、黎曼在波动方程、庞加莱对特征值及希尔伯特对狄里克雷问题均有杰出贡献. 20世纪以来,混合型偏微分方程及非线性问题的提出以及泛函分析方法的采用,使研究的问题逐步复杂化. 近年来,由于计算机技术的发展,使得各种方程都可以数值求解,并揭示出很多重要性质,如孤立子解的发现.

因物理问题往往直接导出二阶偏微分方程,因此一阶偏微分方程理论开始时较少受注意. 但也有例外,1789年克莱罗在关于地球形状的研究中遇到现称为全微分方程的方程,并通过(或用积分因子)变为恰当方程求解. 拉格朗日首次给出非线性一阶方程的一般理论,将问题化为一组联立常微分方程. 拉格朗日方法从两个自变量推广到 n 个时出现困难,后来由柯西解决,拉格朗日方法常常称为柯西特征方法. 拉格朗日纯粹从分析进行,蒙日则开创了用几何来解释分析研究的运动,建立了特征曲线的微分方

程的分析形式,他超前的关于特征的思想后来成为特征理论的基础.柯西则用优级数法研究了偏微分方程组解的存在性.

(2) **达朗贝尔**(J. d'Alembert,1717—1783) 法国物理学家、数学家、文人.科学上以力学中的达朗贝尔原理和波动方程的解闻名.一生的主要工作是与狄德罗(Diderot)合作编订著名的《百科全书》,该书强调科学与文学,并攻击教会与国家中的反动势力,在法国启蒙运动中起到重要作用.他是欧拉、拉格朗日和拉普拉斯的朋友.

(3) **蒙日**(Gaspard Monge,1746—1818) 法国数学家,法国大革命时期学术界的领导人物,与军事筑城术有关的画法几何学的创建者.在微分几何、化学、力学等方面也有贡献.就读和曾任教于梅济耶尔军事学院.曾任海军与殖民部长.是拿破仑远征埃及的随行专家之一.他还是优秀的教师,培养了一批几何学家,使射影几何于19世纪在法国再度兴起.

(4) **柯西**(A. - L. Cauchy,1789—1857) 法国数学家,法国科学院院士,巴黎大学教授.率先定义了级数收敛、绝对收敛、序列函数极限、连续函数等概念及判别准则,研究了奇异积分.他是经典分析的奠基人之一,还是现代复变函数理论的创始者.对微分方程提出解的存在性和唯一性基本问题(柯西问题),开创了微分方程研究的新局面,还创造了解线性偏微分方程的特征值方法.

(5) **雅可比**(C. G. Jacob,1804—1851) 德国数学家.12岁入大学预科,17岁入柏林大学,20岁为其无薪教师.1826年在柯尼斯堡大学任教.和贝塞尔、F. E.诺伊曼三人成为复兴德国数学的核心.他和阿贝尔相互独立地奠定了椭圆函数的基础.给出了函数行列式求导公式,并应用于重积分、函数相关性及偏微分方程的研究中.将椭圆函数引入到数论、积分理论和微分方程的研究中.在分析力学、数学物理等方面亦有贡献.形成了自己的学派.

历史人物尚有:欧拉([§1.3.4 -(3)]),拉格朗日([§5.3.4 -(2)]),拉普拉斯([§5.3.4 -(3)]).

§7.4 习题与习题解答

§7.4.1 测试练习解答

1. 对$(x-a)^2+(y-b)^2+z=1$分别取x,y的偏导数得

$$2(x-a)+z_x=0,2(y-b)+z_y=0.$$

解出a,b后代入原关系式,得一阶非线性偏微分方程:

$$z_x^2+z_y^2+4z=4.$$

2. (1) 1个因变量、2个自变量的一阶非齐次线性偏微分方程.特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{-x}=\frac{\mathrm{d}u}{x-y}$.

(2) 1个因变量、2个自变量的一阶非齐次拟线性偏微分方程.特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{z}=\frac{x\mathrm{d}u}{y}$.

(3) 1个因变量、3个自变量的一阶齐次线性偏微分方程.特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}z}{xy}$.

3. (1) 对称型方程.可组合得首次积分$\frac{\mathrm{d}x}{z}=\frac{\mathrm{d}z}{x},z^2-x^2=c_1$和$\frac{\mathrm{d}y}{u}=\frac{\mathrm{d}u}{y},u^2-y^2=c_2$及$\frac{\mathrm{d}(z+x)}{z+x}=\frac{\mathrm{d}(u+y)}{u+y},z+x=c_3(u+y)$.

(2) 化为对称型方程$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{x}=\frac{\mathrm{d}z}{z}$.由$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{x}$,得首次积分$x^2=y^2+c_1$.又$\frac{\mathrm{d}(x+y+z)}{x+y+z}=\frac{\mathrm{d}z}{z}$,有首次积分$x+y+z=c_2z$.

(3) 化为对称型方程$\frac{\mathrm{d}x}{z-x}=\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{\mathrm{d}z}{(y+1)(z-x)}$.由$\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{\mathrm{d}(z-x)}{y(z-x)}$,得首次积分$z-x=c_1y$.将其代入第一式可求得首次积分

$\frac{dx}{c_1 y}=\frac{dy}{y^2}$, $y=c_2 e^{\frac{x}{c_1}}=c_2 e^{\frac{xy}{z-x}}$. 另当 $y=0$ 时还有$\frac{dz}{dx}=1$, $z=x+c_0$, 即还有积分$y=0$, $z=x+c_0$.

4. (1) 齐次线性偏微分方程的特征方程为$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-4x}$,有首次积分 $y=-2x^2+c$. 故偏微分方程的解为

$$z=\Phi(y+2x^2),$$

其中 Φ 为变元的任意连续可微函数.

(2) 非齐次拟线性偏微分方程的特征方程为$\frac{dx}{\sin^2 x}=\frac{dy}{\tan z}=\frac{dz}{\cos^2 z}$,有首次积分$\frac{dx}{\sin^2 x}=\frac{dz}{\cos^2 z}$, $\tan z=-\text{ctan}\ x+c_1$ 和$\frac{dy}{\tan z}=\frac{dz}{\cos^2 z}$, $dy=\frac{\sin z dz}{\cos^3 z}$, $2y-\sec^2 z=c_2$. 两个首次积分相互独立,得偏微分方程的通解为

$$\Phi(\tan z+\text{ctan}\ x, 2y-\sec^2 z)=0,$$

其中 Φ 为变元的任意连续可微函数.

(3) 非齐次拟线性偏微分方程的特征方程为$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{-xy}=\frac{dz}{-y^2}$,有首次积分$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{-xy}$, $xy=c_1$ 及$\frac{dy}{-xy}=\frac{dz}{-y^2}=\frac{dy}{-c_1}$, $y^2 dy=c_1 dz$, $y^3=3c_1 z+c_2=3xyz+c_2$,两个首次积分相互独立,得方程的通解为

$$\widetilde{\Phi}(xy, y^3-3xyz)=0,$$

其中 $\widetilde{\Phi}$ 为变元的任意连续可微函数. 上式当$\frac{\partial\widetilde{\Phi}(u,v)}{\partial v}\neq 0$ 时亦可表为

$$y^3-3xyz=\overline{\Phi}(xy), z=\frac{y^2}{3x}-\frac{\overline{\Phi}(xy)}{3xy}=\frac{y^2}{3x}+\Psi(xy),$$

其中 $\overline{\Phi},\Psi$ 为变元的任意连续可微函数.

实际上,因第 2 首次积分有 $z=\frac{y^2}{3x}-\frac{c_2}{3xy}$,两个首次积分有关系 $c_2=\Phi(c_1)$时得

$$z=\frac{y^2}{3x}-\frac{\Phi(xy)}{3xy}=\frac{y^2}{3x}+\Psi(xy).$$

5.(1)齐次线性偏微分方程的特征方程为$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{2dz}{z}$,有两个首次积分$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y},\frac{y}{x}=c_1$及$\frac{dx}{x}=\frac{2dz}{z},\frac{z^2}{x}=c_2$,首次积分相互独立,得方程的通解为

$$u=\Phi\left(\frac{y}{x},\frac{z^2}{x}\right).$$

由方程条件可得 $\Phi(y,z^2)=y+z^2,\Phi(c_1,c_2)=c_1+c_2$. 即满足方程条件的解为

$$u=\frac{y}{x}+\frac{z^2}{x}.$$

(2)非齐次拟线性偏微分方程的特征方程为$\frac{dx}{2yz}=\frac{dy}{-xz}=\frac{dz}{-xy}$,有两个首次积分$\frac{dx}{2yz}=\frac{dy}{-xz},2y^2+x^2=c_1$及$\frac{dy}{-xz}=\frac{dz}{-xy},z^2-y^2=c_2$. 首次积分相互独立,方程的通积分可表为 $\Phi(2y^2+x^2,z^2-y^2)=0$. 为确定函数 Φ,由解的条件联立首次积分消去变量得 $(c_1+c_2)^2=-a^2c_2$,即$(y^2+x^2+z^2)^2=a^2(y^2-z^2)$.

(3)非齐次拟线性偏微分方程的特征方程为$\frac{dx}{z}=\frac{dy}{z^2-x^2}=\frac{dz}{-x}$. 由$\frac{dx}{z}=\frac{dz}{-x}$得首次积分为 $z^2+x^2=c_1$. 由

$$\frac{zdx}{z^2}=\frac{dy}{z^2-x^2}=\frac{xdz}{-x^2}=\frac{-dy+zdx+xdz}{0},$$

$$dy = zdx + xdz = d(zx)$$

得首次积分为 $y = zx + c_2$. 两个首次积分相互独立，方程的通积分可表为 $\Phi(z^2 + x^2, y - zx) = 0$. 为确定函数 Φ，由解的条件代入首次积分有 $5x^2 = c_1, x^2 = 2x^2 + c_2$，消去变量 x 得 $c_1 = -5c_2$，即

$$z^2 + x^2 = 5(zx - y).$$

§7.4.2 补充习题解答

1. (1) 原方程变为 $z_x = \frac{2}{x}z + 1 + \frac{2y}{x}$，视 y 为常数时方程为 z 的线性方程，有解式 $z = e^{\int\frac{2}{x}dx}\left[\int\left(1 + \frac{2y}{x}\right)\frac{1}{x^2}\partial x + \Phi(y)\right] = x^2\left[-\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} + \Phi(y)\right] = -x - y + x^2\Phi(y)$，其中 $\Phi(y)$ 为 y 的任意函数.

(2) 令 $v = u_x$，方程化为 $v_t = \sin t + 2x$，视 x 为常数可积分得 $u_x = v = -\cos t + 2xt + \Phi(x)$，再视 t 为常数又积分得 $u = -x\cos t + x^2t + f(x) + g(t)$，其中 $f(x) = \int\Phi(x)dx$，$g(t)$ 为任意函数.

(3) 视 y 为常数方程可对 x 积分得 $z_x = 3x^2y + 6x^2 + \Phi(y)$，再对 x 积分一次得 $z = x^3y + 2x^3 + x\Phi(y) + \Psi(y)$，其中 Φ, Ψ 为任意函数.

2. (1) 微分方程组可改写为对称形式 $\frac{dx}{2x+4y} = \frac{dy}{-x-2y} = \frac{dt}{1}$，可组合积分为

$$xdx + 2ydx + 2xdy + 4ydy = \frac{1}{2}d(x^2) + 2d(xy) + 2d(y^2) = 0,$$

$$x^2 + 4xy + 4y^2 = (x + 2y)^2 = c_1^2,$$

从而 $x + 2y = c_1$. 代入方程有 $\frac{dy}{-c_1} = \frac{dt}{1}$，$y = -tc_1 + c_2$ 及

$$x=c_1-2y=c_1-2(-tc_1+c_2)=(2t+1)c_1-2c_2.$$

求得方程的解为 $x=(2t+1)c_1-2c_2, y=-tc_1+c_2$. 其中 c_1, c_2 为任意常数.

（2）微分方程组可改写为对称形式 $\frac{\mathrm{d}x_1}{x_2-x_3}=\frac{\mathrm{d}x_2}{x_1+x_2}=\frac{\mathrm{d}x_3}{x_1+x_3}=\frac{\mathrm{d}t}{1}$. 有首次积分 $\frac{\mathrm{d}(x_2-x_3)}{x_2-x_3}=\frac{\mathrm{d}t}{1}, x_2-x_3=c_1\mathrm{e}^t$ 及 $\frac{\mathrm{d}x_1}{c_1\mathrm{e}^t}=\frac{\mathrm{d}t}{1}, \mathrm{d}x_1=c_1\mathrm{e}^t\mathrm{d}t, x_1=c_1\mathrm{e}^t+c_2$. 又有

$$\frac{\mathrm{d}x_3}{c_1\mathrm{e}^t+c_2+x_3}=\frac{\mathrm{d}t}{1}, \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}=x_3+c_1\mathrm{e}^t+c_2, x_3=(c_1t+c_3)\mathrm{e}^t-c_2.$$

得解 $x_1=c_1\mathrm{e}^t+c_2, x_2=x_3+c_1\mathrm{e}^t=(c_1t+c_1+c_3)\mathrm{e}^t-c_2, x_3=(c_1t+c_3)\mathrm{e}^t-c_2$.

（3）方程有对称形式 $\frac{\mathrm{d}x_1}{3x_1+x_2-x_3}=\frac{\mathrm{d}x_2}{x_1+3x_2-x_3}=\frac{\mathrm{d}x_3}{3x_1+3x_2-x_3}=\frac{\mathrm{d}t}{1}$. 有首次积分 $\frac{\mathrm{d}(x_1+x_2-x_3)}{x_1+x_2-x_3}=\frac{\mathrm{d}t}{1}, x_1+x_2-x_3=c_1\mathrm{e}^t$，用首次积分及线性方程公式得

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{2x_1+c_1\mathrm{e}^t}=\frac{\mathrm{d}t}{1}, \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=2x_1+c_1\mathrm{e}^t, x_1=c_2\mathrm{e}^{2t}-c_1\mathrm{e}^t,$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{2x_2+c_1\mathrm{e}^t}=\frac{\mathrm{d}t}{1}, \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=2x_2+c_1\mathrm{e}^t, x_2=c_3\mathrm{e}^{2t}-c_1\mathrm{e}^t.$$

从而 $x_3=x_1+x_2-c_1\mathrm{e}^t=(c_2+c_3)\mathrm{e}^{2t}-3c_1\mathrm{e}^t$. 即方程的解为

$$x_1=c_2\mathrm{e}^{2t}-c_1\mathrm{e}^t, x_2=c_3\mathrm{e}^{2t}-c_1\mathrm{e}^t,$$

$$x_3=(c_2+c_3)\mathrm{e}^{2t}-3c_1\mathrm{e}^t,$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数.

3.（1）特征方程为 $\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{-x}=\frac{\mathrm{d}u}{x-y}$，由 $\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{-x}, x\mathrm{d}x=-y\mathrm{d}y$，首次积分为 $x^2+y^2=c_1$. 又由 $\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{-x}=\frac{\mathrm{d}u}{x-y}=\frac{\mathrm{d}(x+y+u)}{0}$，得首

次积分 $u+x+y=c_2$. 两个首次积分相互独立. 线性偏微分方程的通解为 $F(x^2+y^2,u+x+y)=0$,其中 F 为变元的任意连续可微函数.

(2) 特征方程为 $\frac{dx}{y}=\frac{dy}{z}=\frac{xdz}{y}$,有首次积分 $\frac{dx}{y}=\frac{xdz}{y}$, $z-\ln|x|=c_1$ 及

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{c_1+\ln|x|}, y^2=2(c_1x+x\ln|x|-x)-c_2=2x(z-1)-c_2.$$

拟线性偏微分方程的通解为 $F(z-\ln|x|,2x(z-1)-y^2)=0$,其中 F 为变元的任意连续可微函数.

(3) 特征方程为 $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{xy}$,有首次积分 $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$, $\frac{y}{x}=c_1$ 及

$$\frac{ydx}{xy}=\frac{xdy}{xy}=\frac{ydx+xdy}{2xy}=\frac{d(xy)}{2xy}=\frac{dz}{xy},\quad xy-2z=c_2.$$

由首次积分 $\frac{y}{x}=c_1, xy-2z=c_2$ 知当 $z=0$ 时 $u=x^2+y^2=\frac{c_2}{c_1}+c_1c_2$,即解为

$$u=(xy-2z)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right).$$

4. (1) 特征方程为 $\frac{dx}{y-z}=\frac{dy}{z-x}=\frac{dz}{x-y}$. 有首次积分 $d(x+y+z)=0, x+y+z=c_1$ 及

$$\frac{2xdx}{2x(y-z)}=\frac{2ydy}{2y(z-x)}=\frac{2zdz}{2z(x-y)}=\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{0},$$

$$x^2+y^2+z^2=c_2.$$

两个首次积分线性无关,偏微分方程有通解 $u=\Phi(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$,其中 Φ 为变元的任意函数.

(2) 特征方程为 $\frac{dx}{yzu}=\frac{dy}{zxu}=\frac{dz}{xyu}=\frac{du}{xyz}$. 有首次积分 $\frac{dx}{yzu}=\frac{dy}{zxu}$,

$xdx=ydy, y^2-x^2=c_1$; $\frac{dx}{yzu}=\frac{dz}{xyu}, z^2-x^2=c_2$; $\frac{dx}{yzu}=\frac{du}{xyz}, u^2-x^2=c_3$.

这三个首次积分两两线性无关,偏微分方程的通解为 $\Phi(y^2-x^2, z^2-x^2, u^2-x^2)=0$,其中 Φ 为变元的任意函数.

(3) 特征方程为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\tan x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\tan y}=\dfrac{\mathrm{d}z}{\tan z}$,可化为 $\dfrac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin x}=\dfrac{\mathrm{d}(\sin y)}{\sin y}=\dfrac{\mathrm{d}(\sin z)}{\sin z}$. 即有首次积分 $\dfrac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin x}=\dfrac{\mathrm{d}(\sin y)}{\sin y}$, $\dfrac{\sin y}{\sin x}=c_1$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin x}=\dfrac{\mathrm{d}(\sin z)}{\sin z}$, $\dfrac{\sin z}{\sin x}=c_2$. 这两个首次积分线性无关,方程有通解 $\Phi\left(\dfrac{\sin y}{\sin x},\dfrac{\sin z}{\sin x}\right)=0$,其中 Φ 为变元的任意函数.

(4) 特征方程为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{xz}=\dfrac{\mathrm{d}y}{yz}=\dfrac{\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$. 有首次积分 $\dfrac{\mathrm{d}x}{xz}=\dfrac{\mathrm{d}y}{yz}$, $\dfrac{y}{x}=c_1$. 因 $\dfrac{x\mathrm{d}x}{x^2}=\dfrac{y\mathrm{d}y}{y^2}=\dfrac{z\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$. 令 $u=x^2+y^2, v=z^2$,上式化为 $\dfrac{\mathrm{d}v}{u+v}=\dfrac{\mathrm{d}u}{u}$,即 $u\mathrm{d}v-v\mathrm{d}u=u\mathrm{d}u$,可积分得 $\dfrac{u\mathrm{d}v-v\mathrm{d}u}{u^2}=\dfrac{\mathrm{d}u}{u}$, $\dfrac{v}{u}-\ln|u|=c_2$. 故有首次积分 $\dfrac{z^2}{x^2+y^2}-\ln(x^2+y^2)=c_2$. 两个首次积分线性无关,方程有通解 $\Phi\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z^2}{x^2+y^2}-\ln(x^2+y^2)\right)=0$,其中 Φ 为变元的任意函数.

(5) 特征方程为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{xy}=\dfrac{\mathrm{d}y}{-y(2x+y)}=\dfrac{\mathrm{d}z}{-2xz}$. 由 $\dfrac{\mathrm{d}x}{xy}=\dfrac{\mathrm{d}y}{-y(2x+y)}=\dfrac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{-2x^2y}$,有首次积分 $\dfrac{\mathrm{d}x}{xy}=\dfrac{\mathrm{d}(xy)}{-2x^2y}$, $x^2+xy=c_1$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}(xy)}{-2x^2y}=\dfrac{\mathrm{d}z}{-2xz}$, $\dfrac{z}{xy}=c_2$. 两个首次积分线性无关,偏微分方程有通解 $\Phi\left(x^2+xy,\dfrac{z}{xy}\right)=0$,其中 Φ 为变元的任意函数.

(6) 特征方程为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{cy-bz}=\dfrac{\mathrm{d}y}{az-cx}=\dfrac{\mathrm{d}z}{bx-ay}$,有两个线性无关的首次积分

$$\frac{\mathrm{d}x}{cy-bz}=\frac{\mathrm{d}y}{az-cx}=\frac{\mathrm{d}z}{bx-ay}=\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{0}=\frac{a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z}{0},$$

$$x^2+y^2+z^2=c_1,ax+by+cz=c_2.$$

方程有通解 $\Phi(x^2+y^2+z^2,ax+by+cz)=0$,其中 Φ 为变元的任意函数.

5. (1) 拟线性偏微分方程的特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{xz+y}=\frac{\mathrm{d}z}{z}$. 有首次积分$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}z}{z}$,$z=c_1x$,又有首次积分

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{c_1x^2+y},c_1x^2\mathrm{d}x+y\mathrm{d}x=x\mathrm{d}y,c_1\mathrm{d}x+\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2}=0,$$

$$c_1x-\frac{y}{x}=c_2,z-\frac{y}{x}=c_2.$$

两个首次积分相互独立,方程的通积分可表为

$$\Phi(zx^{-1},z-yx^{-1})=0.$$

为确定函数 Φ,由解的条件联立首次积分消去变量. 先消去 y,有 $z-c_2=\frac{y}{x}=\frac{2z-x}{x}=\frac{2z}{x}-1$. 再消去 x 有

$$z=c_2+\frac{2z}{x}-1=c_2+2c_1-1 \quad 及 \quad z=c_1x=\frac{c_1}{z},z^2=c_1.$$

即有关系式$(c_2+2c_1-1)^2=c_1$,代回首次积分,最后得

$$(zx-y+2z-x)^2=zx.$$

(2) 特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{\mathrm{d}z}{z^2}$. 有首次积分$\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{\mathrm{d}y}{y^2}$,$\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=c_1$ 及$\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{\mathrm{d}z}{z^2}$,$\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=c_2$. 利用直线条件 $x=5y=2z$ 有 $y=\frac{x}{5}$,$z=\frac{x}{2}$,将其代入首次积分得 $c_1=\frac{4}{x}$,$c_2=\frac{1}{x}$. 从而有关系式 $c_1=4c_2$. 于是满足条件的解为$\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=4\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)$,即$\frac{1}{y}+\frac{3}{x}=\frac{4}{z}$.

(3) 特征方程为$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{-z^2}$. 有首次积分$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}$, $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=c_1$及$\frac{dx}{x^2}=\frac{dz}{-z^2}$, $\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=c_2$. 利用条件 $xy=x+y, z=1$ 得$\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=1$, $c_1=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=1-\frac{2}{x}$及 $1+\frac{1}{x}=c_2$. 于是有关系式 $c_1=1-\frac{2}{x}=1-2(c_2-1)$, $c_1+2c_2=3$. 方程满足条件的解为$\frac{1}{y}-\frac{1}{x}+\frac{2}{z}+\frac{2}{x}=3$, 即$\frac{1}{y}+\frac{2}{z}+\frac{1}{x}=3$.

§7.4.3 习题 7 及其解答

1. 求下列方程组的通积分及满足指定条件的解:

(1) $\frac{dx}{dt}=x+y, \frac{dy}{dt}=x+y+t$.

解 两式相减解得一首次积分:

$$\frac{d(x-y)}{dt}=-t, x-y+\frac{1}{2}t^2=c_1.$$

相加得

$$\frac{d(x+y)}{dt}=2(x+y)+t.$$

此为线性非齐次方程. 齐次解为 $x+y=c_2e^{2t}$, 非齐次特解可设为 $x+y=at+b$, 代入得 $a=2at+2b+t, a=-\frac{1}{2}, b=\frac{a}{2}=-\frac{1}{4}$, 即有特解 $x+y=-\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}$. 方程的第 2 个首次积分为

$$x+y=c_2e^{2t}-\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}, \left(x+y+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\right)e^{-2t}=c_2.$$

因

$$J=\frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ e^{-2t} & e^{-2t} \end{vmatrix}=2e^{-2t}\neq 0,$$

两个首次积分彼此独立. 方程组的通积分为

$$\begin{cases} x-y+\frac{1}{2}t^2=c_1, \\ \left(x+y+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\right)e^{-2t}=c_2, \end{cases}$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

(2) $\frac{dx}{dt}=y+1,\frac{dy}{dt}=x+1$, 当 $t=0$ 时, $x=-2,y=0$.

解 1 两式相减、相加可分别变为线性方程解得

$$\frac{d(x-y)}{dt}=-(x-y), x-y=c_1e^{-t};$$

$$\frac{d(x+y)}{dt}=(x+y)+2, x+y=c_2e^{t}-2.$$

两个首次积分为 $(x-y)e^{t}=c_1$; $(x+y+2)e^{-t}=c_2$. 因 $J=2\neq 0$, 两个首次积分是方程组的通积分, 其中 c_1,c_2 为任意常数. 由初值条件得 $c_1=-2,c_2=0$. 解为 $x=-e^{-t}-1,y=e^{-t}-1$.

解 2 方程组改写为 $dt=\frac{dx}{y+1}=\frac{dy}{x+1}$. 可积分得

$$(x+1)^2-(y+1)^2=(x+y+2)(x-y)=c_1,$$

及 $\frac{d(x-y)}{-(x-y)}=dt, x-y=c_2e^{-t}$. 通积分为

$$\begin{cases} (x+y+2)(x-y)=c_1, \\ x-y=c_2e^{-t}. \end{cases}$$

由初值条件, $c_1=0,c_2=-2$. 解为 $(x+y+2)(x-y)=0, x-y=-2e^{-t}$. 前式化为 $x+y=-2$, 得解 $x=-e^{-t}-1,y=e^{-t}-1$.

(3) $\frac{dx}{dt}=x-2y,\frac{dy}{dt}=x-y$, 当 $t=0$ 时, $x=y=1$.

解 1 方程组改写为 $dt=\frac{dx}{x-2y}=\frac{dy}{x-y}$. 即有 $\frac{d(x-y)}{-y}=\frac{dy}{x-y}$, 得首次积分 $(x-y)^2+y^2=c_1$; 又由

$$dt = \frac{y\mathrm{d}x}{xy-2y^2} = \frac{x\mathrm{d}y}{x^2-xy} = \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2xy-x^2-2y^2}$$

$$= \frac{-\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)}{1+\left(\frac{x}{y}-1\right)^2}$$

可得另一首次积分 $\arctan\left(\frac{x}{y}-1\right)+t=c_2$. 因

$$J = \frac{\partial(\psi_1,\psi_2)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2(x-y) & -2x+4y \\ \frac{y}{y^2+(x-y)^2} & \frac{-x}{y^2+(x-y)^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-2x^2+4xy-4y^2}{y^2+(x-y)^2} = -2 \neq 0,$$

知两个首次积分彼此独立,是方程组的通积分. 由初值条件得 $c_1=1, c_2=0$. 特解为 $(x-y)^2+y^2=1$, $\arctan\left(\frac{x}{y}-1\right)+t=0$.

解 2 方程组改写为 $\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{x-2y}=\frac{\mathrm{d}y}{x-y}$. 即有 $\frac{\mathrm{d}(x-y)}{-y}=\frac{\mathrm{d}y}{x-y}$, 得首次积分 $(x-y)^2+y^2=c_1$, 于是 $x=y\pm\sqrt{c_1-y^2}$. 方程组有 $\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}y}{x-y}=\frac{\mathrm{d}y}{\pm\sqrt{c_1-y^2}}$, 积分得另一首次积分 $t\mp\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{c_1}}\right)=c_2$, 即 $t\mp\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{(x-y)^2+y^2}}\right)=c_2$. 显然它们彼此独立(一个不含 t, 一个含 t),是方程组的通积分. 由初值条件得 $c_1=1, c_2=\mp\frac{\pi}{2}$. 特解为 $(x-y)^2+y^2=1$, $t\mp\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{(x-y)^2+y^2}}\right)=\mp\frac{\pi}{2}$.

解 3 方程组改写为 $\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{x-2y}=\frac{\mathrm{d}y}{x-y}$. 即有 $\frac{\mathrm{d}(x-y)}{-y}=\frac{\mathrm{d}y}{x-y}$, 得首次积分 $(x-y)^2+y^2=c_1$; 又由

$$\begin{aligned} dt &= \frac{-y d(x-y)}{y^2} = \frac{(x-y)dy}{(x-y)^2} \\ &= \frac{(x-y)dy - yd(x-y)}{(x-y)^2+y^2} = -d\left(\arctan\frac{x-y}{y}\right) \end{aligned}$$

可得另一独立首次积分 $t+\arctan\frac{x-y}{y}=c_2$. 由初值条件得 $c_1=1, c_2=0$. 特解为

$$(x-y)^2+y^2=1, t+\arctan\frac{x-y}{y}=0.$$

解 4 将方程组化为二阶方程:

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}=x-2y-(x-y)=-y, \frac{d^2y}{dt^2}+y=0.$$

方程有通解 $y=c_1\cos t+c_2\sin t$, 再由 $\frac{dy}{dt}=x-y, x=y+\frac{dy}{dt}$ 得原方程组的通解 $x=(c_1+c_2)\cos t+(c_2-c_1)\sin t, y=c_1\cos t+c_2\sin t$. 由初值条件有 $c_1=1, c_2=0$, 特解为 $x=\cos t-\sin t, y=\cos t$.

(4) $\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}$.

提示 由 $\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}=\frac{d(x+y+z)}{0}$ 得首次积分 $x+y+z=c_1$. 又由 $\frac{2xdx}{2x(z-y)}=\frac{2ydy}{2y(x-z)}=\frac{2zdz}{2z(y-x)}=\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{0}$ 得首次积分 $x^2+y^2+z^2=c_2$. 因矩阵 $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2x & 2y & 2z\end{bmatrix}$ 的秩为 2, 这两个首次积分彼此独立. 对称方程组的通积分为

$$\begin{cases} x+y+z=c_1, \\ x^2+y^2+z^2=c_2, \end{cases}$$

2. 求下列方程的通解及满足给定条件的解:

(1) $yu_x-xu_y+(x^2-y^2)u_z=0$.

解 1 方程的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{-x}=\frac{\mathrm{d}z}{x^2-y^2}.$$

由$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{-x}$得 $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0, x^2+y^2=c_1$. 上式又可化为

$$\frac{y\mathrm{d}x}{y^2}=\frac{x\mathrm{d}y}{-x^2}=\frac{\mathrm{d}z}{x^2-y^2}=\frac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\mathrm{d}z}{0},$$

即 $y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=\mathrm{d}(xy+z)=0, xy+z=c_2$. 因矩阵

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}2x & 2y & 0\\ y & x & 1\end{bmatrix}$$

的秩为 2,这两个首次积分彼此独立. 方程组的通解为

$$u=\Phi(x^2+y^2, xy+z),$$

其中 Φ 为变元的任意连续可微函数.

解 2 由解 1 得首次积分 $x^2+y^2=c_1$后,可用式

$$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{-x}=\frac{\mathrm{d}z}{x^2-y^2}=\frac{\mathrm{d}z}{(x-y)(x+y)}=\frac{\mathrm{d}(x+y)}{y-x}$$

求得另一首次积分 $\mathrm{d}z+(x+y)\mathrm{d}(x+y)=0, 2z+(x+y)^2=c_3$. 因

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}2x & 2y & 0\\ 2(x+y) & 2(x+y) & 2\end{bmatrix}$$

的秩为 2,这两个首次积分彼此独立. 方程组的通解为

$$u=\Psi(x^2+y^2, 2z+(x+y)^2),$$

其中 Ψ 为变元的任意连续可微函数.

(2) $(z^2-2yz-y^2)u_x+(xy+xz)u_y+(xy-xz)u_z=0$.

提示 特征方程$\frac{\mathrm{d}x}{z^2-2yz-y^2}=\frac{\mathrm{d}y}{xy+xz}=\frac{\mathrm{d}z}{xy-xz}$. 由后式得$\frac{\mathrm{d}y}{y+z}=\frac{\mathrm{d}z}{y-z}$,即 $y\mathrm{d}y-z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}z=0, y^2-2yz-z^2=c_1$. 又由

$$\frac{x\mathrm{d}x}{x(z^2-2yz-y^2)}=\frac{y\mathrm{d}y}{xy(y+z)}=\frac{z\mathrm{d}z}{xz(y-z)}=\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{0}$$

有积分 $x^2+y^2+z^2=c_2$. 因 $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}0 & 2y-2z & -2y-2z\\ 2x & 2y & 2z\end{bmatrix}$的秩为 2.

通积分为

$$u=\Phi(y^2-2yz-z^2,x^2+y^2+z^2).$$

(3) $x^2z_x-xyz_y+y^2=0$.

提示 1 特征方程$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{-xy}=\frac{dz}{-y^2}$. 由前式得$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}$, $xy=c_1$. 利用 $d\left(\frac{y^2}{x}\right)=\frac{-y^2dx+2xydy}{x^2}$,有

$$\frac{y^2dx}{x^2y^2}=\frac{-2xydy}{2x^2y^2}=\frac{3dz}{-3y^2}=\frac{y^2dx-2xydy}{x^2}\cdot\frac{1}{3y^2}=\frac{3dz-d\left(\frac{y^2}{x}\right)}{0}.$$

积分得 $3z-\frac{y^2}{x}=c_2$. 因 $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}y & x & 0\\ \frac{y^2}{x^2} & -\frac{2y}{x} & 3\end{bmatrix}$的秩为 2. 通积分为

$\Phi\left(xy,3z-\frac{y^2}{x}\right)=0$.

提示 2 特征方程$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{-xy}=\frac{dz}{-y^2}$. 由前式得$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}$, $xy=c_1$. 结果代入后式$\frac{dy}{-c_1}=\frac{dz}{-y^2}$, $3c_1z-y^3=c_2$, 即有 $3xyz-y^3=c_2$. 因 $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}y & x & 0\\ 3yz & 3xz-3y^2 & 3xy\end{bmatrix}$的秩为 2. 通积分为 $\Phi(xy,3xyz-y^3)=0$.

(4) $(y^3x-2x^4)z_x+(2y^4-x^3y)z_y=9z(x^3-y^3)$.

提示 特征方程$\frac{dx}{y^3x-2x^4}=\frac{dy}{2y^4-x^3y}=\frac{dz}{9z(x^3-y^3)}$. 由前式得齐次方程$\frac{dy}{dx}=\frac{2y^4-x^3y}{y^3x-2x^4}$. 可令 $y=xu$,有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2u^4-u}{u^3-2}=u+x\frac{du}{dx}, x\frac{du}{dx}=\frac{u^4+u}{u^3-2}, \frac{dx}{x}=\left(\frac{3u^2}{u^3+1}-\frac{2}{u}\right)du.$$

积分得 $\ln|u^3+1|-2\ln|u|=\ln|x|+c_1$, $\frac{u^3+1}{u^2x}=\frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2}=c_1$. 又利

用

$$d(x^3y^3z)=3x^2y^3z\mathrm{d}x+3x^3y^2z\mathrm{d}y+x^3y^3\mathrm{d}z,$$

由

$$\frac{3x^2y^3z\mathrm{d}x}{3x^2y^3z(y^3x-2x^4)}=\frac{3x^3y^2z\mathrm{d}y}{3x^3y^2z(2y^4-x^3y)}$$

$$=\frac{x^3y^3\mathrm{d}z}{9x^3y^3z(x^3-y^3)}=\frac{\mathrm{d}(x^3y^3z)}{0}$$

得积分 $x^3y^3z=c_2$. 因 $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}-\frac{2y}{x^3}+\frac{1}{y^2} & \frac{1}{x^2}-\frac{2x}{y^3} & 0\\ 3x^2y^3z & 3x^3y^2z & x^3y^3\end{bmatrix}$的秩为 2. 通积分为 $\Phi\left(\frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2},x^3y^3z\right)=0$.

(5) $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=nu$($n$ 为自然数).

提示 特征方程$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{\mathrm{d}u}{nu}$. 设 $x\neq0$, 由$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}$, 积分得 $\frac{y}{x}=c_1$; 由$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}z}{z}$, 积分得$\frac{z}{x}=c_2$; 由$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}u}{nu}$, 积分得$\frac{u}{x^n}=c_3$. 因 $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}-yx^{-2} & x^{-1} & 0 & 0\\ -zx^{-2} & 0 & x^{-1} & 0\\ -nux^{-n-1} & 0 & 0 & x^{-n}\end{bmatrix}$的秩为 3. 通积分为 $\Phi\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x},\frac{u}{x^n}\right)=0$.

注 同样可设 $y\neq0$, 得 $\Phi\left(\frac{x}{y},\frac{z}{y},\frac{u}{y^n}\right)=0$. 或设 $z\neq0$, 得 $\Phi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z},\frac{u}{z^n}\right)=0$.

(6) $(u+y+z)\frac{\partial u}{\partial x}+(u+x+z)\frac{\partial u}{\partial y}+(u+x+y)\frac{\partial u}{\partial z}=x+y+z$.

提示 特征方程$\frac{\mathrm{d}x}{u+y+z}=\frac{\mathrm{d}y}{u+x+z}=\frac{\mathrm{d}z}{u+x+y}=\frac{\mathrm{d}u}{x+y+z}$. 比例式可组合为

$$\frac{\mathrm{d}(x+y+z+u)}{3(x+y+z+u)}=\frac{\mathrm{d}(x-u)}{u-x}=\frac{\mathrm{d}(y-u)}{u-y}=\frac{\mathrm{d}(z-u)}{u-z}.$$

令 $s=x+y+z+u$,对上式分别积分得 $(u-x)^3 s=c_1,(u-y)^3 s=c_2,(u-z)^3 s=c_3$. 由

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} (u-x)^3-3(u-x)^2 s & (u-x)^3 & (u-x)^3 & (u-x)^3+3(u-x)^2 s \\ (u-y)^3 & (u-y)^3-3(u-y)^2 s & (u-y)^3 & (u-y)^3+3(u-y)^2 s \\ (u-z)^3 & (u-z)^3 & (u-z)^3-3(u-z)^2 s & (u-z)^3+3(u-z)^2 s \end{bmatrix}$$

的秩为 3. 通积分为 $\Phi((u-x)^3 s,(u-y)^3 s,(u-z)^3 s)=0$.

注 首次积分若改为 $(u-x)s^{\frac{1}{3}}=c_1,(u-y)s^{\frac{1}{3}}=c_2,(u-z)s^{\frac{1}{3}}=c_3$,则通积分变为

$$\Phi((u-x)s^{\frac{1}{3}},(u-y)s^{\frac{1}{3}},(u-z)s^{\frac{1}{3}})=0.$$

(7) $\frac{y-z}{yz}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{z-x}{zx}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x-y}{xy}$.

提 示 特征方程 $\frac{yz\mathrm{d}x}{y-z}=\frac{zx\mathrm{d}y}{z-x}=\frac{xy\mathrm{d}z}{x-y}$. 有 $\frac{yz\mathrm{d}x}{y-z}=\frac{yz\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z}{0}$, 即 $yz\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z=0,\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{\mathrm{d}y}{y}+\frac{\mathrm{d}z}{z}=0,xyz=c_1$. 又有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\frac{1}{z}-\frac{1}{y}}=\frac{\mathrm{d}y}{\frac{1}{x}-\frac{1}{z}}=\frac{\mathrm{d}z}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}=\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z}{0},$$

$$\mathrm{d}(x+y+z)=0,x+y+z=c_2.$$

因 $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的秩为 2. 通积分为 $\Phi(xyz,x+y+z)=0$.

(8) $(y+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z+x)\frac{\partial z}{\partial y}=x+y,x=1,z=y$.

提示 特征方程$\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{z+x}=\frac{dz}{x+y}$. 有

$$\frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)}=\frac{d(x-y)}{y-x}=\frac{d(y-z)}{z-y}=\frac{d(z-x)}{x-z}.$$

得首次积分$(x-y)^2(x+y+z)=c_1,\frac{x-y}{z-x}=c_2$. 因

$$D=\begin{bmatrix}(x-y)^2+2(x-y)(x+y+z) & (x-y)^2-2(x-y)(x+y+z) & (x-y)^2\\ \frac{z-y}{(z-x)^2} & \frac{1}{x-z} & \frac{y-x}{(x-z)^2}\end{bmatrix}$$

的秩为2. 通积分为$\Phi\left((x-y)^2(x+y+z),\frac{x-y}{z-x}\right)=0$. 当满足条件$x=1,z=y$时有$c_1=(1-y)^2(1+2y),c_2=\frac{1-y}{y-1}=-1$,即$\frac{x-y}{z-x}=c_2=-1$,于是推得$z=y$为满足条件的特解.

(9) $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=z,y=1,z=3x.$

提示 特征方程$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{z}$. 有首次积分$xy=c_1,zy=c_2$. 因$D=\begin{bmatrix}y & x & 0\\0 & z & y\end{bmatrix}$的秩为2. 通积分为$\Phi(xy,zy)=0$或$z=\frac{1}{y}\varphi(xy)$. 当满足条件$y=1,z=3x$时,有$z=\varphi(x)=3x$,即$\varphi(s)=3s$. 于是$z=\frac{1}{y}\varphi(xy)=\frac{1}{y}\cdot 3xy=3x$为满足条件的特解.

(10) $yz\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0,x=0,z=y^3.$

提示 特征方程$\frac{dx}{yz}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{0}$. 有首次积分$dz=0,z=c_1$,代入前式有$\frac{dx}{yc_1}=\frac{dy}{1}$. 即$2x-c_1y^2=c_2$. 又得首次积分$2x-zy^2=c_2$. 因$D=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\2 & -2zy & -y^2\end{bmatrix}$的秩为2. 通积分为$\Phi(z,2x-zy^2)=0$. 当满

足条件 $x=0, z=y^3$ 时，有 $c_1=y^3, c_2=-y^5$，即 $c_2=-c_1^{\frac{5}{3}}$. 由 $\Phi(c_1, c_2)=0$ 知 $2x-zy^2=-z^{\frac{5}{3}}$，即 $z^5=(zy^2-2x)^3$，于是 $z^5=(zy^2-2x)^3$ 为满足条件的特解.

3. 求与下列曲面族正交的曲面(a 为任意常数)：

(1) $z=axy$.

解 曲面族方程为 $F(x,y,z)\equiv\frac{z}{xy}-a=0$，其法向向量为

$$\boldsymbol{N}=\{F_x,F_y,F_z\}=\left\{-\frac{z}{x^2y},-\frac{z}{xy^2},\frac{1}{xy}\right\}.$$

设所求的曲面方程为 $f(x,y,z)=0$，其法向向量为 $\boldsymbol{n}=\{f_x,f_y,f_z\}$. 由正交条件应有 $\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{n}=0$，即

$$-\frac{z}{x^2y}f_x-\frac{z}{xy^2}f_y+\frac{1}{xy}f_z=0.$$

此为一阶线性偏微分方程. 其特征方程为

$$\frac{x^2y\mathrm{d}x}{-z}=\frac{xy^2\mathrm{d}y}{-z}=\frac{xy\mathrm{d}z}{1},$$

即 $-x\mathrm{d}x=-y\mathrm{d}y=z\mathrm{d}z$，有两个首次积分 $x^2-y^2=c_1, x^2+z^2=c_2$. 由 $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}2x & -2y & 0\\ 2x & 0 & 2z\end{bmatrix}$ 的秩为 2，两个首次积分相互独立. 所求曲面方程 $f(x,y,z)=0$ 为

$$\Phi(x^2-y^2,x^2+z^2)=0,$$

其中 $\Phi(u,v)$ 是变量 u,v 的任意连续可微函数.

(2) $xyz=a$.

提示 曲面族方程 $F(x,y,z)\equiv xyz-a=0$，其法向向量 $\boldsymbol{N}=\{yz,xz,xy\}$. 所求的曲面方程 $f(x,y,z)=0$ 的法向向量 $\boldsymbol{n}=\{f_x,f_y,f_z\}$ 应满足 $\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{n}=0$：$yzf_x+xzf_y+xyf_z=0$. 其特征方程 $\frac{\mathrm{d}x}{yz}=\frac{\mathrm{d}y}{xz}=\frac{\mathrm{d}z}{xy}$ 有两个首次积分 $x^2-y^2=c_1$，$x^2-z^2=c_2$. 由 $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}2x & -2y & 0\\ 2x & 0 & -2z\end{bmatrix}$ 的秩为 2，所求曲面方程 $f(x,y,z)=0$ 为

$\Phi(x^2-y^2,x^2-z^2)=0$.

(3) $z^2=axy$.

提示 曲面族方程 $F(x,y,z)\equiv\frac{z^2}{xy}-a=0$，其法向向量 $\boldsymbol{N}=\left\{-\frac{z^2}{x^2y},-\frac{z^2}{xy^2},\frac{2z}{xy}\right\}$. 所求的曲面方程 $f(x,y,z)=0$ 的法向向量 $\boldsymbol{n}=\{f_x,f_y,f_z\}$ 应满足 $\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{n}=0$：$-\frac{z^2}{x^2y}f_x-\frac{z^2}{xy^2}f_y+\frac{2z}{xy}f_z=0$. 其特征方程 $\frac{x^2y\mathrm{d}x}{-z^2}=\frac{xy^2\mathrm{d}y}{-z^2}=\frac{xy\mathrm{d}z}{2z}$ 即 $2x\mathrm{d}x=2y\mathrm{d}y=-z\mathrm{d}z$，有两个首次积分 $x^2-y^2=c_1$，$2x^2+z^2=c_2$. 由 $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}2x & -2y & 0\\ 4x & 0 & 2z\end{bmatrix}$ 的秩为 2，所求曲面方程 $f(x,y,z)=0$ 为 $\Phi(x^2-y^2,2x^2+z^2)=0$.

4. 试证方程(第二章(2.42)式)

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

有仅与 x 有关的积分因子的充要条件是

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

仅是 x 的函数.

证 必要性. 若 $\mu=\mu(x)$ 是方程的积分因子，即有 $\frac{\partial(\mu(x)M)}{\partial y}\equiv\frac{\partial(\mu(x)N)}{\partial x}$. 于是

$$\mu(x)\frac{\partial M}{\partial y}\equiv\frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mathrm{d}x}N+\mu(x)\frac{\partial N}{\partial x},$$

$$\frac{1}{\mu(x)}\frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mathrm{d}x}\equiv\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

由于上式左端仅是 x 的函数，右端也应仅是 x 的函数.

充分性. 设 $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\varphi(x)$. 当 μ 是方程的积分因子时有

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}, N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu,$$

上式可化为

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=N\varphi(x)\mu.$$

此为 μ 的一阶线性偏微分方程. 其特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{N}=\frac{\mathrm{d}y}{-M}=\frac{\mathrm{d}\mu}{N\varphi(x)\mu}.$$

对$\frac{\mathrm{d}x}{N}=\frac{\mathrm{d}\mu}{N\varphi(x)\mu}$即$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}=\varphi(x)\mathrm{d}x$积分得 $\ln|\mu|=\int\varphi(x)\mathrm{d}x+\tilde{c}$,即 $\mu=c\mathrm{e}^{\int\varphi(x)\mathrm{d}x}$,其中 c 为任意常数. 可取 $\mu=\mathrm{e}^{\int\varphi(x)\mathrm{d}x}$,它是方程的积分因子,且仅是 x 的函数.

5. 证明以坐标原点为顶点的锥面方程可写为

$$\Phi\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0 \quad 或 \quad z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

其中 Φ,φ 为其变元的连续可微函数.

证 设以坐标原点为顶点的锥面方程为 $f(x,y,z)=0$. 因锥面上任意一点 $P(x,y,z)$上的法向量$\{f_x,f_y,f_z\}$垂直于向径$\overrightarrow{OP}$,即有

$$xf_x+yf_y+zf_z=0.$$

这是一阶线性偏微分方程. 其特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

有两个首次积分$\frac{y}{x}=c_1,\frac{z}{x}=c_2$. 因 $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}-\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} & 0\\ -\frac{z}{x^2} & 0 & \frac{1}{x}\end{bmatrix}$的秩为 2,所求曲面方程 $f(x,y,z)=0$ 为 $\Phi\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 或 $z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$,其中 Φ,φ 为其变元的连续可微函数.

第八章　边值问题

§8.1　内容提要

§8.1.1　边值问题的存在唯一性

对 n 阶微分方程

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}),$$

如果能在不同的两点 a 和 b 处，唯一地刻画 n 个附加条件，并且在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上求解，则称此为（两点）边值问题.

关于二阶非齐次线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x), \tag{①}$$

其中 $y=y(x)$ 为未知函数，$p(x)$，$q(x)$，$f(x)$ 均为已知连续函数. 对应的齐次线性微分方程为

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0. \tag{②}$$

微分方程①的边值条件有

第一类边值条件：$y(a)=\alpha,y(b)=\beta$；　③

第二类边值条件：$y'(a)=\alpha,y'(b)=\beta$；

第三类边值条件：$k_1y(a)+k_2y'(a)=\gamma_1,k_3y(b)+k_4y'(b)=\gamma_2$；

周期边值条件：$y(a)=y(b),y'(a)=y'(b)$.

可统一为广义边值条件：

$$U_i[y]\equiv\alpha_{i0}y(a)+\beta_{i0}y(b)+\alpha_{i1}y'(a)+\beta_{i1}y'(b)=\gamma_i\ (i=1,2). \tag{④}$$

存在唯一性定理 如果已知二阶非齐次线性微分方程①的一个解 $y_0(x)$ 及对应的齐次线性微分方程②的基本解组 $y_1(x)$，$y_2(x)$，则边值问题①、④可解的充要条件是：矩阵

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] & U_1[y_0]-\gamma_1 \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] & U_2[y_0]-\gamma_2 \end{bmatrix}$$

和矩阵

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] \end{bmatrix} \qquad ⑤$$

有相同的秩. 而边值问题②、④可解的充要条件是矩阵

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] & \gamma_1 \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] & \gamma_2 \end{bmatrix}$$

和矩阵⑤有相同的秩. 当且仅当均满秩（秩为 2）时边值问题存在唯一非平凡解.

§8.1.2 待定常数法

如果边值问题中所考虑的微分方程的通解可以求出，则可利用边值条件确定其中的任意常数，得到满足边值问题的（特）解. 这种方法称为待定常数法.

定理 如果齐次方程②存在基本解组 $y_1(x)$，$y_2(x)$，且 $y_2(b)\neq 0$，则对每一个在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续的函数 $f(x)$，非齐次边值问题①、③存在唯一解，且这个解可用格林函数唯一确定：

$$y(x)=\int_a^b G(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t \quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

格林函数 $G(x,t)$ 定义为

$$G(x,t)=\begin{cases} \dfrac{y_2(t)}{y_2(b)\ W(t)}[y_2(x)y_1(b)-y_1(x)y_2(b)], & a\leqslant t\leqslant x, \\ \dfrac{y_2(x)}{y_2(b)\ W(t)}[y_2(t)y_1(b)-y_1(t)y_2(b)], & x\leqslant t\leqslant b, \end{cases}$$

其中 $W(x)$ 为 $y_1(x), y_2(x)$ 的朗斯基行列式

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

格林函数性质：

(1) $G(x,t)$ 在正方形 $a\leqslant t,x\leqslant b$ 上连续；

(2) $\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}$ 在 $a\leqslant t,x\leqslant b$ 上连续 $(x\neq t)$，且 $x=t$ 处有跃度：

$$\frac{\partial G(t+0,t)}{\partial x}-\frac{\partial G(t-0,t)}{\partial x}=1 \quad \left(\text{或}\frac{1}{p_0(t)}\right)$$

（后者是对方程 $p_0(t)y''+p(t)y'+q(t)y=0$ 而言）；

(3) $G(x,t)$ 对每一个固定的 t，作为 x 的函数 $(x\neq t)$ 满足微分方程；而对每一个固定的 x，作为 t 的函数满足边值条件.

§8.1.3 特征值和特征函数

(1) 带参数 λ 的二阶齐次线性微分方程边值问题

$$y''+\lambda y=0, y(0)=0, y(\pi)=0 \qquad ⑥$$

当且仅当 $\lambda=n^2(n=\pm1,\pm2,\cdots)$ 时才有非零解 $y=c\sin nx$. 使边值问题⑥有非零解的 λ 值称为边值问题⑥的特征值（本征值），与特征值 λ 对应的解称为特征函数（本征函数）.

二阶非齐次线性微分方程边值问题

$$y''+\lambda y=f(x), y(0)=0, y(\pi)=0$$

可用常数变易法通过齐次边值问题⑥求非齐次方程的通解，加上边值条件进行详细讨论.

(2) 一般形式的带参数 λ 的二阶齐次线性微分方程

$$L[y]\equiv p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=\lambda y,$$

其中 $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ 是在区间 $[a,b]$ 上给定的实连续函数，$p_0(x)\neq 0$. 如果对任意两个在区间 $[a,b]$ 上有连续二阶导数并满足一定边值条件的 $u(x)$ 和 $v(x)$ 成立关系式（$\bar{u}$ 表示 u 的共轭复数）

$$\int_a^b \bar{u}L[v]\mathrm{d}x=\int_a^b v\,\overline{L[u]}\mathrm{d}x,$$

则相应的特征值问题称为自伴的.

定理 自伴问题的特征值必是实数,且对应于不同特征值的特征函数在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上是两两正交的.

施图姆 - 刘维尔(Sturm - Liouville)型方程

$$L[y]\equiv -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)y=\lambda y$$

和边值条件

$$\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=0,\beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=0$$

或周期边值条件

$$y(a)-y(b)=0,y'(a)-y'(b)=0$$

的特征值问题是自伴的.

§8.2 学习辅导

§8.2.1 解题指导

(1) 常微分方程边值问题在物理、工程技术领域有重要的应用.要熟悉二阶非齐次线性微分方程边值条件的表示、边值问题存在唯一性定理、待定常数法、非齐次具体边值条件的格林函数,以及特征值和特征函数、自伴问题及其特征值性质、施图姆 - 刘维尔型方程.

(2) 求解二阶线性微分方程边值问题,首先求出对应齐次线性微分方程的通解,再用待定常数法或相应边值条件的格林函数求非齐次线性方程的解.

(3) 对带参数 λ 的二阶齐次线性微分方程边值问题 $y''+\lambda y=0,y(0)=0,y(\pi)=0$,仅有特殊的特征值和特征函数为其解.对相应的非齐次方程,可用常数变易法求其通解,加上边值条件进行讨论.

(4) 一般形式的带参数 λ 的二阶齐次线性微分方程,仅自伴

方程才有实特征值,且对应于不同特征值的特征函数两两正交.

(5) 施图姆-刘维尔型方程 $L[y]\equiv -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)y=\lambda y$,对边值条件 $\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=0,\beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=0$ 或周期边值条件 $y(a)-y(b)=0,y'(a)-y'(b)=0$ 是自伴的.

§8.2.2 例题选讲

例 1 试讨论下列微分方程边值问题的可解性并求解

(1) $y''=0,y(0)+y'(0)=y(1),y'(0)=y'(1)$;

(2) $y''=x,y(0)-y(1)=1,y'(0)+y'(1)=0$.

解 (1) 方程有基本解组 $y_1(x)=1,y_2(x)=x$. 边值条件对应

$U_1[y]\equiv y(0)-y(1)+y'(0)=0,U_2[y]\equiv y'(0)-y'(1)=0$,
得

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其秩为 0. 即齐次边值问题是可解的,它有解 $y=c_1+c_2x$.

(2) 非齐次方程有特解 $\tilde{y}(x)=\frac{1}{6}x^3$. 对应的齐次方程有基本解组 $y_1(x)=1,y_2(x)=x$. 边值条件对应

$$U_1[y]\equiv y(0)-y(1),U_2[y]\equiv y'(0)+y'(1),$$

于是

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] & U_1[\tilde{y}]-\gamma_1 \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] & U_2[\tilde{y}]-\gamma_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{7}{6} \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

其秩为 2 与矩阵

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

的秩 1 不同. 边值问题不可解.

事实上,非齐次方程有通解

$$y(x)=c_1+c_2x+\frac{1}{6}x^3.$$

由边值条件应有

$$-c_2-\frac{1}{6}=1,2c_2+\frac{1}{2}=0.$$

得 $c_2=-\frac{7}{6},c_2=-\frac{1}{4}$,相互矛盾. 故无法求出满足边值条件的常数 c_1,c_2.

例 2 试用待定常数法求解下列微分方程边值问题

(1) $y''+y=x,y(0)+y'(0)=0,y(\pi)-y'(\pi)=1$;

(2) $y''+2y'-3y=9x,y(0)=1,y'(1)=2$.

解 (1) 非齐次方程有特解 $y=x$,而齐次方程有通解 $y=c_1\sin x+c_2\cos x$,故非齐次方程的通解为

$$y=c_1\sin x+c_2\cos x+x.$$

又

$$y'=c_1\cos x-c_2\sin x+1.$$

代入边值条件得

$$c_2+c_1+1=0,\ -c_2+\pi-(-c_1+1)=1.$$

求得 $c_1=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2},c_2=\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}$. 微分方程边值问题的解为

$$y=\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\sin x+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\right)\cos x+x.$$

(2) 对应齐次方程的特征方程 $\lambda^2+2\lambda-3=0,(\lambda+3)(\lambda-1)=0$,特征值为 $\lambda=-3,\lambda=1$. 即有通解 $y=c_1e^{-3x}+c_2e^x$. 非齐次方程可有如下形式特解 $y=ax+b$,代入方程有 $a=-3,b=-2$. 求得特解 $y=-3x-2$. 故非齐次方程的通解为

$$y=c_1e^{-3x}+c_2e^x-3x-2.$$

代入边值条件得

$$c_1+c_2-2=1,\ -3c_1\mathrm{e}^{-3}+c_2\mathrm{e}-3=2,$$

求得

$$c_1=\frac{3\mathrm{e}-5}{\mathrm{e}+3\mathrm{e}^{-3}},c_2=\frac{5+9\mathrm{e}^{-3}}{\mathrm{e}+3\mathrm{e}^{-3}}.$$

微分方程边值问题的解为

$$y=\frac{(3\mathrm{e}-5)\mathrm{e}^{-3x}+(5+9\mathrm{e}^{-3})\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}+3\mathrm{e}^{-3}}-3x-2.$$

例 3 试求微分方程边值问题 $y''+y=f(x),y'(0)=0,y(\pi)=0$的格林函数.

解 齐次方程 $y''+y=0$ 有通解 $y_1(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$,非齐次方程通解为

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\int_0^x(\sin x\cos t-\cos x\sin t)f(t)\mathrm{d}t.$$

再利用边值条件,应有

$$y'(0)=c_2=0,$$

$$y(\pi)=c_1\cos\pi+\int_0^\pi(\sin\pi\cos t-\cos\pi\sin t)f(t)\mathrm{d}t=0,$$

$$c_1=\int_0^\pi\sin t\cdot f(t)\mathrm{d}t.$$

于是边值问题的解为

$$\begin{aligned}y(x)&=\cos x\cdot\int_0^\pi\sin t\cdot f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x(\sin x\cos t-\cos x\sin t)f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_x^\pi\cos x\ \sin t\cdot f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x\sin x\cos t\cdot f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

可定义格林函数

$$G(x,t)=\begin{cases}\sin x\cdot\cos t, & 0\leqslant t\leqslant x,\\ \cos x\cdot\sin t, & x\leqslant t\leqslant\pi.\end{cases}$$

边值问题的解为

$$y(x)=\int_0^\pi G(x,t)f(t)\mathrm{d}t\quad(0\leqslant x\leqslant\pi).$$

例 4 求微分方程边值问题 $y''+\lambda y=0,y'(0)=0,y'(\pi)=0$

的特征值和特征函数.

解 当 $\lambda=0$ 时方程的通解为 $y=c_1+c_2x$. 将边值条件代入，得 $c_2=0$,有非零解 $y=c(c\neq0)$,故 $\lambda=0$ 是其特征值,特征函数为 $y=c(c\neq0)$;当 $\lambda<0$ 时令 $\lambda=-\mu^2$,方程的通解为 $y=c_1\operatorname{sh}\mu x+c_2\operatorname{ch}\mu x$. 将边值条件代入,得 $c_1=0,c_2=0$,没有非零解;当 $\lambda>0$ 时令 $\lambda=n^2$,方程的通解为 $y=c_1\cos nx+c_2\sin nx$. 由边值条件 $y'(0)=0$得 $c_2=0$,有解 $y=c_1\cos nx$. 又由边值条件 $y'(\pi)=0$ 得 $c_1n\sin n\pi=0$. 要有非零解存在,必须 $\sin n\pi=0$,即 $n=\pm1,\pm2,\cdots$. 于是特征值为 $\lambda=n^2(n=\pm1,\pm2,\cdots)$,特征函数为 $y=c_1\cos nx(n=\pm1,\pm2,\cdots)$.

§8.2.3 测试练习

1. 给出下列微分方程边值问题的解:

(1) $y''-y'-2y=0,\ y(0)=2,y(+\infty)=0$;

(2) $y''-y=3x,\ y(0)=0,y(1)=-1$;

(3) $y''+y=2x-\pi,\ y(0)=0,y(\pi)=0$.

2. 求下列微分方程边值问题的格林函数:

(1) $y''-y=f(x),\ y'(0)=0,y'(2)+y(2)=0$;

(2) $y''+k^2y=f(x),\ y(0)=0,y'(1)=0$.

3. 求下列微分方程边值问题的特征值和特征函数:

(1) $y''+\lambda y=0,\ y(0)+y'(0)=0,y(1)=0$;

(2) $y''-\lambda y=0,\ y(0)=0,y(l)=0$.

§8.3 补充提高

§8.3.1 补充习题

1. (1) 试证明二阶线性微分方程非齐次边值问题存在唯一解条件的定理1(见[书附录Ⅰ §1])或[§8.1.1].

（2）证明二阶线性微分方程齐次边值问题存在唯一解的充要条件是行列式

$$\Delta \equiv \det\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] \end{bmatrix} \neq 0.$$

2. 试证明非齐次微分方程边值问题（$p(x), q(x)$ 在 $a \leqslant x \leqslant b$ 上连续）

$$y'' + p(x)y' + q(x) = f(x), y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

存在唯一解的充要条件是齐次边值问题

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0, y(a) = 0, y(b) = 0$$

只有零解.

3. 试判断下列微分方程边值问题的解的存在性及唯一性：

（1）$y'' + 9y = 8\cos x, y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$；

（2）$y'' + 4y' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(1) = 2$；

（3）$y'' = x, y(0) - y(1) = 1, y'(0) - y'(1) = 0.$

4. 试解出第 3 题的微分方程边值问题.

5. （1）对齐次边值问题

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0, U_i[y] = 0 (i = 1, 2),$$

试述其格林函数的具体求法；

（2）试用格林函数表示非齐次边值问题

$$y'' + p(x)y' + q(x) = f(x), U_i[y] = \gamma_i (i = 1, 2)$$

的解.

6. 求下列微分方程边值问题的格林函数：

（1）$y'' = f(x), y(0) = 1, y'(1) = 2$；

（2）$x^2y'' + 2xy' = 0, y(1) = \alpha y'(1)$，当 $x \to 0$ 时 $y(x)$ 有界；

（3）$x^2y'' + 2xy' = f(x), y(1) = 0, y'(3) = 0.$

7. 求下列微分方程边值问题的特征值和特征函数：

（1）$y'' + \lambda y = 0$，当 $|x| \to \infty$ 时，$y(x)$ 有界；

（2）$y'' + \lambda y = 0, y(0) = y(1), y'(0) = -y'(1)$；

(3) $y''+\lambda y=f(x), y(0)=\alpha, y(\pi)=\beta.$

§8.3.2 排疑解惑

(1) **边值问题** 常微分方程(组)的解存在任意常数,定解问题需要确定这些常数的值. 边值问题是常微分方程的两大定解问题之一,其求解比初值问题更困难. 边值问题可分有限区间的两点及多点边值问题、无穷区间(单边或双边无穷)边值问题以及特征值问题(包括特征值反问题). 边值问题在实际中有众多应用而显得重要. 孤立子理论中重要的反散射方法便是从特征值问题中发展起来的.

(2) **特征值与特征函数** 定义线性算子和两点边值算子

$$L[y]\equiv p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y,$$

$$U_i[y]\equiv\sum_{j=1}^{n}M_{ij}y^{(j-1)}(a)+\sum_{j=1}^{n}N_{ij}y^{(j-1)}(b)\ (i=1,2),$$

则含复参数 λ 的边值问题

$$L[y]=\lambda y, U_i[y]=0(i=1,2) \qquad (*)$$

只有当 λ 取特定值时,才有不恒为零的解. 这些特定值称为特征值(本征值,固有值),对应的解称为特征函数(本征函数,固有函数). 特征值问题在声学、光学、电磁理论、核物理及弹性、材料和流体力学中有重要应用,是量子力学的主要支柱.

(3) **格林函数** 边值问题(*)当 λ 不是特征值时,存在唯一的函数 $G(x,\xi,\lambda)$,使得 $L[y]=\lambda y+f(x), U_i[y]=0$ 等价于 $y=\int_a^b G(x,\xi,\lambda)f(\xi)\mathrm{d}\xi$,这样的函数 $G(x,\xi,\lambda)$ 称为(*)的格林函数. 如果 $\lambda=0$ 不是特征值,可令 $G(x,\xi)=G(x,\xi,0)$,这时(*)和 $y=\lambda\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi$ 等价. 利用格林函数可直接求非齐次方程的解. 但不同的齐次方程及边值条件有不同的格林函数.

格林函数 $G(x,t,\lambda)$ 有两种表示,以 t 范围划分

$$G(x,t,\lambda)=\begin{cases}G_1(x,t,\lambda), & a\leqslant t\leqslant x,\\ G_2(x,t,\lambda), & x\leqslant t\leqslant b.\end{cases}$$

或以 x 范围划分

$$G(x,t,\lambda)=\begin{cases}\widetilde{G}_1(x,t,\lambda) & a\leqslant x\leqslant t,\\ \widetilde{G}_2(x,t,\lambda), & t\leqslant x\leqslant b.\end{cases}$$

实际上,$G_1=\widetilde{G}_2, G_2=\widetilde{G}_1$. 而非齐次方程的解为

$$y=\int_a^x G_1(x,t,\lambda)f(t)\,\mathrm{d}t+\int_x^b G_2(x,t,\lambda)f(t)\,\mathrm{d}t$$

或

$$y=\int_a^x \widetilde{G}_2(x,t,\lambda)f(t)\,\mathrm{d}t+\int_x^b \widetilde{G}_1(x,t,\lambda)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

两种表示都有人使用. 在教材《常微分方程(第三版)》中的格林函数以 t 范围划分. 在本书中两种表示都使用.

(4) **施图姆 - 刘维尔**(Sturm - Liouville)**自伴方程**　二阶微分方程的边值问题

$$-[p(x)y']'+[q(x)+\lambda r(x)]y=0,$$
$$\alpha y(a)+\beta y'(a)=0,\gamma y(b)+\delta y'(b)=0$$

被称为施图姆 - 刘维尔(Sturm - Liouville)问题,方程是自伴的. 当在 $[a,b]$ 上 $p(x)>0, r(x)>0, q(x)$ 连续时其特征值组成一个发散到 $+\infty$ 的实序列 $\lambda_0<\lambda_1<\cdots$;其对应 λ_n 的特征函数 $\varphi_n(x)$ 在 $a<x<b$ 中恰好有 n 个零点;且两相邻零点之间刚好有 $\varphi_{n-1}(x)$ 的一个零点;$\{\varphi_n(x)\}$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上组成具权函数 $r(x)$ 的一个正交函数系:$\int_a^b r(x)\varphi_m(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x=0\ (m\neq n)$.

*(5) **薛定谔**(Schrödinger)**方程**　薛定谔方程 $\psi_{xx}-(u-\lambda)y=0$ 是物理学中的著名方程,其中 u 是位势,ψ 为位势作用下运动粒子的波函数,特征值 λ 表示能级. 过去几十年已得到充分研究. 对给定的位势 $u(x)$,存在有限个离散的负特征值 $\lambda_m=$

$-k_m^2(m=1,2,\cdots,n)$和对应的特征函数ψ_m,并存在连续的正特征值$\lambda=k^2,k>0$. 当$u(x)\to 0(|x|\to\infty)$时存在离散的特征值对应的两个线性独立的解$\psi_m=C_\pm(k_m)e^{\pm k_m x}$及连续特征值对应的两个线性独立的解$\psi=a_\pm(k)e^{\pm ikx}$,它们可组合为,当$x\to+\infty$时$\psi\sim e^{-ikx}+R(k)e^{ikx}$;而当$x\to-\infty$时$\psi\sim T(k)e^{-ikx}$. 这里$R(k),T(k)$分别称为反射系数和穿透系数,且有$|R|^2+|T|^2=1$. 离散的特征函数$\psi_m$可正规化$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_m^2 dx=1$,且组合成当$x\to+\infty$时$\psi_m\sim C_m(k_m)e^{-k_m x}$;而当$x\to-\infty$时$\psi_m\sim e^{k_m x}$. 此$C_m(k_m)$称为正规化系数. 这些数据$\{k_m,C_m(k_m),R(k),T(k)\}$称为位势$u(x)$的散射数据. 薛定谔方程是二阶方程,有两个线性独立解. 给定位势$u(x)$求散射数据及在$\pm\infty$处为有界的波函数ψ,称为散射问题. 若已知散射数据及波函数在$\pm\infty$处的性态而求位势$u(x)$,则称为反散射问题. 经研究,反散射问题的解为

$$u(x)=-2\frac{d}{dx}K(x,x),$$

$$K(x,y)+B(x+y)+\int_x^{+\infty}B(y+z)K(x,z)dz=0,y>x,$$

这里积分方程的核为$B(\xi)=\sum_{m=1}^{n}C_m^2(k_m)e^{-k_m\xi}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}R(k)e^{ik\xi}dk.$

*(6) **反散射方法** 若$u(x,t)$是KdV方程$u_t-6uu_x+u_{xxx}=0$的满足初值条件$u(x,0)=u_0(x)$的解,这里$u_0(x)\to 0(|x|\to\infty)$. $u(x,t),u_0(x)$均可作为薛定谔方程$\psi_{xx}-(u-\lambda)y=0$的位势,要求已知$u_0(x)$求$u(x,t)$. 刚好成为散射问题和反散射问题,只是两者的散射数据$\{k_m,C_m(k_m),R(k),T(k)\}$和$\{k_m(t),C_m(k_m,t),R(k,t),T(k,t)\}$不同,但当$t=0$时后者变为前者. 1967年四位物理学家Gardner,Greene,Kruskal和Miura发现了它们之间的关系.

GGKM定理 $\{k_m,C_m(k_m),R(k),T(k)\}$和$\{k_m(t),C_m(k_m,t),R(k,t),T(k,t)\}$之间成立关系式:

$$\frac{\mathrm{d}k_m(t)}{\mathrm{d}t}=0,\frac{\mathrm{d}C_m^2(k_m,t)}{\mathrm{d}t}=8k_m^2C_m^2(k_m,t),$$

$$\frac{\mathrm{d}R(k,t)}{\mathrm{d}t}=8\mathrm{i}k^3R(k,t),\frac{\mathrm{d}T(k,t)}{\mathrm{d}t}=0.$$

这是容易求解的常微分方程. 于是得到反散射方法:先通过 $u_0(x)$ 求散射问题,得到散射数据 $\{k_m, C_m(k_m), R(k), T(k)\}$,再利用 GGKM 定理解得含时间的散射数据 $\{k_m(t), C_m(k_m,t), R(k,t), T(k,t)\}$,然后再通过解反散射问题求得位势 $u(x,t)$,从而得到 KdV 方程的解. 这与解线性问题的傅里叶变换相似,这种求解非线性方程的反散射方法便被称为非线性傅里叶变换方法,能用于众多的非线性孤立子方程. 反散射方法是求解非线性方程的重大突破. 参见[§6. 3. 2 - (12), §7. 3. 2 - (7)].

§8. 3. 3 应用实例

(1) **导弹跟踪** 如图 8. 1,假设飞机开始位置为(a,b)沿平行于 x 轴方向以常速 v_0 飞行,导弹开始位于坐标原点$(0,0)$. 为求导弹的运动轨迹,先建立导弹的运动方程. 设在时刻 t 飞机位置为(x_A,b),导弹位置为(x,y),导弹始终指向飞机飞行. 其切线方程为 $Y-y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(X-x)$,取$(X,Y)=(x_A,b)$,记 $x'=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$,由 $x_A=a+v_0t$ 得 $x'(b-y)=a+v_0t-x$. 再对 y 微分,有 $x''(b-y)=v_0\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}$. 利用 $\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2=v^2\mathrm{d}t^2$,上式化为 $x''(b-y)=\lambda\sqrt{1+x'^2}$,其中 $\lambda=\frac{v_0}{v}$表示飞机与导弹的速度比,此即为导弹的运动方程,以 y 为自变量,x 为因变量. 边界条件为 $x(0)=0, x(b)=a+v_0T$,在时刻 T,导弹击中目标. 这是一个特殊的二阶非线性边值问题,特殊性在于边值条件中跟踪时间 T 未定,可在求解过程中确定. 具体求解可参见[文 20 §7. 1]. 导弹跟踪的运动轨迹实际上也是[§4. 3. 3 - (2)]的追线轨迹,只是追线是作为初值问题来求解的.

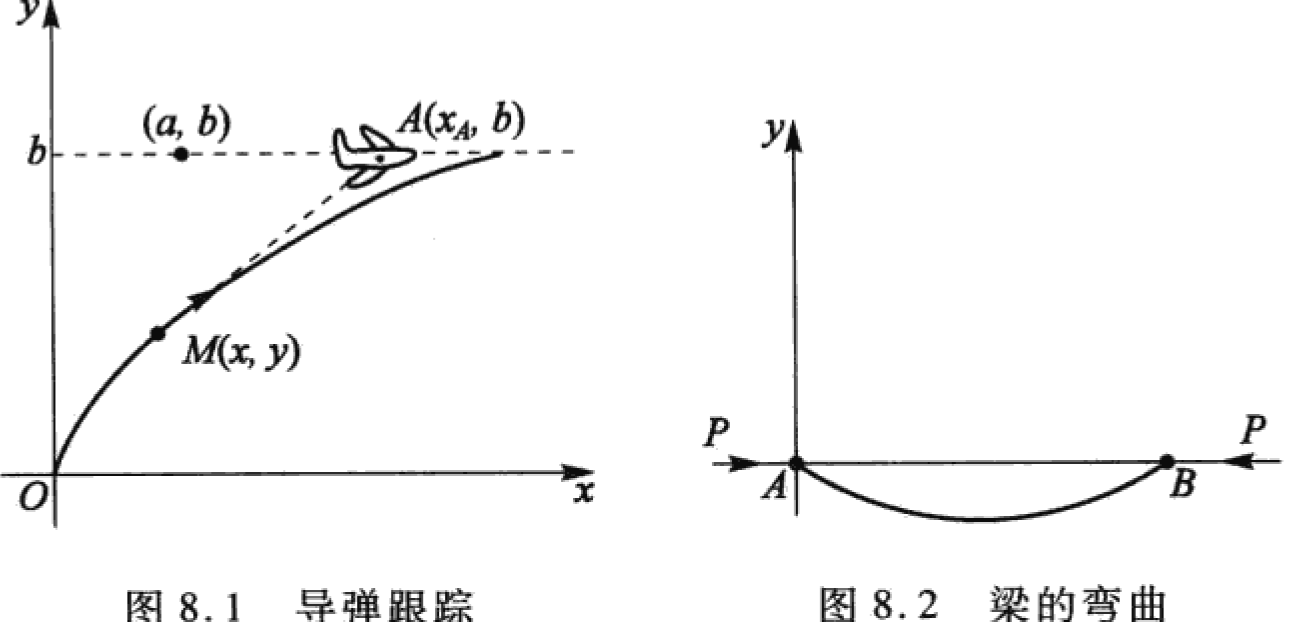


图 8.1　导弹跟踪　　　　图 8.2　梁的弯曲

(2) **弹性理论与梁的弯曲**　设直角坐标系的 x 轴与梁轴重合，梁的横断面平行于 Oyz 平面. 对任一断面，X,Y,Z,M_x,M_y,M_z 表示其断面左边梁上作用的各外力的合力及合力矩的分量，断面重心为力矩中心. 称 X 为轴向力，Y,Z 为剪力，M_x 为扭矩，M_y,M_z 为对 y,z 轴的弯矩. 若设横断面对 Oxz 平面是对称的，且所有力的作用线都和 z 轴平行，则 $X=Y=0,M_x=M_z=0$，这时称 $M_y=M$ 为弯矩，合力 $Z=S$ 为剪力. 设法向挠度 w 向下为正，M 顺时针方向为正，S 向上为正，用 $p(x)$ 表示梁单位长度上的载荷，$P_1,P_2,\cdots$ 表示集中载荷，各载荷向下为正. 当铅垂力作用在梁的一个元长度 $\mathrm{d}x$ 上时，平衡条件为 $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+p\mathrm{d}x=0$. 如力矩作用时有 $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x-S\mathrm{d}x=0$，即 $S=\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x},p=-\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}$. 由胡克定律，弹性曲线的曲率与弯曲力矩 M 成正比. 即 $\frac{1}{R}=\frac{M}{EI}$，其中 R 为曲率半径，E 为梁的弹性系数(杨氏模数)，I 为梁的横截面对 y 轴的惯性力矩. 曲线 $w=w(x)$ 的曲率为 $\frac{1}{R}=-\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$. 当挠度很小时，近似地取 $\frac{1}{R}=-\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}$，于是 $\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{M}{EI}$. 得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-EI\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)=S$，

$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(EI\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)=p(x)$. 后式为梁的挠度微分方程，$EI$ 称为抗弯刚度. 弹性梁一般有三种边界条件：铰链支座、嵌固支座和自由端. 对铰链支座，在该端 $w=0$，力矩为零，即$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}=0$. 对嵌固支座在该端 $w=0$，及 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=0$. 而对自由端，有 $M=S=0$，即 $\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}=0$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EI\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)=0$. 见[文 11 §7.3].

（3）**弹性基础上的梁**　设梁的主轴为 y 轴和 z 轴，载荷作用在 Oxz 平面上，挠度方程为$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(EI\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)=p(x)$，给定 $p(x)$后可逐次积分或用图解法求出 w. 弹性基础上的梁可理解为用很多弹簧连接在固定基底上的等截面梁，以一个单位长度的恢复力为 $-kx$ 代替弹簧的作用. 外加的分布载荷仍为 $p(x)$，则方程变为 $EIw^{(4)}=p(x)-kw$. 对应齐次方程 $w^{(4)}+4\beta^4w=0$，$\beta^4=\frac{k}{4EI}$有含四个任意常数的通解 $w=\mathrm{e}^{\beta x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)+\mathrm{e}^{-\beta x}(\widetilde{A}\cos\beta x+\widetilde{B}\sin\beta x)$. 通解加上 $p(x)$作用下的特解后再由四个边界条件确定任意常数. 当只有集中载荷 P 加在点 ξ 时，对 $x\neq\xi$ 有 $p(x)=0$. 设梁的长度两端无限长，边值条件为 $x=\xi$ 时$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=0$，而在 $x=\pm\infty$ 时 w 有限. 此时，解为 $w=C\mathrm{e}^{\pm\beta x}[\cos\beta(x-\xi)\mp\sin\beta(x-\xi)]$. 当 $x<\xi$ 时解取上半部式，当 $x>\xi$ 时解取下半部式. 因当 $\varepsilon\to0$ 时在 $x=\xi-\varepsilon$ 和 $x=\xi+\varepsilon$两点的剪力差 S 应等于载荷，而剪力为 $S=-EIw'''$，又 $w'''|_{x=\xi-\varepsilon}=-4\beta C$，$w'''|_{x=\xi+\varepsilon}=4\beta C$，于是有 $C=\frac{P}{8\beta^3EI}$. 挠度曲线具有阻尼波的形状，在 $x=\xi$ 处三阶导数不连续. 有很多种工程问题都归结为或简化为弹性基础梁的弯曲问题. 其中一个是有加固环的圆管的研究. 参见[文 11 §7.4].

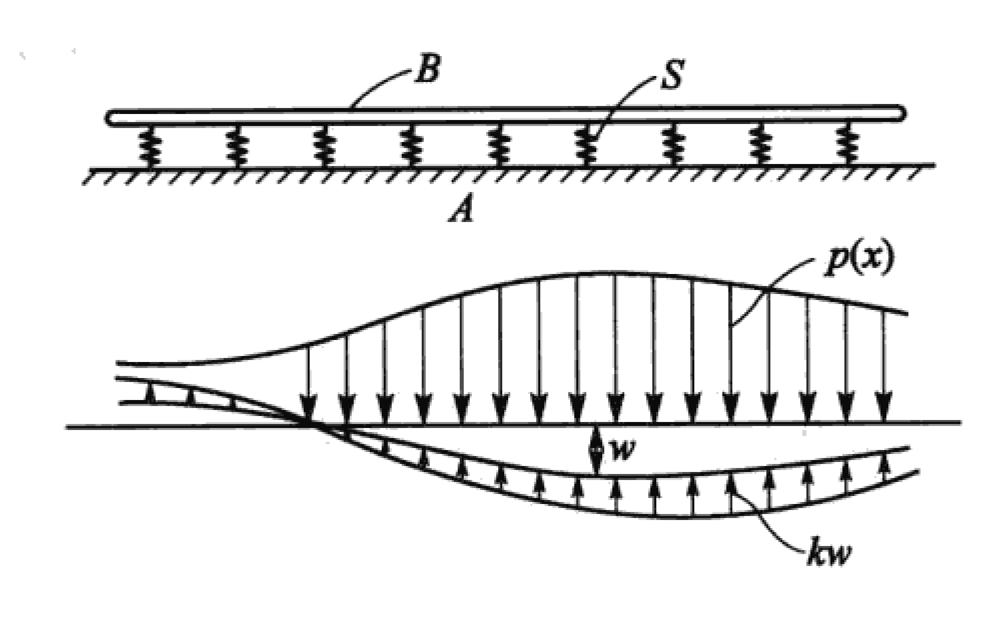


图 8.3　弹性基础上的梁

(4) **压杆弯曲的临界力**　可将两头受与杆反向力作用的受压长杆视为轴向载荷的柱,轴向力很大时须考虑柱的弯曲.设柱在固定点 $x=l$ 处以铰链连接.在 $x=0$ 处有一支撑防止侧向变位,但允许自由转动及轴向挠曲,柱有一轴向载荷力 P.当柱的变位为 $w(x)$ 时 P 产生的弯矩为 Pw,于是可得二阶方程 $EI\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}=Pw$.欧拉曾提出力 P 多大时会令杆(柱)弯曲,即临界力问题.令 $\lambda=\frac{P}{EI}$,方程成为 $w''=\lambda w$.其边值条件为 $w(0)=w(l)=0$.边值问题成为特征值问题.根据[§8.2.3-3(2),§8.4.1-3(2)],边值问题当且仅当 $\lambda=\frac{n^2\pi^2}{l^2}$ $(n=\pm1,\pm2,\cdots)$ 时有非零解 $w(x)=c\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ $(c\neq0,n=\pm1,\pm2,\cdots)$.因此,欧拉问题的解为临界力取 $P=EI\lambda=EI\frac{n^2\pi^2}{l^2}$ $(n=\pm1,\pm2,\cdots)$,而最小临界力为 $P=EI\frac{\pi^2}{l^2}$.在临界力作用下杆会弯曲但两端保持不变.

(5) **固定端点的弦振动**　弦振动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,当两端固定时边值条件为 $u(0,t)=u(l,t)=0$.用分离变量法求解,令 $u_k=$

$T_k(t)U_k(x)$，代入方程可化为两方程$\frac{T''_k(t)}{T_k(t)}=a^2\frac{U''_k(x)}{U_k(x)}=-\lambda^2$. 方程 $U''_k(t)=-\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2U_k(t)$结合边值条件 $U_k(0)=U_k(l)=0$，再利用归一化条件 $\int_0^l U_k^2\mathrm{d}x=1$ 有解 $U_k=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\lambda_k x}{a}\left(\lambda_k=\frac{ak\pi}{l},k=\pm1,\pm2,\cdots\right)$. 而方程 $T''_k(t)=\lambda_k^2T_k(t)$ 有解 $T_k=A_k\cos\lambda_k x+B_k\sin\lambda_k x$. 这便是弦的非零解（振动解），弦的固有振动的频率为 $\lambda_k=\frac{ak\pi}{l}$（$k$ 为整数），$\frac{a\pi}{l}$称为基音频率，其余为泛音频率，特征函数$\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{k\pi x}{l}$在区间$0\leqslant x\leqslant l$ 中改变 $k-1$ 次符号. 特征函数等于零的点称为振动的波节.

§8.3.4 历史与人物

（1）**简史（边值问题）** 热传导和弦振动等实际问题，以及偏微分方程利用分离变量化为常微分方程后会引出边值问题或要由边值条件确定的特征值问题. 欧拉、伯努利家族等人曾研究弦振动的边值问题，格林用格林公式（函数）解决二阶非齐次线性微分方程边值问题. 施图姆和刘维尔则开创了边值问题和特征值问题的研究. 有限区间上二阶常微分方程的边值问题的存在唯一性，对线性方程，理论上容易解决. 但对非线性方程，直至 20 世纪仍在研究中. 特征值（本征值）问题是一种特殊的二阶常微分方程边值问题，最典型的是施图姆－刘维尔问题. 1836 年 C. －F. 施图姆证明了一个一般性的比较定理，并由此推出存在 n 个零点的特征函数的振动定理. 20 世纪，出现特征值反问题的研究，包括从散射数据出发求微分方程系数的散射反问题，并于 1967 年发展出求 KdV 方程等非线性偏微分方程的孤立子解的反散射方法.

（2）**格林**（G. Green，1793—1841） 英国数学家. 长期在父亲

的磨坊里做工,通过自学掌握高等数学. 主要受拉格朗日、拉普拉斯、泊松等法国学派人物的影响. 将分析应用于电磁领域并引出在数学物理中的一系列重要工作. 40 岁(1833 年)时被推荐入剑桥大学,1838 年获学士学位,1839 年被选为冈维尔 - 科尼斯学院院委. 他建立的位势理论和格林公式已成为现代偏微分方程的基本工具. 他致力于用分析方法解决引力、水波、声光传播及弹性理论等问题. 其工作孕育了以 W. 汤姆森、G. G. 斯托克斯、J. C. 麦克斯韦等为代表的剑桥数学物理学派.

(3) **施图姆**(C. - F. Sturm,1803—1855)　法国数学家,生于日内瓦,但大部分时间生活在巴黎. 在流体力学、分析、微分方程、微分几何及几何光学等方面作出重要贡献,解决了给定范围内确定实系数代数方程的实根数(施图姆定理),和刘维尔一起创立了常微分方程边值和特征值问题的新研究方向. 曾获巴黎科学院的数学物理大奖. 是英国皇家学会、柏林科学院、彼得堡科学院成员.

(4) **刘维尔**(J. Liouville,1809—1882)　法国数学家. 法文《纯粹与应用数学杂志》创办人. 曾任法兰西学院、巴黎大学教授. 1839 年当选为科学院天文部成员. 对函数论、微分方程和数论有重要贡献. 首先用逐次逼近法证明一个二阶常微分方程解的存在性,提出通过解积分方程求解微分方程,和 C. - F. 施图姆合作开创微分方程边值问题的新方向. 对 19 世纪的法国数学有重要影响.

(5) **薛定谔**(E. Schrödinger,1887—1961)　奥地利理论物理学家. 1933 年与狄拉克(Dirac)分享诺贝尔奖. 其科学工作只有专家能懂,但写有文笔清新流畅、思想丰富的小册子《什么是生命?》(1944)、《科学与人文主义》(1952)等.

历史人物尚有:欧拉([§1. 3. 4 - (3)]),伯努利家族([§2. 3. 4 - (3)]).

§8.4 习题与习题解答

§8.4.1 测试练习解答

1. (1) 二阶方程有通解 $y(x)=c_1 e^{2x}+c_2 e^{-x}$. 由边值条件 $y(+\infty)=0$ 知要求 $c_1=0$. 再由边值条件 $y(0)=2$ 可得 $c_2=2$. 即方程边值问题的解为 $y(x)=2e^{-x}$.

(2) 二阶齐次微分方程 $y''-y=0$ 有通解 $y=c_1 e^{-x}+c_2 e^{x}$. 满足初值条件 $y_1(0)=0, y_1'(0)=1$ 的特解为 $y_1(x)=-\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{2}e^{x}=\operatorname{sh} x$, 且有 $y_1(1)\neq 0$. 而对非齐次方程有特解 $y_0(x)=-3x$ 满足初值条件 $y_0(0)=0, y_0'(0)\neq 0$. 于是由[书附录 I -(20)]非齐次方程满足边值条件的解为 $y(x)=y_0(x)+\frac{-1-y_0(1)}{y_1(1)}y_1(x)=\frac{2\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1}-3x$.

(3) 非齐次方程有特解 $y_0(x)=2x-\pi$, 其初值为 $y_0(0)=-\pi, y_0'(0)=2$; 边值为 $y_0(\pi)=\pi, y_0'(\pi)=2$. 二阶齐次微分方程 $y''+y=0$ 有通解 $y_1(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$. 且解 $y=c\sin x$ 满足边值条件. 现取非齐次方程的解 $y=y_0+y_1$, 确定 c_1, c_2 使其满足边值条件, 即

$$y_0(0)+y_1(0)=-\pi+c_1=0,$$
$$y_0(\pi)+y_1(\pi)=2\pi-\pi-c_1=0,$$

得 $c_1=\pi$. 于是非齐次方程满足边值条件的解为

$$y(x)=2x-\pi+\pi\cos x+c\sin x.$$

注 因齐次方程满足 $y_1(0)=0, y_1'(0)=1$ 的特解 $y_1=\sin x$, 有 $y_1(\pi)=0$. 不能依一般方法求解. 实际上待定系数法就是利用

齐次方程通解加非齐次方程特解为非齐次方程通解这一性质，再通过使其满足边值条件确定待定系数得到所要求的解. 对不同边值问题亦可类似求解.

2. (1) 齐次方程 $y''-y=0$ 有通解 $y_1(x)=c_1\mathrm{e}^{-x}+c_2\mathrm{e}^{x}$，非齐次方程通解为

$$y(x)=c_1\mathrm{e}^{-x}+c_2\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{2}\int_0^x(\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{t})f(t)\,\mathrm{d}t.$$

再利用边值条件，应有

$$y'(0)=-c_1+c_2=0,c_2=c_1$$

及

$$2c_1\mathrm{e}^2+\frac{1}{2}\int_0^2(\mathrm{e}^2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2}\mathrm{e}^{t})f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^2(\mathrm{e}^2\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2}\mathrm{e}^{t})f(t)\,\mathrm{d}t=0,$$

即

$$2c_1\mathrm{e}^2+\int_0^2\mathrm{e}^2\mathrm{e}^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t=0,c_1=-\frac{1}{2}\int_0^2\mathrm{e}^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

于是边值问题的解为

$$\begin{aligned}y(x)&=-\operatorname{ch}x\cdot\int_0^2\mathrm{e}^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^x(\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{t})f(t)\,\mathrm{d}t\\&=-\int_x^2\operatorname{ch}x\cdot\mathrm{e}^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^x(-\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{t})f(t)\,\mathrm{d}t\\&=-\int_x^2\operatorname{ch}x\cdot\mathrm{e}^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x\mathrm{e}^{-x}\operatorname{ch}t\cdot f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

可定义格林函数

$$G(x,t)=\begin{cases}-\mathrm{e}^{-x}\cdot\operatorname{ch}t, & 0\leqslant t\leqslant x,\\ -\mathrm{e}^{-t}\cdot\operatorname{ch}x, & x\leqslant t\leqslant 2.\end{cases}$$

边值问题的解为

$$y(x)=\int_0^2G(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t\quad(0\leqslant x\leqslant 2).$$

(2) 方程的基本解组为 $y_1=\sin kx,y_2=\cos kx$. 格林函数也满足此方程，由格林函数的定义，当 $0\leqslant x\leqslant t$ 时 $G(x,t)=a_1(t)\sin kx+$

$a_2(t)\cos kx$；而当 $t\leqslant x\leqslant 1$ 时有 $G(x,t)=b_1(t)\sin kx+b_2(t)\cos kx$. 当 $x=t$ 时 $G(x,t)$ 连续，这要求

$$b_1(t)\sin kt+b_2(t)\cos kt-a_1(t)\sin kt-a_2(t)\cos kt=0.$$

由格林函数的性质(2)可得

$$k[b_1(t)\cos kt-b_2(t)\sin kt-a_1(t)\cos kt+a_2(t)\sin kt]=1.$$

利用格林函数的性质(3)和边值条件有

$$a_2(t)=0,\ k[b_1(t)\cos k-b_2(t)\sin k=0.$$

令 $c_1(t)=b_1(t)-a_1(t)$，$c_2(t)=b_2(t)-a_2(t)$，前面两式可化为

$$c_1(t)\sin kt+c_2(t)\cos kt=0,c_1(t)\cos kt-c_2(t)\sin kt=\frac{1}{k}.$$

解之并利用 $a_2(t)=0$，有

$$c_1(t)=\frac{\cos kt}{k},c_2(t)=-\frac{\sin kt}{k}=b_2(t),$$

$$b_1(t)=-\frac{\sin k\cdot\sin kt}{k\cos k}.$$

于是

$$a_1(t)=b_1(t)-c_1(t)=-\frac{\cos k(t-1)}{k\cos k}.$$

最后求得格林函数为

$$G(x,t)=\begin{cases}-\dfrac{\cos k(t-1)\cdot\sin kx}{k\cos k}, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ -\dfrac{\sin kt\cdot\cos k(x-1)}{k\cos k}, & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

3. (1) 当 $\lambda=0$ 时方程的通解为 $y=c_1+c_2x$. 将边值条件代入，得 $c_1+c_2=0$，有非零解 $y=c(1-x)$，故 $\lambda=0$ 是其特征值，特征函数为 $y=c(1-x)$；当 $\lambda<0$ 时，令 $\lambda=-\mu^2$，方程的通解为 $y=c_1\text{sh}\,\mu x+c_2\text{ch}\,\mu x$. 将边值条件代入，得 $c_2+\mu c_1=0$，$c_1\text{sh}\,\mu+c_2\text{ch}\,\mu=0$，因 $\begin{vmatrix}\mu & 1\\ \text{sh}\,\mu & \text{ch}\,\mu\end{vmatrix}=\mu\text{ch}\,\mu-\text{sh}\mu\neq 0$，推得 $c_1=c_2=0$，没有

非零解；当 $\lambda>0$ 时，令 $\lambda=\xi^2$，方程的通解为 $y=c_1\cos\xi x+c_2\sin\xi x$. 由边值条件 $c_1+c_2\xi=0, c_1\cos\xi+c_2\sin\xi=0$. 对 c_1, c_2 有非零解的充要条件是 $\begin{vmatrix}1 & \xi\\ \cos\xi & \sin\xi\end{vmatrix}=0$，即 $\tan\xi=\xi$，其实根可由曲线 $\eta=\tan\xi, \eta=\xi$ 的交点确定. 当 $\xi\geqslant 0$ 时有 $0=\xi_0<\xi_1<\cdots<\xi_n<\cdots$，其中 $\frac{(2n-1)\pi}{2}<\xi_n<\frac{(2n+1)\pi}{2}(n=1,2,\cdots)$，且当 $n\to\infty$ 时 $\xi_n\to\infty$. 于是边值问题有特征值 $0=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n<\cdots$，其中 $\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}<\lambda_n<\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4}(n=1,2,\cdots)$，且当 $n\to\infty$ 时 $\lambda_n\to\infty$. 对应的特征函数为 $y_n=c(\sin\sqrt{\lambda}x-\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x)(c\neq 0, n=1,2,\cdots)$.

(2) 当 $\lambda=0$ 时方程的通解为 $y=c_1+c_2x$. 将边值条件代入，得 $c_1=c_2=0$，没有非零解；当 $\lambda<0$ 时，令 $\lambda=-\mu^2$，方程的通解为 $y=c_1\cos\mu x+c_2\sin\mu x$. 将边值条件代入，得 $c_1=0, c_2\sin\mu l=0$，要有非零解存在，必须 $\sin\mu l=0$，即 $\mu=0,\pm\frac{\pi}{l},\pm\frac{2\pi}{l},\cdots$. 于是特征值为 $\lambda=-\frac{n^2\pi^2}{l^2}(n=\pm1,\pm2,\cdots)$，特征函数为 $y=c\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)(c\neq 0, n=\pm1,\pm2,\cdots)$；当 $\lambda>0$ 时，令 $\lambda=a^2$，方程的通解为 $y=c_1\mathrm{e}^{-ax}+c_2\mathrm{e}^{ax}$. 由边值条件 $c_1+c_2=0, c_1\mathrm{e}^{-al}+c_2\mathrm{e}^{al}=0$，因 $\begin{vmatrix}1 & 1\\ \mathrm{e}^{-al} & \mathrm{e}^{al}\end{vmatrix}=\mathrm{e}^{al}-\mathrm{e}^{-al}\neq 0$，只有解 $c_1=c_2=0$，不存在非零解.

§8.4.2 补充习题解答

1. (1) 非齐次微分方程的通解为 $y=c_1y_1+c_2y_2+y_0$，其中 c_1，c_2 为任意常数. 方程的边值条件 $U_i[y]=\gamma_i(i=1,2)$ 可改写成 $c_1U_i[y_1]+c_2U_i[y_2]+U_i[y_0]-\gamma_i=0(i=1,2)$. 因此，由代数方程理论，非齐次边值条件可解即 c_1, c_2 存在且唯一的充要条件是两

矩阵

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] & U_1[y_0]-\gamma_1 \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] & U_2[y_0]-\gamma_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] \end{bmatrix}$$

有相同的秩. 而对齐次边值条件可解即 c_1,c_2 存在且唯一的充要条件是两矩阵

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] & \gamma_1 \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] & \gamma_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] \end{bmatrix}$$

有相同的秩(矩阵同列元素齐变号不影响其秩). 定理证毕.

(2) 当行列式 $\Delta \neq 0$ 时,显然满足定理 1 的条件,齐次边值问题存在唯一解. 反之亦然.

2. 因 $U_1[y_j]=y_j(a), U_2[y_j]=y_j(b), \gamma_1=\alpha, \gamma_2=\beta$. 由第 1 题知当

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} \neq 0$$

时,非齐次边值问题存在唯一解. 而此时的齐次边值条件为 $y(a)=0, y(b)=0$,对齐次边值问题,当 $\Delta\neq 0$ 时其唯一解为 $c_1=c_2=0$,即为零解. 因此非齐次边值问题存在唯一解对应于齐次边值问题(边值条件不同!)只有零解. 反之亦然.

3. (1) 齐次方程有基解组 $y_1=\cos 3x, y_2=\sin 3x$. 非齐次方程有特解 $y_0=\cos x$. 矩阵

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] & U_1[y_0]-\gamma_1 \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] & U_2[y_0]-\gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

有相同的秩,非齐次边值问题存在唯一解.

(2) 特征方程 $\lambda^2+4\lambda+4=(\lambda+2)^2=0$ 有 2 重特征根 $\lambda=-2$. 方程有基解组 $y_1=e^{-2x}, y_2=xe^{-2x}$. 矩阵

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] & \gamma_1 \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] & \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2e^{-2} & -e^{-2} & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2e^{-2} & -e^{-2} \end{bmatrix}$$

有相同的秩,非齐次边值问题存在唯一解.

(3) 齐次方程有基解组 $y_1 = 1, y_2 = x$. 非齐次方程有特解 $y_0 = \frac{1}{6}x^3$. 矩阵

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] & U_1[y_0] - \gamma_1 \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] & U_2[y_0] - \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{7}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

的秩不同,故非齐次边值问题不存在解.

事实上,非齐次方程 $y'' = x$ 有通解 $y = ax + b + \frac{1}{6}x^3$. 由边值条件求得的 a 值矛盾.

4. (1) 非齐次方程有通解 $y = a\cos 3x + b\sin 3x + \cos x$. 代入边值条件有 $a + 1 = 1, -b = -1$,即 $a = 0, b = 1$. 得解为 $y = \sin 3x + \cos x$.

(2) 方程有通解 $y = (a + bx)e^{-2x}$. 由边值条件有 $a = 0, b = -2e^2$. 方程的解为 $y = -2xe^{2(1-x)}$.

(3) 非齐次方程有通解 $y = a + bx + \frac{1}{6}x^3$. 由第 2 个边值条件得 $-\frac{1}{2} = 0$,产生矛盾. 方程无解.

5. (1) (a) 求出方程的基本解组 $y_1(x), y_2(x)$. 计算 $\Delta \equiv \det\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] \end{bmatrix}$,当 $\Delta \neq 0$ 时方程存在唯一解. 其格林函数

$G(x,t)$也存在且唯一. 将 $G(x,t)$表示为

$$G(x,t)=\begin{cases}a_1(t)y_1(x)+a_2(t)y_2(x), & 0\leqslant x\leqslant t,\\ b_1(t)y_1(x)+b_2(t)y_2(x), & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

(b) 由 $G(x,t)$, $G_x(x,t)$在 $x=t$ 处的连续性和跃度 1 知

$$b_1(t)y_1(t)+b_2(t)y_2(t)-a_1(t)y_1(t)-a_2(t)y_2(t)=0,$$

$$b_1(t)y_1'(t)+b_2(t)y_2'(t)-a_1(t)y_1'(t)-a_2(t)y_2'(t)=1.$$

因朗斯基行列式 $W(t)\equiv W[y_1(t),y_2(t)]\neq 0$,有解

$$b_1(t)-a_1(t)=-\frac{y_2(t)}{W(t)},b_2(t)-a_2(t)=\frac{y_1(t)}{W(t)}.$$

注 当方程二阶项系数 $p_0(x)\neq 1$ 时跃度为$\dfrac{1}{p_0(x)}$,上两式中 $W(t)$改为$p_0(t)W(t)$.

(c) 再利用 $U_i[G]=0$ $(i=1,2)$可得两方程(右端函数已知)

$$b_1(t)U_i[y_1]+b_2(t)U_i[y_2]=\cdots\quad(i=1,2).$$

由 $\Delta\neq 0$,可解出 $b_1(t)$, $b_2(t)$. 代入(b)的结果,求得 $a_1(t)$, $a_2(t)$. 即有格林函数 $G(x,t)$.

(2) 当 $\gamma_1=\gamma_2=0$ 时,非齐次边值问题的解为 $y=\int_a^b G(x,t)f(t)\mathrm{d}t$. 而 γ_1, γ_2不全为零时可先(如用待定系数法)求 $f(x)\equiv 0$ 的齐次方程边值问题的解 $y_0(x)$. 非齐次边值问题的解为 $y=y_0(x)+\int_a^b G(x,t)f(t)\mathrm{d}t$,其中 $G(x,t)$为齐次方程边值问题的格林函数.

6. (1) 先求边值问题 $y''=0$, $y(0)=1$, $y'(1)=2$ 的解. 方程有基解组 $y_1=1$, $y_2=x$. 通解为 $y=c_1+c_2x$. 代入边值条件有解 $y=1+2x$. 设边值问题 $y''=f(x)$, $y(0)=0$, $y'(1)=0$ 的格林函数为

$$G(x,t)=\begin{cases}a_1(t)+a_2(t)x, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ b_1(t)+b_2(t)x, & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

由齐次方程边值条件得 $a_1(t)=0$, $b_2(t)=0$. 利用第 5 题结果,有

$$b_1(t)-a_1(t)=-\frac{t}{W(t)}=-t,$$

$$b_2(t)-a_2(t)=\frac{1}{W(t)}=1.$$

解得 $b_1(t)=-t, a_2(t)=-1$. 即格林函数为

$$G(x,t)=\begin{cases}-x, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ -t, & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

解为 $y=-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t-\int_x^1 xf(t)\mathrm{d}t$. 最后,原非齐次边值问题的解为

$$y=1+2x-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t-\int_x^1 xf(t)\mathrm{d}t.$$

(2) 齐次方程的两个线性无关解为 $y_1=\frac{1}{x}, y_2=1$,令其格林函数为

$$G(x,t)=\begin{cases}\frac{a_1(t)}{x}+a_2(t), & 0\leqslant x\leqslant t,\\ \frac{b_1(t)}{x}+b_2(t), & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

利用第 5 题(注意这里 $p_0(x)=x^2$)有

$$b_1(t)-a_1(t)=-\frac{1}{p_0(t)W(t)}=\frac{-1}{t^2\cdot t^{-2}}=-1,$$

$$b_2(t)-a_2(t)=\frac{t^{-1}}{p_0(t)W(t)}=\frac{1}{t}.$$

由边值条件 $y(1)=\alpha y'(1)$ 得 $b_1(t)+b_2(t)=-\alpha b_1(t)$. 又由当 $x\to 0$时 $y(x)$ 有界条件知,应取 $a_1(t)=0$. 于是有 $b_1(t)=-1$, $b_2(t)=1+\alpha, a_2(t)=1+\alpha-\frac{1}{t}$. 格林函数为

$$G(x,t)=\begin{cases}1+\alpha-\frac{1}{t}, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ 1+\alpha-\frac{1}{x}, & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

（3）齐次方程是欧拉方程，可令 $y=x^K$，代入得 $K(K-1)+2K=K(K+1)=0$，有通解 $y=c_1+c_2x^{-1}$. 用常数变易法，令 $y=c_1(x)+c_2(x)x^{-1}$，则 $y'=c_1'+c_2'x^{-1}-c_2x^{-2}$，设 $c_1'+c_2'x^{-1}=0$，于是 $y'=-c_2x^{-2}$，$y''=-c_2'x^{-2}+2c_2x^{-3}$. 将其代入方程得

$$x^2y''+2xy'=-c_2'+2c_2x^{-1}-2c_2x^{-1}=-c_2'=f(x),$$

$$c_2=-\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

而由 $c_1'+c_2'x^{-1}=0$ 又有 $c_1'=-c_2'x^{-1}=x^{-1}f(x)$，$c_1=\int_1^x t^{-1}f(t)\,\mathrm{d}t$.

最后得非齐次方程的特解 $y=\int_1^x(t^{-1}-x^{-1})f(t)\,\mathrm{d}t$. 其通解为 $y=c_1+c_2x^{-1}+\int_1^x(t^{-1}-x^{-1})f(t)\,\mathrm{d}t$. 利用边值条件有 $c_2=-c_1=\int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t$. 于是有 $y=\int_x^3(x^{-1}-1)f(t)\,\mathrm{d}t+\int_1^x(t^{-1}-1)f(t)\,\mathrm{d}t$. 可定义格林函数

$$G(x,t)=\begin{cases}t^{-1}-1, & 1\leqslant t\leqslant x,\\ x^{-1}-1, & x\leqslant t\leqslant 3.\end{cases}$$

边值问题的解为

$$y(x)=\int_1^3 G(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t\quad(1\leqslant x\leqslant 3).$$

7.（1）当 $\lambda=0$ 时，方程有通解 $y=c_1+c_2x$. 边值条件为当 $|x|\to\infty$ 时，$y(x)$ 有界即要求 $c_2=0$，边值问题有解 $y=c$. 即 $\lambda=0$ 为特征值，$y=c$ 为特征函数. 当 $\lambda<0$，$\lambda=-\mu^2$ 时，方程 $y''-\mu^2y=0$ 有通解 $y=c_1\operatorname{sh}\mu x+c_2\operatorname{ch}\mu x$，由边值条件知有 $c_1=c_2=0$，边值问题无非零解，当 $\lambda>0$，$\lambda=a^2$ 时，方程 $y''+a^2y=0$ 有通解 $y=c_1\cos ax+c_2\sin ax$. 对任意 c_1,c_2 均满足边值条件. 故边值问题有特征值 $\lambda=a^2>0$，特征函数为 $y=c_1\cos ax+c_2\sin ax$.

（2）当 $\lambda=0$ 时，方程有通解 $y=c_1+c_2x$. 代入边值条件得 $c_1=c_1+c_2$，$c_2=-c_2$，边值问题有解 $y=c$. 即 $\lambda=0$ 为特征值，$y=c$ 为特

征函数. 当 $\lambda<0,\lambda=-\mu^2$ 时, 方程 $y''-\mu^2y=0$ 有通解 $y=c_1\operatorname{sh}\mu x+c_2\operatorname{ch}\mu x$, 由边值条件应满足 $c_2=c_1\operatorname{sh}\mu+c_2\operatorname{ch}\mu,\mu c_1=-\mu(c_1\operatorname{ch}\mu+c_2\operatorname{sh}\mu)$, 得 $c_1=c_2(\operatorname{csch}\mu-\coth\mu)$. 边值问题有特征值 $\lambda=-\mu^2<0$, 特征函数为 $y=c(\operatorname{csch}\mu-\coth\mu)\operatorname{sh}\mu x+c\operatorname{ch}\mu x$. 当 $\lambda>0,\lambda=a^2$ 时, 方程 $y''+a^2y=0$ 有通解 $y=c_1\cos ax+c_2\sin ax$. 代入边值条件得 $c_1=c_1\cos a+c_2\sin a, ac_2=ac_1\sin a-ac_2\cos a$. 得 $c_2=c_1(\csc a-\tan a)$. 边值问题有特征值 $\lambda=a^2>0$, 特征函数为 $y=c\cos ax+c(\csc a-\tan a)\sin ax$.

(3) 此为[书附录 I §4 例 10]. 非齐次边值问题可化为两个(半)齐次边值问题

$$y''+\lambda y=0, y(0)=\alpha, y(\pi)=\beta; \qquad (*)$$

$$y''+\lambda y=f(x), y(0)=y(\pi)=0. \qquad (**)$$

分别求解后再叠加. (*)在[书附录 I §4 例 9]中化为边值问题(**)求解, 其中 $f(x)=-[h''(x)+\lambda h(x)]$. (**)在[书附录 I §4 例 8]已详细讨论. 综合得

当 $\sin\sqrt{\lambda}\pi\neq 0$ 时, 非齐次边值问题(*)有解

$$y_1(x)=-\int_0^\pi G(x,t,\lambda)[h''(t)+\lambda h(t)]\mathrm{d}t+h(x)\quad(0\leqslant x\leqslant\pi),$$

其中 $h(x)$ 为满足边值条件 $y(0)=\alpha, y(\pi)=\beta$ 的任意二阶连续可微函数. 而(**)有解

$$y_2(x)=\int_\alpha^\beta G(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t\quad(0\leqslant x\leqslant\pi),$$

这里 $G(x,t,\lambda)$ 为(**)的格林函数[书附录 I §4-(40)]:

$$G(x,t,\lambda)=\begin{cases}-\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}t\cdot\sin\sqrt{\lambda}(\pi-x)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi}, & 0\leqslant t\leqslant x,\\ -\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}x\cdot\sin\sqrt{\lambda}(\pi-t)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi}, & x\leqslant t\leqslant\pi.\end{cases}$$

于是, 由 $y(x)=y_1(x)+y_2(x)$ 得非齐次边值问题的解为

$$y(x)=\int_0^\pi G(x,t,\lambda)\{f(t)-[h''(t)+\lambda h(t)]\}\mathrm{d}t+h(x).$$

当 $\sin\sqrt{\lambda}\pi=0$ 时,即 $\lambda=\lambda^*=n^2(n=\pm1,\pm2,\cdots)$ 时,若对给定 $f(x)$ 及适当选择的 $h(x)$ 满足条件

$$\int_0^\pi f(t)\sin\sqrt{\lambda^*}t\mathrm{d}t=0,\int_0^\pi[h''(t)+\lambda*h(t)]\sin\sqrt{\lambda^*}t\mathrm{d}t=0,$$

则非齐次边值问题有解

$$y(x)=c\sin\sqrt{\lambda^*}x-\frac{1}{\sqrt{\lambda^*}}\int_0^\pi[h''(t)+\lambda^*h(t)-f(t)]\cdot$$

$$\sin\sqrt{\lambda^*}(x-t)\mathrm{d}t+h(x).$$

否则,只要有一个条件不成立,非齐次边值问题无解.

第九章　期中、期末及硕士研究生入学试题

§9.1　期中、期末试题套题(1)

§9.1.1　期中试题套题(1)

1.（每小题 10 分,共 30 分）求解下列微分方程

（1）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{3y-7x+7}{3x-7y-3}$;

（2）$x\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}-2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$;

（3）$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-13\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+36y=3\sin 6x$.

2.（12 分）试求具有下述性质的曲线,即曲线上任一点的切线介于两坐标轴间的部分被切点等分.

3.（15 分）对于微分方程

$$(y^2+2xy)\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y=0,$$

（1）验证该方程不是恰当方程;

（2）在方程两边乘以 y^n 后,确定 n 的值使之成为恰当方程;

（3）求该方程的通解.

4.（13 分）求初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-x^2+y^2,\ R:|x|\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2,\\ y(0)=1\end{cases}$$

的解的存在区间,并求第二次近似解,给出它与真正解在该区间上的误差估计.

5.(15 分)对于二阶线性微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p_1(x)\frac{dy}{dx}+p_2(x)y=0,$$

其中 $p_1(x),p_2(x)$ 为连续函数.

(1) 若存在常数 m,使得 $m^2+mp_1(x)+p_2(x)\equiv 0$,证明 $y=e^{mx}$是方程的解;

(2) 利用(1)中的结论和相应的变换,求方程

$$(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=0$$

的通解.

6.(15 分)给定微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+8\frac{dy}{dx}+7y=q(x),$$

其中 $q(x)$ 在$[0,+\infty)$上连续,试利用常数变易法证明:

(1) 若 $q(x)$ 在$[0,+\infty)$上有界,则此方程的每一个解在$[0,+\infty)$上有界;

(2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}q(x)=0$,则对此方程的每一个解 $y(x)$ 都有 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$.

§9.1.2 期末试题套题(1)

1.(10 分) 证明方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}11 & -25\\ 4 & -9\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

不存在形如 $u_1e^{\lambda_1 t},u_2e^{\lambda_2 t}$的基本解组,这里 λ_1,λ_2是该方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

2.(15 分)求解初值问题

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \cos 2t \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.（15 分）设 $f(t)$ 是以 $\frac{\pi}{2}$ 为周期的连续周期函数. 对方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + x - y = f(t), \\ \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} - x - y = 0. \end{cases}$$

（1）求出它的通解表达式；

（2）求出它的以 $\frac{\pi}{2}$ 为周期的解.

4.（13 分）证明：方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2(x^3 + y^3) \end{cases}$$

的线性近似方程组的零解不稳定，但原方程组的零解是渐近稳定的.

5.（13 分）确定非线性微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - x(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4), \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \end{cases}$$

的极限环及其稳定性.

6.（14 分）对于微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = ax + by, \end{cases}$$

设 $a \neq b$，且 $(b+1)^2 \neq 4(b-a)$，$b \neq -1$.

（1）判断奇点(0,0)的类型；

（2）当 a,b 为何值时,零解渐近稳定？并证明:如果零解渐近稳定,则不存在极限环.

7.（每小题 10 分,共 20 分）求下列方程的通解及满足给定条件的解：

（1）$(z^2-2yz-y^2)u_x+(xy+xz)u_y+(xy-xz)u_z=0$；

（2）$\begin{cases} yz\dfrac{\partial z}{\partial x}+xz\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy, \\ x=a\text{ 时}, y^2+z^2=a^2. \end{cases}$

§9.1.3 期中试题套题(1)解答

1.（1）右端线性. 方程 $3y-7x+7=0, 3x-7y-3=0$ 有解 $x=1, y=0$. 取变换 $\tilde{x}=x-1, \tilde{y}=y$,方程化为齐次方程$\dfrac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}\tilde{x}}=\dfrac{3\tilde{y}-7\tilde{x}}{3\tilde{x}-7\tilde{y}}$.

再令 $\tilde{y}=u\tilde{x}, \mathrm{d}\tilde{y}=u\mathrm{d}\tilde{x}+\tilde{x}\mathrm{d}u$,有

$$u+\frac{\tilde{x}\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tilde{x}}=\frac{3u-7}{3-7u},\quad \frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\tilde{x}}=\frac{3-7u}{7u^2-7}\mathrm{d}u=-\frac{1}{7}\left(\frac{2}{u-1}+\frac{5}{u+1}\right)\mathrm{d}u,$$

积分得 $\tilde{x}^7(u-1)^2(u+1)^5=c$,解为

$$(x-1)^7\left(\frac{y}{x-1}-1\right)^2\left(\frac{y}{x-1}+1\right)^5=c,\quad (y-x+1)^2(y+x-1)^5=c.$$

（2）缺 y, y'. 令 $y''=p$,方程化为 $xp'-2p=0, \dfrac{\mathrm{d}p}{p}=2\dfrac{\mathrm{d}x}{x}, p=\tilde{c}x^2$. 于是

$$y''=p=\tilde{c}x^2, y'=\frac{\tilde{c}}{3}x^3+c_2,\quad y=\frac{\tilde{c}}{12}x^4+c_2x+c_3=c_1x^4+c_2x+c_3.$$

解为 $y=c_1x^4+c_2x+c_3$,其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数.

（3）齐次方程的特征方程 $\lambda^2-13\lambda+36=(\lambda-9)(\lambda-4)=0$ 有根 $\lambda=4, \lambda=9$. 方程右端属于Ⅱ型, $k=0, m=0$. 特解可设为 $\tilde{y}=a\cos 6x+b\sin 6x$,于是

$$\tilde{y}'=-6a\sin 6x+6b\cos 6x, \tilde{y}''=-36a\cos 6x-36b\sin 6x,$$

$$\frac{d^2\tilde{y}}{dx^2}-13\frac{d\tilde{y}}{dx}+36\tilde{y} = -13\times 6b\cos 6x+13\times 6a\sin 6x$$

$$=3\sin 6x,$$

$$-13\times 6b=0, 13\times 6a=3, b=0, a=\frac{1}{26}.$$

方程的通解为 $y=c_1\mathrm{e}^{4x}+c_2\mathrm{e}^{9x}+\frac{1}{26}\sin 6x$,其中 c_1,c_2为任意常数.

2. 见[书习题2.1-6]及[§2.4.3-6].

3. (1) 因$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2y+4x\neq 0$,方程不是恰当方程.

(2) 方程两边乘以 y^n后方程变为$(y^{n+2}+2xy^{n+1})dx-x^2y^n dy=0$,有$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=(n+2)(y^{n+1}+2xy^n)$,当取 $n=-2$ 时方程为恰当方程.

(3) 由(2)方程有积分因子 y^{-2}. 方程两边乘以 y^{-2},变为

$$(1+2xy^{-1})dx-x^2y^{-2}dy=0,$$

$$dx+\frac{dx^2}{y}+x^2 d\left(\frac{1}{y}\right)=d\left(x+\frac{x^2}{y}\right)=0, x+\frac{x^2}{y}=c.$$

方程有积分式 $xy+x^2=cy$,其中 c 为任意常数. 另有解 $y=0$.

4. 因方程右端在定义域 R 上有连续偏导数,初值亦在 R 内,且由初值条件有 $|x-0|\leqslant 1$, $|y-1|\leqslant 1$, $a=1$, $b=1$ 及 $M=\max\limits_{(x,y)\in R}|-x^2+y^2|=4$. 得解的存在区间 $|x|\leqslant\frac{b}{M}=\frac{1}{4}$.

因要满足初值条件,可令 $y_0(x)=1$,于是

$$y_1(x)=y_0+\int_0^x[-x^2+y_0^2(x)]dx=1+\int_0^x(-x^2+1)dx$$

$$=1+x-\frac{1}{3}x^3,$$

$$y_2(x)=y_0+\int_0^x[-x^2+y_1^2(x)]dx$$

$$=1+\int_0^x\left[-x^2+\left(1+x-\frac{1}{3}x^3\right)^2\right]dx$$

$$=1+\int_0^x\left(1+2x-\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}x^4+\frac{1}{9}x^6\right)dx$$

$$=1+x+x^2-\frac{1}{6}x^4-\frac{2}{15}x^5+\frac{1}{63}x^7.$$

即第二次近似解为 $y_2(x)=1+x+x^2-\frac{1}{6}x^4-\frac{2}{15}x^5+\frac{1}{63}x^7$.

由 $M=4$ 及 $L=\max\limits_{(x,y)\in R}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\leqslant\max\limits_{(x,y)\in R}|2y|=4$,且 h 取 $a=1$ 及 $\frac{b}{M}=\frac{1}{4}$中最小者即 $h=\frac{1}{4}$,可得在区间 $|x|\leqslant 1$ 内第二次近似解的误差估计为

$$|y(x)-y_2(x)|\leqslant\frac{ML^2}{3!}h^3=\frac{4\times4^2}{6}\times\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{6}.$$

5.(1)将 $y=e^{mx}$代入方程有

$$m^2e^{mx}+p_1(x)me^{mx}+p_2(x)e^{mx}=e^{mx}[m^2+mp_1(x)+p_2(x)]\equiv0.$$

故 $y=e^{mx}$是方程的解.

(2)方程化为$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x}{x-1}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x-1}y=0$. 试解

$$m^2-m\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x-1}=0,$$

$$m=\frac{x}{2(x-1)}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-4\frac{1}{x-1}}=\frac{x\pm(x-2)}{2(x-1)},$$

得 $m=1,\frac{1}{1-x}$. 仅 $m=1$ 为常数,方程有一解 $y_1=e^x$. 令 $y=y_1z=e^xz$,则有

$$y'=e^xz+e^xz',y''=e^xz+2e^xz'+e^xz''.$$

代入方程得

$$e^xz+2e^xz'+e^xz''-\frac{x}{x-1}(e^xz+e^xz')+\frac{1}{x-1}e^xz=0,$$

$$z''+\left(2-\frac{x}{x-1}\right)z'=0.$$

再令 $z'=u$，代入可得

$$u'+\left(2-\frac{x}{x-1}\right)u=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{u}=-\frac{x-2}{x-1}\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{x-1}-1\right)\mathrm{d}x,\ln|u|=\ln|x-1|-x.$$

即 $u=(x-1)\mathrm{e}^{-x}$，$z'=x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}$，$z=(-x-1)\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}=-x\mathrm{e}^{-x}$. 变回 y，最后得特解 $y_2=-x$. 两解线性无关，方程的通解为 $y=c_1x+c_2\mathrm{e}^{x}$，其中 c_1,c_2为任意常数.

6. 见[书习题5.2-13]及[§5.4.4-13].

§9.1.4 期末试题套题(1)解答

1. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程$(\lambda-11)(\lambda+9)+100=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2=0$，有 2 重根 $\lambda_1=\lambda_2=1$，故 $u_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t},u_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$线性相关，不能是基本解组.

2. 齐次方程的特征方程

$$\begin{bmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ -2 & \lambda-1 & 2\\ -3 & -2 & \lambda-1\end{bmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+5)=0$$

有根 $\lambda_1=1$，$\lambda_{2,3}=1\pm2\mathrm{i}$. $\lambda_1=1$ 的特征向量 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$满足

$$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0&0&0\\-2&0&2\\-3&-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-2u_1+2u_3\\-3u_1-2u_2\end{bmatrix}=\mathbf{0}.$$

有解 $\boldsymbol{u}=\alpha\begin{bmatrix}2\\-3\\2\end{bmatrix}$. 同样，$\lambda_{2,3}=1\pm2\mathrm{i}$ 有特征向量$\boldsymbol{v}=\beta\begin{bmatrix}0\\1\\\mp\mathrm{i}\end{bmatrix}$，其中 $\alpha\neq0,\beta\neq0$ 为任意常数.

方程有基解矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} 2e^{t} & 0 & 0 \\ -3e^{t} & \frac{1}{2}[e^{(1+2i)t}+e^{(1-2i)t}] & \frac{1}{2}(ie^{(1+2i)t}-ie^{(1-2i)t}) \\ 2e^{t} & \frac{1}{2}[-ie^{(1+2i)t}+ie^{(1-2i)t}] & \frac{1}{2}[e^{(1-2i)t}+e^{(1+2i)t}] \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2e^{t} & 0 & 0 \\ -3e^{t} & e^{t}\cos 2t & -e^{t}\sin 2t \\ 2e^{t} & e^{t}\sin 2t & e^{t}\cos 2t \end{bmatrix}.$$

由

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\frac{1}{\det \boldsymbol{\Phi}(0)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

得

$$\exp(\boldsymbol{A}t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)$$

$$=e^{t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cos 2t+\sin 2t & \cos 2t & -\sin 2t \\ 1+\frac{3}{2}\sin 2t-\cos 2t & \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}.$$

利用非齐次方程的常数变易公式

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=[\exp(t\boldsymbol{A})]\boldsymbol{\eta}+\int_0^t \exp[(t-s)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{f}(s)\,ds,$$

得

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=[\exp(t\boldsymbol{A})]\boldsymbol{\eta}+$$

$$\int_0^t e^{t-s}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & \cos 2(t-s) & -\sin 2(t-s) \\ * & \sin 2(t-s) & \cos 2(t-s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{s}\cos 2s \end{bmatrix}ds$$

$$= e^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cos 2t+\sin 2t & \cos 2t & -\sin 2t \\ 1+\frac{3}{2}\sin 2t-\cos 2t & \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}\boldsymbol{\eta}+$$

$$e^t \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{8}[-2\cos 2t\sin^2(2t)-\sin 2t(4t+\sin 4t)] \\ \frac{1}{8}[\cos 2t(4t+\sin 4t)+2\sin^3(2t)] \end{bmatrix}.$$

3. 令 $u=x+y, v=x-y$,方程变为

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+v=f(t), \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-u=0. \end{cases}$$

进一步化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2}+v=f(t).$$

齐次方程的特征方程 $\lambda^2+1=0$ 有根 $\lambda=\pm\mathrm{i}$,基解组为 $v_1=\cos t$, $v_2=\sin t$. 由常数变易公式得通解

$$v(t)=c_1 v_1(t)+c_2 v_2(t)+\int_0^t \frac{v_2(t)v_1(s)-v_1(t)v_2(s)}{W[v_1(s),v_2(s)]}f(s)\mathrm{d}s$$

$$=c_1\cos t+c_2\sin t+\int_0^t(\sin t\cos s-\cos t\sin s)f(s)\mathrm{d}s.$$

而

$$u(t)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$=-c_1\sin t+c_2\cos t+\int_0^t(\cos t\cos s+\sin t\sin s)f(s)\mathrm{d}s.$$

(1) 方程的通解表达式为

$$x(t)=\frac{1}{2}(u+v)$$

$$=\frac{1}{2}[(c_1+c_2)\cos t+(c_2-c_1)\sin t+$$

$$\int_0^t[(\cos t+\sin t)\cos s+(\sin t-\cos t)\sin s]f(s)\mathrm{d}s],$$

$$y(t)=\frac{1}{2}(u-v)$$

$$=\frac{1}{2}[(c_2-c_1)\cos t-(c_1+c_2)\sin t+$$

$$\int_0^t[(\cos t-\sin t)\cos s+(\sin t+\cos t)\sin s]f(s)\mathrm{d}s],$$

其中 c_1,c_2为任意常数（亦可令 $\tilde{c}_1=\frac{1}{2}(c_1+c_2),\tilde{c}_2=\frac{1}{2}(c_2-c_1)$再简化之）.

（2）它的以$\frac{\pi}{2}$为周期的解应有 $x\left(\frac{\pi}{2}\right)=x(0),y\left(\frac{\pi}{2}\right)=y(0)$，即

$$\begin{cases}(c_2-c_1)+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos s+\sin s)f(s)\mathrm{d}s=c_1+c_2,\\-(c_1+c_2)+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos s+\sin s)f(s)\mathrm{d}s=c_2-c_1.\end{cases}$$

由此得

$$c_1=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos s+\sin s)f(s)\mathrm{d}s,$$

$$c_2=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos s+\sin s)f(s)\mathrm{d}s.$$

于是

$$x(t)=\frac{1}{2}\left[\cos t\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin sf(s)\mathrm{d}s-\sin t\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos sf(s)\mathrm{d}s+\right.$$

$$\left.\int_0^t[(\cos t+\sin t)\cos s+(\sin t-\cos t)\sin s]f(s)\mathrm{d}s\right],$$

$$y(t)=\frac{1}{2}\Big[-\cos t\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos sf(s)\,\mathrm{d}s-\sin t\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin sf(s)\,\mathrm{d}s+$$

$$\int_0^t[(\cos t-\sin t)\cos s+(\sin t+\cos t)\sin s]f(s)\,\mathrm{d}s\Big].$$

4. 线性近似方程组为$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$. 有重零特征值,解为 $x=ct,y=c$. 零解不稳定. 对原方程组,取定正 V 函数为 $V=x^4+y^2$,则 $V'=4yx^3-4x^6-4yx^3-4y^4=-4(x^6+y^4)$定负,零解渐近稳定.

5. 取极坐标 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,方程组 $\dot{x}=X,\dot{y}=Y$ 化为

$$\dot{r}=X\cos\theta+Y\sin\theta,r\dot{\theta}=-X\sin\theta+Y\cos\theta.$$

即原方程为

$$\begin{aligned}\dot{r}&=[-y-x(r^2-1)(r^2-4)]\cos\theta+[x-y(r^2-1)(r^2-4)]\sin\theta\\&=-r(r^2-1)(r^2-4),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r\dot{\theta}&=-[-y-x(r^2-1)(r^2-4)]\sin\theta+\\&\quad[x-y(r^2-1)(r^2-4)]\cos\theta=r,\qquad \dot{\theta}=1.\end{aligned}$$

于是方程组有平衡解 $r=0,\theta=t;r=1,\theta=t$ 和 $r=2,\theta=t$. 且

当 $r>2$,有 $\dot{r}<0$,因此,若 $r(t_0)>2$,则 $\theta(t)=t\to+\infty$ 时 $r(t)\to2$;

当 $2>r>1$,有 $\dot{r}>0$,因此,若 $2>r(t_0)>1$,则 $\theta(t)=t\to+\infty$ 时 $r(t)\to2$;

当 $1>r>0$,有 $\dot{r}<0$,因此,若 $1>r(t_0)>0$,则 $\theta(t)=t\to+\infty$ 时有 $r(t)\to0$.

即极限环 $x^2+y^2=4$ 稳定;极限环 $x^2+y^2=1$ 不稳定;奇点(0,0)渐近稳定.

6. 由条件知,线性奇点有

$$p=-(b+1)\neq0,q=b-a\neq0,$$

$$\Delta=p^2-4q=(b+1)^2-4(b-a)\neq0.$$

因此

(1) 奇点(0,0)当 $a>b$ 时为鞍点;当 $a<b,\Delta>0$ 时为结点;

当 $a<b,\Delta<0$ 时为焦点.

（2）当 $p>0,q>0$ 即 $a<b<-1$ 时零解渐近稳定. 由于线性方程组有特征值 $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}(-p\pm\sqrt{\Delta})$，方程组有通解 $x(t)=c_{11}e^{\lambda_1 t}+c_{12}e^{\lambda_2 t}$，$y=c_{21}e^{\lambda_1 t}+c_{22}e^{\lambda_2 t}$. 若零解渐近稳定，则有 $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2}<0$. 在全相平面 Oxy 上当 $t\to\infty$ 时轨线 $(x(t),y(t))\to(0,0)$，不可能存在周期解，更不可能存在极限环.

7.（1）见[书 §7 习题 2(2)]及[§7.4.3－2(2)].

（2）特征方程为 $\frac{dx}{yz}=\frac{dy}{xz}=\frac{dz}{xy}$. 有首次积分 $\frac{dx}{yz}=\frac{dy}{xz}$，$ydy=xdx$，$y^2-x^2=c_1$ 和 $\frac{dx}{yz}=\frac{dz}{xy}$，$zdz=xdx$，$z^2-x^2=c_2$. 它们线性无关，因此，方程的通解为 $\Phi(c_1,c_2)=\Phi(y^2-x^2,z^2-x^2)=0$. 由方程条件知有

$$y^2+z^2=c_1+c_2+2a^2=a^2,c_1+c_2+a^2=0,$$

即应有关系式

$$y^2+z^2-2x^2+a^2=0.$$

§9.2　期中、期末试题套题(2)

§9.2.1　期中试题套题(2)

一、计算题

1.（24 分）求下列微分方程的通解：

（1）$xy'-y\ln y=0$；

（2）$ydx+(x^2-4x)dy=0$；

（3）$xy'-y-\sqrt{x^2-y^2}=0$；

（4）$(x+y)dx+(3y+3x-4)dy=0$；

（5）$(x-2)y'=y+2(x-2)^3$；

（6）$(y^2-6x)y'+2y=0$；

(7) $xy'' + y' = 0$;

(8) $y'' = (y')^3 + y'$.

2. (24 分)求下列微分方程满足初值条件的特解:

(1) $y'' + (y')^2 = 1, y(0) = 0, y'(0) = 0$;

(2) $y'' - 10y' + 9y = e^{2x}, y(0) = \frac{6}{7}, y'(0) = \frac{33}{7}$;

(3) $xy' + y = 2\sqrt{xy}, y(1) = 1$;

(4) $2y'' - \sin 2y = 0, y(0) = \frac{\pi}{2}, y'(0) = 1$;

(5) $(1-x)y' - y = 1 + x, y(0) = 0$;

(6) $y^3 y'' + 1 = 0, y(1) = 1, y'(1) = 0$.

3. (6 分)设可导函数 $\varphi(x)$ 满足 $\varphi(x)\cos x + 2\int_0^x \varphi(t)\sin t\,dt = x + 1$,求 $\varphi(x)$.

二、证明题

1. (6 分)试证 $y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln|x|$ 是方程 $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$ 的通解.

2. (10 分)设 $f(x,y)$ 和 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 在区域 G 内连续,(x_0, y_0) 是区域 G 内的点,$y = \varphi(x, x_0, y_0)$ 是微分方程 $y' = f(x,y)$ 满足初值条件 $y(x_0) = y_0$ 的解,试证 $\frac{\partial \varphi(x, x_0, y_0)}{\partial x_0}$ 和 $\frac{\partial \varphi(x, x_0, y_0)}{\partial y_0}$ 在区域 G 内存在且连续.

3. (10 分)设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个解,记 $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$,则 $W(x) = W(x_0)\exp\left[-\int_{x_0}^x p(t)\,dt\right]$.

三、应用题

1. (10 分)设河边点 O 的正对岸为点 A,河宽 $OA = h$,两岸为

平行直线，水流速度为 a，有一只鸭子从点 A 游向点 O，鸭子在静水中的游速为 b，$b>a$，假定鸭子游动方向始终朝着点 O，试求鸭子游过的轨迹方程.

2. (10 分)设有一条均匀、柔软的绳子，两端固定，绳子仅受重力作用而下垂，试问该绳子在平衡状态下显现出一条什么样的曲线？

§9.2.2 期末试题套题(2)

一、是非题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}x\sin y$ 通过原点的解只有一个.

2. 方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{2}$ 通过原点的解的最大存在区间为 $-2<x<2$.

3. 若函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续而且关于 y 满足利普希茨条件，$(x_0,y_0)\in G$，则常微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 满足初值条件 $y(x_0)=y_0$ 的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 作为 x,x_0,y_0 的函数在它的存在范围内是连续可微的.

4. 常微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}(x-5)$ 有形如 $y=x^2(A+Bx)$ 的特解，其中 A 和 B 为常数.

5. 常微分方程 $\frac{dy}{dx}=3y-y^2$ 的特解 $y=3$ 是渐近稳定的.

6. 若二阶线性驻定方程组对应的特征方程有纯虚根，则其奇点必为中心.

7. 设 $\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=C_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 是方程组 $\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n}$ 的 $n-1$ 个首次积分，则 $\sum_{i=1}^{n}X_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}=0$ 的通解可表示为 $u=\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})$，其中 $C_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 为常数，$\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})$ 为其变元的任意连续可微函数.

8. 偏微分方程 $y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=x^2-y^2$ 的通解可表示为 $\Phi(x^2+y^2,xy+u)=0$,其中 $\Phi(\varphi_1,\varphi_2)$ 是其变元的任意连续可微函数.

9. 偏微分方程 $y\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial y}-xy=0$ 的特征方程为 $\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{u}=\frac{\mathrm{d}u}{-xy}$.

10. $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2y+y^2,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+y+x^2\end{cases}$ 的零解的稳定性态与 $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2y,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+y\end{cases}$ 的零解的稳定性态一致.

二、计算题(每小题 10 分,共 40 分)

1. 试求 $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}y=\frac{\mathrm{e}^{2-x}}{x},\\ y(2)=\frac{1}{2}\end{cases}$ 的解.

2. 试求 $\begin{cases}y^3y''+1=0,\\ y(1)=1,y'(1)=1\end{cases}$ 的解.

3. 试求 $(y+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z+x)\frac{\partial z}{\partial y}=x+y$ 的通解.

4. 试求 $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2y,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x\end{cases}$ 的通解.

三、证明题(每小题 15 分,共 30 分)

1. 试证方程组 $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y^2-x^3,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-yx^3\mathrm{e}^x\end{cases}$ 的零解是渐近稳定的.

2. 设 $X_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ (i=1,2,\cdots,n-1)$ 和 $f(x_1,x_2,\cdots,$

x_{n-1})都是连续可微函数,且 $X_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$. 试证柯西问题

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=0,\\ u\big|_{x_n=x_n^0}=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{cases}$$ 存在唯一解,其中 x_n^0 为任意给定的数.

§9.2.3 期中试题套题(2)解答

一、1. (1) 分离变量得 $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y\ln y}=\dfrac{d(\ln y)}{\ln y}$,积分得 $\ln(\ln y)=\ln x+\tilde{c}$, $\ln y=\tilde{c}x$, $y=ce^x$. 另有解 $y=1$.

(2) $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{x(4-x)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{4-x}\right)dx$, 积分得 $\ln|y|=\dfrac{1}{4}(\ln|x|-\ln|4-x|)+\tilde{c}$, $y^4=\dfrac{cx}{4-x}$. 还有解 $x=0$, $x=4$ 和 $y=0$,其中 $y=0$ 含于通解中.

(3) 方程两边同除以 x 可化为 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}-\operatorname{sgn}(x)\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=0$,是齐次方程,可作变换 $y=ux$,因 $\dfrac{dy}{dx}=x\dfrac{du}{dx}+u$,方程变为 $x\dfrac{du}{dx}-\operatorname{sgn}(x)\sqrt{1-u^2}=0$,分离变量得 $\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\operatorname{sgn}(x)\dfrac{dx}{x}$. 积分得 $\arcsin u-\operatorname{sgn}(x)\ln|x|=c$. 原方程的解为 $\arcsin\dfrac{y}{x}-\operatorname{sgn}(x)\ln|x|=c$,其中 c 为任意常数. 另外, $u^2=1$ 亦为方程的解,即原方程还有解 $y=\pm x$.

(4) 令 $x+y=u$,方程化为 $u(du-dy)+(3u-4)dy=0$, $udu+2(u-2)dy=0$. 于是

$$2dy=\frac{udu}{2-u}=\left(\frac{2}{2-u}-1\right)du,$$

积分得

$$2y = -2\ln|2-u| - u + \tilde{c},\ (2-u)^2 = ce^{-(2y+u)}.$$

通解为$(2-x-y)^2 = ce^{-(x+3y)}$. 由 $u=2$ 产生的 $x+y=2$ 也是解,但已包含在通解中.

(5) 方程化为$y' = \dfrac{y}{x-2} + 2(x-2)^2$,为非齐次线性方程,有解

$$y = e^{\int\frac{1}{x-2}dx}\left[\int 2(x-2)^{2-1}dx + c\right] = (x-2)(x^2-4x+c).$$

(6) 方程化为$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{3x}{y} - \dfrac{y}{2}$,为 x 的非齐次线性方程,有解

$$x = e^{\int\frac{3}{y}dy}\left(-\int \frac{1}{2}y^{1-3}dy + c\right) = y^3\left(\frac{1}{2y} + c\right) = \frac{1}{2}y^2 + cy^3.$$

还有解 $y=0$.

(7) 令 $z=y'$,方程化为 $xz'+z=0$,即$\dfrac{dz}{z} = -\dfrac{dx}{x}$,积分得 $zx = c_1$. 于是 $y' = \dfrac{c_1}{x}$有解 $y = c_1\ln|x| + c_2$.

(8) 令 $z=y'$,方程化为 $z' = z^3 + z$. 有 $dx = \dfrac{dz}{z(z^2+1)} = \left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{z}{z^2+1}\right)dz$,积分得

$$x + \tilde{c} = \ln|z| - \frac{1}{2}\ln(z^2+1),\ \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} = ce^x,$$

$$\frac{z^2}{z^2+1} = c^2e^{2x},\ z^2 = \frac{c^2e^{2x}}{1-c^2e^{2x}},\ z = \pm\frac{ce^x}{\sqrt{1-c^2e^{2x}}}.$$

于是 $y' = \pm\dfrac{ce^x}{\sqrt{1-c^2e^{2x}}}$,$y = \pm\displaystyle\int\frac{d(ce^x)}{\sqrt{1-c^2e^{2x}}} = \pm\arcsin(ce^x) + \tilde{c}$. 还有解 $y'=0$,$y=c$,已在其中.

2. (1) 令 $z=y'$,方程化为 $z'+z^2=1$. 有 $dx = \dfrac{dz}{1-z^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z+1} - \dfrac{1}{z-1}\right)dz$,积分得 $2x + \tilde{c} = \ln\dfrac{z+1}{z-1}$,$\dfrac{z+1}{z-1} = ce^{2x}$. 由初值条

件得 $c=-1$，从而有$\frac{z+1}{z-1}=-e^{2x}$，$z=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. 即 $y'=\frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}$，再积分有 $y=\ln(\text{ch } x)+\tilde{c}$. 再利用初值条件得 $\tilde{c}=0$. 特解为 $y=\ln(\text{ch } x)$.

(2) 特征方程 $\lambda^2-10\lambda+9=(\lambda-9)(\lambda-1)=0$ 有特征根 $\lambda=9$，$\lambda=1$. 设特解为 $y=ae^{2x}$. 代入有 $4a-20a+9=1$，$a=\frac{1}{2}$. 方程的通解为 $y=be^{9x}+ce^{x}+\frac{1}{2}e^{2x}$. 代入初值条件，有 $b+c+\frac{1}{2}=\frac{6}{7}$，$9b+c+1=\frac{33}{7}$. 解得 $8b=\frac{47}{14}$，$b=\frac{47}{112}$；$c=\frac{5}{14}-b=-\frac{7}{112}$. 特解为 $y=\frac{47}{112}e^{9x}-\frac{7}{112}e^{x}+\frac{1}{2}e^{2x}$.

(3) 设 $z=xy$，方程化为 $z'=xy'+y=2\sqrt{z}$，$\frac{dz}{2\sqrt{z}}=dx$，积分得 $\sqrt{z}=x+c$，解为 $\sqrt{xy}=x+c$. 代入初值条件，有 $c=0$. 特解为 $\sqrt{xy}=x$，$y=x$.

(4) 令 $z=y'$，$y''=z'=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=z\frac{dz}{dy}$. 方程化为 $2z\frac{dz}{dy}-\sin 2y=0$，$2z dz=(\sin 2y)dy$，可积分得 $z^2=-\frac{1}{2}\cos 2y+c$，由初值条件有 $c=\frac{1}{2}$. 即 $z^2=\frac{1}{2}(1-\cos 2y)=\sin^2 y$，$z=\pm\sin y$，由初值条件知应取 $z=\sin y$，$y'=\sin y$，$\frac{dy}{\sin y}=dx$，再积分得 $\ln\left|\tan\frac{y}{2}\right|=x+\tilde{c}$，$\tan\frac{y}{2}=\bar{c}e^{x}$. 由初值条件有 $\bar{c}=\tan\frac{\pi}{4}=1$. 特解为 $\tan\frac{y}{2}=e^{x}$.

(5) 方程化为 $y'=\frac{1}{1-x}y+\frac{1+x}{1-x}$，为线性方程. 有解

$$y=e^{\int\frac{1}{1-x}dx}\left[\int\frac{1+x}{1-x}\cdot(x-1)dx+c\right]=\frac{1}{1-x}\left(x+\frac{1}{2}x^2+c\right).$$

由初值条件有 $c=0$. 特解为 $y=\frac{x(2+x)}{2(1-x)}$.

(6) 令 $z=y'$, $y''=z'=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$. 方程化为 $y^3z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+1=0$, $z\mathrm{d}z=-\frac{\mathrm{d}y}{y^3}$, 可积分得 $z^2=y^{-2}+c$. 由初值条件有 $c=-1$, 解为 $y'=z=\pm\sqrt{y^{-2}-1}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^{-2}-1}}=\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\pm\mathrm{d}x$, 再积分得 $\sqrt{1-y^2}=\mp 2x+\tilde{c}$. 再由初值条件有 $\tilde{c}=\pm 2$. 特解为 $\sqrt{1-y^2}=\pm 2(1-x)$, $y^2=1-4(1-x)^2$, 即 $y=\pm\sqrt{1-4(1-x)^2}$.

3. 等式两边对 x 取导数, 有 $\varphi'\cos x-\varphi\sin x+2\varphi\sin x=1$, 即 $\varphi'=-\varphi\tan x+\frac{1}{\cos x}$. 由线性方程求解公式

$$\varphi = \mathrm{e}^{-\int\tan x\mathrm{d}x}\left(\int\frac{1}{\cos x}\cdot\cos^{-1}x\mathrm{d}x+c\right)$$

$$=\cos x(\tan x+c)=\sin x+c\cos x$$

得 $\varphi(x)=\sin x+c\cos x$, 其中 c 为任意常数.

二、1. 对 $y=x^2$ 有 $y'=2x$, $y''=2$, $x^2y''-3xy'+4y=2x^2-6x^2+4x^2\equiv 0$. 而对 $y=x^2\ln|x|$, 也有 $y'=2x\ln|x|+x$, $y''=2\ln|x|+3$, $x^2y''-3xy'+4y\equiv 0$. 均是方程的解. 且它们之比不是常数, 它们线性无关. 故方程的通解为 $y=c_1x^2+c_2x^2\ln x$.

2. 见[书 §3.3.3]解对初值的可微性定理的证明.

3. 可参考[书习题 4.1－6]. 直接证明为:

$$W'(x)=\begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1''(x) & y_2''(x)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ -p(x)y_1'-q(x)y_1(x) & -p(x)y_2'-q(x)y_2(x)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ -p(x)y_1' & -p(x)y_2'\end{vmatrix}$$

$$=-p(x)\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=-p(x)W(x).$$

可解得 $W(x)=W(x_0)\exp\left[-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t\right]$.

三、1. 直角坐标系 Oxy 中点 O 为原点，点 A 为 $(0,h)$，鸭子游动时坐标为 (x,y). 鸭子游动时水流拖慢了鸭子的速度，而鸭子游动方向始终朝着点 O. 于是鸭子在 x,y 方向上的运动速度分别为 $x'=a-\dfrac{bx}{\sqrt{x^2+y^2}}, y'=-\dfrac{by}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 初值条件为 $x(0)=0, y(0)=h$. 解方程，令 $x=uy, \mathrm{d}x=u\mathrm{d}y+y\mathrm{d}u$，有

$$y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-u=\frac{a\sqrt{x^2+y^2}-bx}{by}-u=-\frac{a}{b}\sqrt{u^2+1},$$

$$\frac{a}{b}\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+1}},$$

$$\frac{a}{b}\ln|y|=-\ln(u+\sqrt{u^2+1})+\tilde{c}, y^a(u+\sqrt{u^2+1})^b=c.$$

解为 $x+\sqrt{x^2+y^2}=cy^{\frac{b-a}{b}}$ 代入初值条件得 $c=h^{\frac{a}{b}}$. 鸭子游动曲线为

$$x+\sqrt{x^2+y^2}=h^{\frac{a}{b}}y^{\frac{b-a}{b}}.$$

2. 绳子为悬链线，见[§4.3.3 – (2), §4.4.2 – 4(2)]. 悬链线方程为 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\omega}{H}\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$，解为 $y=\dfrac{H}{\omega}\mathrm{ch}\left(\dfrac{\omega}{H}x\right)$.

§9.2.4 期末试题套题(2)解答

一、1. × (原点为奇点).

2. × ($-\infty<x<+\infty$).

3. × (对 y_0 不一定可微).

4. × (应为 $x^2\mathrm{e}^{-x}(A+Bx)$).

5. √ (令 $\tilde{y}=y-3$ 后，$\tilde{y}'=-3\tilde{y}-\tilde{y}^2$).

6. √ (为共轭虚根).

7. × (还要求 φ_i 相互独立).

8. √ (独立首次积分).

9. × $\left(应为\frac{dx}{y}=\frac{dy}{u}=\frac{du}{xy}\right)$.

10. √（无零实部特征值）.

二、1. 线性方程，有 $y = e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int e^{2-x}dx + c\right) = \frac{1}{x}(c - e^{2-x})$.

由初值条件有 $c = 2$. 解为 $y = \frac{1}{x}(2 - e^{2-x})$.

2. 令 $z = y', y'' = z' = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}$. 方程化为 $y^3 z\frac{dz}{dy} + 1 = 0$,

$zdz = -\frac{dy}{y^3}$，可积分得 $z^2 = y^{-2} + c$. 由初值条件有 $c=0$，即有

$$z^2 = \frac{1}{y^2}, y' = z = \pm\frac{1}{y}, y^2 = \pm 2x + \tilde{c}$$

再由初值条件得 $\tilde{c} = -1, \tilde{c} = 3$，解为 $y^2 = 2x - 1, y^2 = -2x + 3$.

3. 参看[书习题 7－2(8)]. 特征方程为$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{z+x} = \frac{dz}{x+y}$,

有

$$\frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)} = \frac{d(x-y)}{y-x} = \frac{d(y-z)}{z-y} = \frac{d(z-x)}{x-z}.$$

得首次积分 $(x-y)^2(x+y+z) = c_1, \frac{x-y}{z-x} = c_2$. 它们线性无关，故方程的通解为 $\Phi\left((x-y)^2(x+y+z), \frac{x-y}{z-x}\right) = 0$，其中 Φ 为变元的任意连续可微函数.

4. **解 1** 方程化为$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dy}{dt} = -2x$. 对应的特征方程 $\lambda^2 + 2 = 0$ 有特征根 $\lambda = \pm\sqrt{2}i$，方程有通解 $x = c_1\cos\sqrt{2}t + c_2\sin\sqrt{2}t$. 进而由第 1 个方程有 $y = \frac{1}{2}\frac{dx}{dt} = -\frac{\sqrt{2}}{2}c_1\sin\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}c_2\cos\sqrt{2}t = \tilde{c}_1\sin\sqrt{2}t + \tilde{c}_2\cos\sqrt{2}t$，其中 $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ 为任意常数.

解 2　方程化为$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-2x$. 令$z=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$,有$z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-2x$. 解得$z\mathrm{d}z=-2x\mathrm{d}x,z^2=-2x^2+\bar{c}^2$,即$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=z=\sqrt{\bar{c}^2-2x^2},\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\bar{c}^2-2x^2}}=\mathrm{d}t$, 积分得$\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}x}{\bar{c}}=t+\tilde{c}$, $x=2c_1\sin(\sqrt{2}t+c_2)$,而$y=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sqrt{2}c_1\cos(\sqrt{2}t+c_2)$.

解 3　方程可化为$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{2y}{-x},2y\mathrm{d}y=-x\mathrm{d}x$,解为$2y^2+x^2=c_1^2$,代入方程有$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sqrt{2}\sqrt{c_1^2-x^2},\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{c_1^2-x^2}}=\sqrt{2}\mathrm{d}t,\arcsin\frac{x}{c_1}=\sqrt{2}t+c_2$, $x=c_1\sin(\sqrt{2}t+c_2)$. 而对y又有$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x=-c_1\sin(\sqrt{2}t+c_2)$, $y=\frac{c_1}{\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}t+c_2)$.

三、1. 取定正函数$V=x^4+2y^2$,有$V'=-4x^6-4y^2x^3(\mathrm{e}^x-1)$. 由$x^3(\mathrm{e}^x-1)=x^4+\frac{x^5}{2}+\cdots$知在原点邻域$V'\leqslant 0$,$V'$常负,且$V'=0$为$y$轴$x=0$,它不含方程的整条轨线,故方程的零解是渐近稳定的.

2. 见[书§7.5-定理5]的证明.

§9.3　考研试题套题(1)

§9.3.1　考研试题套题(1)

1. 求下列方程的通解:

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^4+2y^4}{xy^3}$;

(2) $(y^2-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$.

2. 求微分方程

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}(x-5)$$

的通解,这里 $y = y(x)$.

3. 求方程组 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵,其中 $\boldsymbol{x}$ 为三维列向量,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. 求下列方程组的奇点,并判别其类型(即指出是焦点、结点、鞍点或者中心)和稳定性.

(1) $x' = x, y' = -y$;

(2) $x' = -4x - y - 2, y' = 2x - y + 4$.

5. 设 $p(x), q(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数, $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (*)$$

的两个线性无关的解. 证明:

(1) 方程(*)的系数 $p(x), q(x)$ 由 $y_1(x), y_2(x)$ 唯一确定;

(2) $y_1(x), y_2(x)$ 没有共同的零点.

§9.3.2 考研试题套题(1)解答

1. (1) **解 1** 化为线性非齐次方程 $\frac{d(y^4)}{dx} = \frac{4(x^4 + 2y^4)}{x} = \frac{8}{x}y^4 + 4x^3$. 解为

$$y^4 = e^{\int \frac{8}{x}dx}\left(\int 4x^3 x^{-8}dx + c\right) = x^8(-x^{-4} + c) = -x^4 + cx^8.$$

即 $x^4 + y^4 = cx^8$,其中 c 为任意正常数.

解 2 右端齐次,令 $y = ux, \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$,得

$$x\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} - u = \frac{x^4 + 2y^4}{xy^3} - u = \frac{1 + 2u^4}{u^3} - u = \frac{1 + u^4}{u^3}, \frac{u^3 du}{1 + u^4} = \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{4}\ln|1+u^4| = \ln|x| + \tilde{c}, 1+u^4 = cx^4, x^4+y^4 = cx^8.$$

解为 $x^4+y^4=cx^8$,其中 c 为任意正常数.

(2) 分离变量得 $\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y(1-y)}=\frac{\mathrm{d}y}{y}+\frac{\mathrm{d}y}{1-y}$,积分得 $\ln\left|\frac{y}{y-1}\right| = \ln|x|+\tilde{c}$, $\frac{y}{y-1}=cx$. 通解为 $y=cx(y-1)$,其中 c 为任意常数. 另还有解 $y=1, y=0, x=0$. 而 $y=0$ 已含于通解中.

2. 此为常系数线性非齐次方程. 特征方程为 $\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=(\lambda+1)^3=0$,有 3 重根 $\lambda=-1$. 齐次方程有通解 $y=c_1\mathrm{e}^{-x}+c_2x\mathrm{e}^{-x}+c_3x^2\mathrm{e}^{-x}$. 由非齐次项形式,知非齐次方程有形如 $y=x^3(B_0+B_1x)\mathrm{e}^{-x}$的特解. 因

$$\begin{aligned}
y' &= [(3x^2-x^3)B_0+(4x^3-x^4)B_1]\mathrm{e}^{-x} \\
&= [3B_0x^2+(-B_0+4B_1)x^3-B_1x^4]\mathrm{e}^{-x}, \\
y'' &= [6B_0x-3B_0x^2+3(-B_0+4B_1)x^2- \\
&\quad (-B_0+4B_1)x^3-4B_1x^3+B_1x^4]\mathrm{e}^{-x} \\
&= [6B_0x+(-6B_0+12B_1)x^2+(B_0-8B_1)x^3+B_1x^4]\mathrm{e}^{-x}, \\
y''' &= [6B_0-6B_0x+2(-6B_0+12B_1)x-(-6B_0+12B_1)x^2+ \\
&\quad 3(B_0-8B_1)x^2-(B_0-8B_1)x^3+4B_1x^3-B_1x^4]\mathrm{e}^{-x} \\
&= [6B_0+(-18B_0+24B_1)x+(9B_0-36B_1)x^2+ \\
&\quad (-B_0+12B_1)x^3-B_1x^4]\mathrm{e}^{-x},
\end{aligned}$$

代入方程后得

$$(6B_0+24B_1x)\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}(x-5).$$

比较系数有 $6B_0=-5, B_0=-\frac{5}{6}$及 $24B_1=1, B_1=\frac{1}{24}$. 即特解为$y=x^3\left(\frac{1}{24}x-\frac{5}{6}\right)\mathrm{e}^{-x}$. 方程的通解为

$$y=c_1\mathrm{e}^{-x}+c_2x\mathrm{e}^{-x}+c_3x^2\mathrm{e}^{-x}+x^3\left(\frac{1}{24}x-\frac{5}{6}\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

3. $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 2\\ -4 & \lambda-1 & 0\\ -2 & -1 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)^2.$$

有特征值 $\lambda=1$ 及 2 重特征值 $\lambda=-1$. 需考虑方程组

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} \text{ 和 } (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}.$$

对

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -2\\ 4 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}-2u_1+u_2-2u_3\\ 4u_1\\ 2u_1+u_2-2u_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

有解 $\boldsymbol{u}=(0,2\alpha,\alpha)^{\mathrm{T}}$. 对

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 4 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}^2\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 8 & 8 & -8\\ 4 & 4 & -4\end{bmatrix}\boldsymbol{v}$$

$$=\begin{bmatrix}0\\ 8v_1+8v_2-8v_3\\ 4v_1+4v_2-4v_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

有解 $\boldsymbol{v}=(\beta,\gamma,\beta+\gamma)^{\mathrm{T}}$. 其中 α,β,γ 为任意常数.

取初值向量为 $\boldsymbol{\eta}$, 有 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$,

$$\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta\\ 2\alpha+\gamma\\ \alpha+\beta+\gamma\end{bmatrix},$$

解得

$$\beta=\eta_1,\alpha=\eta_2-\eta_3+\eta_1,\gamma=2\eta_3-\eta_2-2\eta_1.$$

即

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0\\ 2\eta_2-2\eta_3+2\eta_1\\ \eta_2-\eta_3+\eta_1\end{bmatrix},\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}\eta_1\\ 2\eta_3-\eta_2-2\eta_1\\ 2\eta_3-\eta_2-\eta_1\end{bmatrix}.$$

解为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= e^{t}\boldsymbol{E}\boldsymbol{u} + e^{-t}[\boldsymbol{E} + t(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})]\boldsymbol{v} \\
&= e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ 2\eta_2 - 2\eta_3 + 2\eta_1 \\ \eta_2 - \eta_3 + \eta_1 \end{bmatrix} + e^{-t}\left[\boldsymbol{E} + t\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} \eta_1 \\ 2\eta_3 - \eta_2 - 2\eta_1 \\ 2\eta_3 - \eta_2 - \eta_1 \end{bmatrix} \\
&= e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ 2\eta_2 - 2\eta_3 + 2\eta_1 \\ \eta_2 - \eta_3 + \eta_1 \end{bmatrix} + e^{-t}\begin{bmatrix} \eta_1 + t(-2\eta_3 + \eta_2) \\ 2\eta_3 - \eta_2 - 2\eta_1 + t(4\eta_3 - 2\eta_2) \\ 2\eta_3 - \eta_2 - \eta_1 + t(2\eta_3 - \eta_2) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

取初值向量 $\boldsymbol{\eta}$ 为 $(1,0,0)^{\mathrm{T}},(0,1,0)^{\mathrm{T}},(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 时，得到以线性无关解为列的基解矩阵

$$
\exp(\boldsymbol{A}t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & -2te^{-t} \\ 2e^{t} - 2e^{-t} & 2e^{t} - (2t+1)e^{-t} & -2e^{t} + 2(2t+1)e^{-t} \\ e^{t} - e^{-t} & e^{t} - (t+1)e^{-t} & -e^{t} + 2(t+1)e^{-t} \end{bmatrix}.
$$

4. (1) 奇点为 $(0,0)$. 系数矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $p = 0, q = -1 < 0$, 奇点为不稳定鞍点.

(2) 由于 $-4x - y - 2 = 0, 2x - y + 4 = 0$ 有解 $x = -1, y = 2$, 奇点为 $(-1,2)$. 作变换 $\begin{cases} \tilde{x} = x + 1 \\ \tilde{y} = y - 2 \end{cases}$ 后奇点变为 $(0,0)$. 系数矩阵为 $\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $p = 5 > 0, q = 6 > 0$, 而 $p^2 - 4q = 1 > 0$. 奇点为稳定结点.

5. 见[§4.4.5 -5(3)].

§9.4 考研试题套题(2)

§9.4.1 考研试题套题(2)

1. 解下列方程

(1) 求方程 $y'=2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$ 的通解；

(2) 求微分方程 $y''-2y'+y=\frac{1}{2}e^x+\sin x$ 的一个特解；

(3) 求微分方程 $y=(y')^2-xy'+\frac{x^2}{2}$ 的通解.

2. 求微分方程 $yy''-(y')^2+y'=0$ 的通解.

3. 研究微分方程组 $\frac{dx}{dt}=\mu x-z,\frac{dy}{dt}=\mu y-x,\frac{dz}{dx}=\mu z-y$（$\mu$ 为常数）的零解的稳定性.

4. 求方程组 $\begin{cases}x'=-x-2y+2e^{-t},\\ y'=3x+4y+e^{-t}\end{cases}$ 的通解.

5. 如果齐次线性微分方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的解 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 线性无关，则它们的朗斯基行列式 $W(t)\neq 0,a\leqslant t\leqslant b$.

6. 证明：若方程组 $\begin{cases}x'=mx+ny,\\ y'=-(ax+by)\end{cases}$ 的奇点为中心，则方程

$$(ax+by)dx+(mx+ny)dy=0$$

为恰当方程.

§9.4.2 考研试题套题(2)解答

1. (1) 因 $\begin{cases}y+2=0,\\ x+y-1=0\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=3,\\ y=-2.\end{cases}$ 取变换 $\begin{cases}x=X+3\\ y=Y-2\end{cases}$，原方程化为齐次方程

$$\frac{dY}{dX}=\frac{2Y^2}{(X+Y)^2}.$$

再令 $Y=uX$，则有

$$X\frac{du}{dX}=\frac{dY}{dX}-u=\frac{2u^2X^2}{(X+uX)^2}-u=\frac{2u^2-u(1+u)^2}{(1+u)^2}=\frac{-u(1+u^2)}{1+2u+u^2}.$$

即

$$-\frac{\mathrm{d}X}{X}=\frac{2u+1+u^2}{u(1+u^2)}\mathrm{d}u=\left(\frac{2}{1+u^2}+\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u.$$

积分得

$$2\arctan u+\ln|u|=-\ln|X|+c.$$

解为

$$2\arctan\frac{y+2}{x-3}+\ln|y+2|=c,$$

其中 c 为任意常数.

(2) 因 $y''-2y'+y=0$ 有二重特征值 $\lambda=1$. $y''-2y'+y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x$ 应有特解 $y=Ax^2\mathrm{e}^x$,代入有

$$y'=(2x+x^2)A\mathrm{e}^x, y''=(2+4x+x^2)A\mathrm{e}^x, 2A\mathrm{e}^x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x, A=\frac{1}{4}.$$

得特解 $y=\frac{1}{4}x^2\mathrm{e}^x$. 而 $y''-2y'+y=\sin x$ 应有特解 $y=B\sin x+C\cos x$,代入有

$$y'=B\cos x-C\sin x, y''=-B\sin x-C\cos x,$$

$$(-B+2C+B)\sin x+(-C-2B+C)\cos x=\sin x,$$

即 $2C=1,-2B=0$,有解 $B=0, C=\frac{1}{2}$. 得特解 $y=\frac{1}{2}\cos x$.

由叠加原理,方程 $y''-2y'+y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+\sin x$ 的一个特解为

$$y=\frac{1}{4}x^2\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\cos x.$$

(3) 方程 $y=(y')^2-xy'+\frac{x^2}{2}$ 为隐方程,已解出 y. 令 $y'=p$,化为

$$y=p^2-xp+\frac{x^2}{2}.$$

两边对 x 求导得

$$p=2pp'-p-xp'+x, 2pp'-2p-xp'+x=(p'-1)(2p-x)=0.$$

有解 $p'=1$，即 $p=x+c_1$ 及 $p=\frac{x}{2}$. 即解为 $y=\frac{x^2}{2}+c_1x+c_2$ 及 $y=\frac{x^2}{4}+c$，其中 c_1,c_2,c 为任意常数.

2. 方程 $yy''-(y')^2+y'=0$ 为不含自变量 x 的二阶方程. 可令 y 为新自变量，$y'=p$，$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$. 方程化为

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2+p=0, p\left(y\frac{dp}{dy}-p+1\right)=0.$$

即 $p=0$ 或 $y\frac{dp}{dy}=p-1$. 前一方程有解 $y'=p=0$，$y=c_1$. 后一方程当 $p\neq 1$ 时有

$$\frac{dp}{p-1}=\frac{dy}{y}, p-1=\tilde{c}_1y, y'=p=\tilde{c}_1y+1,$$

$$\frac{dy}{\tilde{c}_1y+1}=dx, \tilde{c}_1y+1=c_2e^x, y=c_1(c_2e^x-1).$$

而 $p=1$，即 $y'=1$，$y=x+c$ 也是解.

方程的通解为 $y=c_1(c_2e^x-1)$ 及 $y=x+c$，其中 c_1,c_2,c 为任意常数(前一方程的解 $y=c$ 含于通解中).

3. 参看[§5.2.2 - 例 5]. 当 $\mu<-\frac{1}{2}$ 时，零解渐近稳定；当 $\mu>-\frac{1}{2}$ 时，零解不稳定；当 $\mu=-\frac{1}{2}$ 时，零解稳定.

4. **解 1** 两方程相加得 $(x+y)'=2(x+y)+3e^{-t}$，解为 $x+y=e^{2t}\left(\int 3e^{-t}e^{-2t}dt+c_1\right)=c_1e^{2t}-e^{-t}$. 将 $y=c_1e^{2t}-e^{-t}-x$ 代入第1个方程得 $x'=x-2c_1e^{2t}+4e^{-t}$，解为 $x=e^t\left[c_2+\int(-2c_1e^{2t}+4e^{-t})e^{-t}dt\right]=e^t(c_2-2c_1e^t-2e^{-2t})$，即方程组有解 $x=c_2e^t-2c_1e^{2t}-2e^{-t}$ 及 $y=3c_1e^{2t}-c_2e^t+e^{-t}$，$c_1,c_2$ 为任意常数.

解 2 对应的齐次方程组

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

有特征方程

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 \\ -3 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-2)(\lambda-1) = 0.$$

特征值为 $\lambda=2,\lambda=1$. 对应特征值 $\lambda=2$ 的特征向量 $\boldsymbol{u}$ 为

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3u_1+2u_2 \\ -3u_1-2u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ -3\alpha \end{bmatrix}.$$

对应特征值 $\lambda=1$ 的特征向量$\boldsymbol{v}$ 为

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_1+2v_2 \\ -3v_1-3v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \beta \\ -\beta \end{bmatrix}.$$

当初值条件为$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \boldsymbol{\eta}$ 时应有 $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$,即

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ -3\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ -\beta \end{bmatrix}, \alpha = -(\eta_1+\eta_2), \beta = 3\eta_1 + 2\eta_2.$$

于是

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -2(\eta_1+\eta_2) \\ 3(\eta_1+\eta_2) \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 3\eta_1+2\eta_2 \\ -(3\eta_1+2\eta_2) \end{bmatrix}.$$

对应的齐次方程组的通解为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{2t}\boldsymbol{u} + e^t\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -2e^{2t}(\eta_1+\eta_2) + e^t(3\eta_1+2\eta_2) \\ 3e^{2t}(\eta_1+\eta_2) - e^t(3\eta_1+2\eta_2) \end{bmatrix}.$$

分别取初值条件 $\boldsymbol{\eta}_1 = (1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}_2 = (0,1)^{\mathrm{T}}$. 代入可得对应的齐次方程组的基解矩阵为

$$\begin{bmatrix} -2e^{2t}+3e^t & -2e^{2t}+2e^t \\ 3e^{2t}-3e^t & 3e^{2t}-2e^t \end{bmatrix}.$$

非齐次方程组的特解应有形式

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^{-t} \\ be^{-t} \end{bmatrix},$$

代入方程组得

$$\begin{cases} -ae^{-t} = -ae^{-t} - 2be^{-t} + 2e^{-t}, \\ -be^{-t} = 3ae^{-t} + 4be^{-t} + e^{-t}, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} b = 1, \\ a = -2. \end{cases}$$

即非齐次方程组的特解为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}.$$

最后得非齐次方程组的通解为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{2t} + 3e^{t} & -2e^{2t} + 2e^{t} \\ 3e^{2t} - 3e^{t} & 3e^{2t} - 2e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix},$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

5. **证 1** 齐次线性微分方程组 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的线性无关解 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 构成的解矩阵

$$\boldsymbol{X}(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

满足

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t),$$

且有

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C},$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为方程组的任一基解矩阵, $\det \boldsymbol{\Phi}(t) \neq 0$, $\det \boldsymbol{C} \neq 0$, $a \leqslant t \leqslant b$. 于是朗斯基行列式有

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} = \det \boldsymbol{X}(t)$$

$$= \det \boldsymbol{\Phi}(t) \cdot \det \boldsymbol{C} \neq 0, \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

证 2 设朗斯基行列式为

$$W(t)=\begin{vmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{n1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$=\det(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n).$$

求导得

$$W'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)=\det(\boldsymbol{x}_1',\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)+$$

$$\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2',\cdots,\boldsymbol{x}_n)+\cdots+\det(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_{n-1},\boldsymbol{x}_n')$$

$$=\det(A\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)+\det(\boldsymbol{x}_1,A\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)+\cdots+$$

$$\det(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_{n-1},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n)$$

$$=\det\boldsymbol{A}\cdot\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)=\det\boldsymbol{A}\cdot W(t).$$

可解得

$$W(t)=W(t_0)\mathrm{e}^{\det \boldsymbol{A}(t)\cdot(t-t_0)}.$$

因解 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 线性无关，$W(t_0)\neq 0$，而 $\mathrm{e}^{\det \boldsymbol{A}(t)\cdot(t-t_0)}\neq 0$，得 $W(t)\neq 0$.

6. $\begin{cases} x'=mx+ny, \\ y'=-(ax+by) \end{cases}$ 的奇点为(0,0)，它为中心时应满足条件

$$p=-m+b=0,q=-mb+na>0.$$

因而方程

$$(ax+by)\mathrm{d}x+(mx+ny)\mathrm{d}y=0$$

满足 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=b=m=\dfrac{\partial N}{\partial x}$，故它为恰当方程.

§9.5 考研试题半套题(1)

§9.5.1 考研试题半套题(1)

1. 求下列微分方程的解：

（1）$x(\ln x-\ln y)\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$；

（2）$y\mathrm{d}x-(x+y^n)\mathrm{d}y=0$，其中 n 为常数；

（3）$xy''-y'=3x^2$.

2. 求 $y''-2y'+y=5x\mathrm{e}^x$ 的通解，这里 $y=y(x)$.

3. 求解方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-z,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+y,\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=x+z.$$

4. 设 G 是 Oxy 平面的某区域，二元函数 $f(x,y)$ 在 G 内连续可微，$f(x,0)\equiv 0$. 证明：如果 $y=\varphi(x)$ 是方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$ 的非常数的饱和解，则在其定义域内，$\varphi(x)\neq 0$.

§9.5.2　考研试题半套题(1)解答

1. （1）令 $x=uy$，$\mathrm{d}x=y\mathrm{d}u+u\mathrm{d}y$，方程化为变量分离方程

$$uy\ln u\mathrm{d}y-y(y\mathrm{d}u+u\mathrm{d}y)=0,\ u(\ln u-1)\mathrm{d}y=y\mathrm{d}u.$$

当 $\ln u\neq 1$ 时，有 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\frac{\mathrm{d}(\ln u)}{\ln u-1}$，积分得

$$\tilde{c}+\ln|y|=\ln|\ln u-1|,\ \ln u-1=cy.$$

通解为 $\ln\frac{x}{y}=1+cy$，其中 c 为任意常数. 当 $\ln u=1$ 时，有解 $y=x\mathrm{e}^{-1}$，已含于通解中.

（2）以 y^2 除全式得 $\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}-y^{n-2}\mathrm{d}y=0$，$\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)=y^{n-2}\mathrm{d}y$. 当 $n=1$ 时可积分得解 $\frac{x}{y}+\tilde{c}=\ln|y|$，$y=c\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$；当 $n\neq 1$ 时解为 $x=\frac{1}{n-1}y^n+cy$. 其中 c 为任意常数.

（3）令 $z=y'$，方程化为非齐次线性方程 $z'=\frac{z}{x}+3x$，有解

$$z=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int 3x\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right)=x\left(\int 3\mathrm{d}x+c\right)=3x^2+2c_1x.$$

于是 $y'=z=3x^2+2c_1x, y=x^3+c_1x^2+c_2$. 解为 $y=x^3+c_1x^2+c_2$，其中 c_1,c_2 为任意常数.

2. 特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2$. 方程有2重特征值 $\lambda=1$. 特解可设 $y=x^2(ax+b)e^x$，有

$$y'=[ax^3+(b+3a)x^2+2bx]e^x,$$
$$y''=[ax^3+(b+6a)x^2+(4b+6a)x+2b]e^x.$$

代入方程得

$$(6ax+2b)e^x=5xe^x, a=\frac{5}{6}, b=0.$$

方程的特解为 $y=\frac{5}{6}x^3e^x$. 通解为 $y=\left(c_1+c_2x+\frac{5}{6}x^3\right)e^x$，其中 c_1，c_2 为任意常数.

3. 由第二、三式有 $\frac{d(y-z)}{dt}=y-z, y-z=c_2e^t$. 再由第一、二式得 $\frac{d(x+y)}{dt}=(x+y)+(y-z)=(x+y)+c_2e^t$，有解 $x+y=e^t\left(\int c_2dt+c_3\right)=c_2te^t+c_3e^t$. 而由第一式又有 $\frac{dx}{dt}=y-z=c_2e^t, x=c_2e^t+c_1$. 最后得方程的通解

$$x=c_1+c_2e^t, y=-c_1+(c_3-c_2+c_2t)e^t,$$
$$z=-c_1+(c_3-2c_2+c_2t)e^t,$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

4. 因方程右端函数 $f(x,y)$ 在 G 内连续可微，即 $f(x,y)$ 关于 y 满足局部利普希茨条件，根据解的存在唯一性定理，方程的解在 G 内存在唯一. 由 $f(x,0)\equiv0$ 知方程有零解 $y\equiv0$. 因此，若方程的解 $y=\varphi(x)$ 有 x 使得 $\varphi(x)=0$，则在 G 内 $y=\varphi(x)$ 为零解 $y=\varphi(x)\equiv0$，否则与解的存在唯一性矛盾. 因此，在定义域内 $\varphi(x)\neq0$.

§9.6 考研试题半套题(2)

§9.6.1 考研试题半套题(2)

1. 求解微分方程：

$$(3x^3+y)\mathrm{d}x+(2x^2y-x)\mathrm{d}y=0.$$

2. 求解方程组：

$$x'=5x-28y-18z,y'=-x+5y+3z,z'=3x-16y-10z.$$

3. 给定方程 $x'''+5x''+6x'=f(t)$，其中 $f(t)$ 在 $-\infty<t<+\infty$ 上连续．设 $\varphi_1(t)$ 及 $\varphi_2(t)$ 是上述方程的两个解．证明：极限 $\lim\limits_{t\to\infty}[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)]$ 存在.

4. 考虑线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{f}(t), \qquad (*)$$

其中 $\boldsymbol{A}(t)$ 与 $\boldsymbol{f}(t)$ 是以 ω 为周期的周期矩阵函数与周期向量函数（即 $\boldsymbol{f}(t+\omega)=\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{A}(t+\omega)=\boldsymbol{A}(t)$）. 假定方程组(*)及其对应的齐次线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) \qquad (**)$$

满足解的存在唯一性定理条件. 证明：若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是方程组(*)的解，则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是(*)的以 ω 为周期的周期解的充要条件是 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\varphi}(\omega)$.

5. 判定下列方程组的奇点(0,0)的类型（即指出是结点、焦点、鞍点或中心）

$$\begin{cases}x'=x-y,\\ y'=2x+y.\end{cases}$$

§9.6.2 考研试题半套题(2)解答

1. 两边同乘以积分因子$\frac{1}{x^2}$,得

$$3x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2}=0,\ \frac{3}{2}x^2+y^2-\frac{y}{x}=c.$$

2. 记$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-28&-18\\-1&5&3\\3&-16&-10\end{pmatrix}$,则$\boldsymbol{A}$的特征根为$\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$,求出所对应的特征向量,得通解

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\mathrm{e}^t+c_3\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}.$$

3. $\varphi_1(t)-\varphi_2(t)$线性齐次为方程$x'''+5x''+6x'=0$的解.而$x'''+5x''+6x'=0$的通解为$x=c_1+c_2\mathrm{e}^{-2t}+c_3\mathrm{e}^{-3t}$,当$t\to\infty$时,上述极限存在.

4. 必要性显然.下证充分性:首先,易证$\boldsymbol{\varphi}(t+\omega)$是(*)的解.显然$\boldsymbol{\varphi}(t+\omega)-\boldsymbol{\varphi}(t)$是(**)的解.由于$\boldsymbol{\varphi}(\omega)-\boldsymbol{\varphi}(0)=0$,所以根据解的唯一性,知必有$\boldsymbol{\varphi}(t+\omega)-\boldsymbol{\varphi}(t)\equiv0$,即$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t+\omega)$.

5. $p=-2,q=3,\Delta=-8<0$.焦点.

§9.7 考研试题半套题(3)

§9.7.1 考研试题半套题(3)

1. 试给出并证明非齐次线性方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y+q(x)=0$,$y(x_0)=y_0$的求解公式.

2. 求 $y' = (x+y)^2$ 的通解.

3. 求 $(2x-y)\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = 0$ 的通解.

4. 求二阶微分方程 $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ 满足 $y(0)=1, y'(0)=0$ 的解.

5. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续可微,且存在 $M>0$,对任意的 x,$|f(x)| \leqslant M|x|$ 恒成立. 证明微分方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)$ 的解的最大存在区间为 $(-\infty, +\infty)$.

§9.7.2 考研试题半套题(3)解答

1. 齐次线性方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = 0$ 可用变量分离法解之,得

$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -p(x)\mathrm{d}x, \ln|y| = -\int p(x)\mathrm{d}x + \tilde{c}, y = c\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\mathrm{d}x}$.

再用常数变易法求非齐次方程的解,设 $y = c(x)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\mathrm{d}x}$,于是有

$$y' = c'(x)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\mathrm{d}x} - c(x)p(x)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\mathrm{d}x},$$

$$c'(x)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\mathrm{d}x} + q(x) = 0.$$

得

$$c'(x) = -q(x)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} p(x)\mathrm{d}x}, c(x) = -\int_{x_0}^{x} q(x)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} p(x)\mathrm{d}x} + c.$$

即有

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\mathrm{d}x}\left[-\int_{x_0}^{x} q(x)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} p(x)\mathrm{d}x} + c\right].$$

利用初值条件 $y(x_0) = y_0$ 确定常数 c:$y(x_0) = c$,即解为

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\mathrm{d}x}\left[-\int_{x_0}^{x} q(x)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} p(x)\mathrm{d}x} + y(x_0)\right].$$

2. 令 $z = x+y, z' = 1+y'$,方程化为 $z' = 1+z^2$,

$$\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \mathrm{d}x, \arctan z = x + c, z = \tan(x+c).$$

通解为 $y=\tan(x+c)-x$，其中 c 为任意常数.

3. 因 $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\dfrac{1}{y}$，方程有积分因子 $\mu=e^{\int\frac{1}{y}dy}=y$，用 $\mu=y$ 乘全式，有

$$y(2x-y)dy+y^2dx=0,$$

$$2xydy+y^2dx-y^2dy=d\left(xy^2-\frac{1}{3}y^3\right)=0, xy^2-\frac{1}{3}y^3=c.$$

方程有通解 $xy^2-\dfrac{1}{3}y^3=c$.

4. 齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2=0$，有 2 重特征值 $\lambda=-1$. 特解应设为 $y=cx^2e^{-x}$，于是

$$y'=c(2x-x^2)e^{-x}, y''=c(2-4x+x^2)e^{-x}.$$

代入方程

$$c(2-4x+x^2)e^{-x}+2[c(2x-x^2)e^{-x}]+cx^2e^{-x}=2ce^{-x}=e^{-x}, c=\frac{1}{2}.$$

通解为 $y=\left(c_1+c_2x+\dfrac{1}{2}x^2\right)e^{-x}$，求导得

$$y'=\left(c_2+x-c_1-c_2x-\frac{1}{2}x^2\right)e^{-x}.$$

由初值条件有 $c_1=1, c_2-c_1=0, c_2=c_1=1$. 即方程满足初值条件的解为

$$y=\left(1+x+\frac{1}{2}x^2\right)e^{-x}.$$

5. 方程 $\dfrac{dx}{dt}=f(x)$ 的解 $x=x(t)$ 可表示为

$$x(t)=x_0+\int_0^t f(x(s))ds.$$

由条件 $|f(x)|\leqslant M|x|$ 知，对 $t\geqslant 0$ 有

$$|x(t)|\leqslant|x_0|+\int_0^t|f(x(s))|ds\leqslant|x_0|+\int_0^t M|x(s)|ds.$$

利用格朗沃尔不等式得

$$|x(t)| \leqslant |x_0| e^{\int_0^t M ds} = |x_0| e^{Mt}.$$

右端对任意 $t \geqslant 0$ 均有定义，故 $x = x(t)$ 亦对任意 $t \geqslant 0$ 有定义. 同样，对 $t \leqslant 0$ 有

$$|x(t)| \leqslant |x_0| + \int_t^0 |f(x(s))| ds \leqslant |x_0| + \int_t^0 M |x(s)| ds.$$

由格朗沃尔不等式

$$|x(t)| \leqslant |x_0| e^{\int_t^0 M ds} = |x_0| e^{-Mt}.$$

右端对任意 $t \leqslant 0$ 均有定义，故 $x = x(t)$ 亦对任意 $t \leqslant 0$ 有定义. 这证明了微分方程 $\frac{dx}{dt} = f(x)$ 的解的最大存在区间为 $(-\infty, +\infty)$.

§9.8 考研试题散题

§9.8.1 考研试题散题

1. 解下列一阶微分方程：

(1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x + y^3}{x^3 + y}$； (2) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3 y^3 + xy}$；

(3) $\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$； (4) $x = yy' + a(y')^2$；

(5) $y' = y^2 - x^2 + 1$； (6) $(y')^2 - 4xyy' + 8y^2 = 0$.

2. 解下列二阶及高阶微分方程：

(1) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$； (2) $x'' + 2x' + 2x = \frac{1}{e^t \sin t}$；

(3) $t^2 x'' + 5tx' + 13x = 0$.

3. 解下列微分方程组：

(1) $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$； (2) $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$.

4. 求解微分方程$\frac{dy}{dx}=|y|^\alpha(0<\alpha<+\infty)$.

5. 求解初值问题$x\frac{\partial z}{\partial x}+(y+x^2)\frac{\partial z}{\partial y}=z, x=2, z=y-4$.

6. 设$p(x), q(x), f(x)$在$a\leqslant x\leqslant b$上连续，试证明非齐次微分方程边值问题

$$y''+p(x)y'+q(x)=f(x), y(a)=A, y(b)=B$$

存在唯一解的充要条件是齐次边值问题

$$y''+p(x)y'+q(x)=0, y(a)=0, y(b)=0$$

只有零解.

7. 设$u(t), v(t)$为在区间$[a,b]$上的连续函数，且$t\in[a,b]$时

$$v(t)\geqslant 0, u(t)\leqslant u_0+\int_\alpha^t u(s)v(s)\mathrm{d}s,$$

试利用逐次逼近方法证明不等式

$$u(t)\leqslant u_0\exp\left[\int_\alpha^t v(s)\mathrm{d}s\right]$$

对任何$t\in[a,b]$成立.

§9.8.2 考研试题散题解答

1. (1) 见[§2.3.1－11(3)，§2.4.2－11(3)].

(2) 见[§2.3.1－8(2)，§2.4.2－8(2)].

(3) 见[书习题2.5－1(22)].

(4) 见[§2.3.1－8(3)，§2.4.2－8(3)].

(5) 方程为里卡蒂方程. 可观察得特解$y=x$. 令$z=y-x$，方程化为伯努利方程$z'=(z+x)^2-x^2=2xz+z^2$. 取变换$u=z^{-1}$，有$u'=-z^{-2}z'=-2xz^{-1}-1=-2xu-1$，变为线性方程，有解$u=e^{-x^2}\left(-\int e^{x^2}dx+c\right)$，即方程的解为$u=\frac{1}{z}=\frac{1}{y-x}=e^{-x^2}\left(-\int e^{x^2}dx+c\right)$，$y=x+e^{x^2}\left(-\int e^{x^2}dx+c\right)^{-1}$.

(6) 见[§2.3.1－8(4)，§2.4.2－8(4)].

2. (1) 齐次方程有特征值 $\lambda=-2,\lambda=-1$. 通解为 $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-x}$. 用常数变易法,令特解为 $\tilde{y}(x)=c_1(x)e^{-2x}+c_2(x)e^{-x}$, 设 $c_1'(x)e^{-2x}+c_2'(x)e^{-x}=0$, 于是由 $\tilde{y}''(x)+3\tilde{y}'(x)+2\tilde{y}(x)=\frac{1}{e^x+1}$, 得 $-2c_1'(x)e^{-2x}-c_2'(x)e^{-x}=\frac{1}{e^x+1}$. 解得

$$c_1'(x)=\frac{-e^{2x}}{e^x+1},c_2'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}.$$

积分得

$$\begin{aligned}c_1(x)&=\int\frac{-e^{2x}}{e^x+1}dx=\int\left(-1+\frac{1}{e^x+1}\right)e^xdx\\&=\ln(1+e^x)-e^x+c_1,\end{aligned}$$

$$c_2(x)=\int\frac{e^x}{e^x+1}dx=\ln(1+e^x)+c_2.$$

方程的解为

$$y(x)=[c_1+\ln(1+e^x)-e^x]e^{-2x}+[c_2+\ln(1+e^x)]e^{-x},$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

(2) 齐次方程有特征值 $\lambda=-1\pm i$. 通解为 $x=c_1e^{-t}\cos t+c_2e^{-t}\sin t$. 由 $W(t)=e^{-2t}$, 利用常数变易公式,方程有特解

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t)&=\int_0^t\frac{e^{-t}\sin t\cdot e^{-s}\cos s-e^{-t}\cos t\cdot e^{-s}\sin s}{e^{-2s}\cdot e^s\sin s}ds\\&=\int_0^t\left(e^{-t}\sin t\cdot\frac{\cos s}{\sin s}-e^{-t}\cos t\right)ds\\&=e^{-t}\sin t\cdot\ln|\sin t|-te^{-t}\cos t.\end{aligned}$$

所以方程的解为 $x=c_1e^{-t}\cos t+c_2e^{-t}\sin t-te^{-t}\cos t+e^{-t}\sin t\cdot\ln|\sin t|$, 其中 c_1,c_2 为任意常数.

(3) 方程为欧拉方程,设 $x=t^k$, 代入得 $k(k-1)+5k+13=k^2+4k+13=0$. 解得 $k=-2\pm3i$. 方程有通解 $x=c_1t^{-2}\cos(3\ln|t|)+c_2t^{-2}\sin(3\ln|t|)$, 其中 c_1,c_2 为任意常数.

3. (1) 特征方程为

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 0 & \lambda+1 & -4\\ -1 & 0 & \lambda+4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)^2=0.$$

有特征值 $\lambda_1=0,\lambda_{2,3}=-3$. 用微分方程方法,求对应特征值的微分方程

$$\begin{cases}r_1'=0,\\ r_2'=r_1-3r_2,\\ r_3'=r_2-3r_3,\\ r_1(0)=1,r_2(0)=r_3(0)=0.\end{cases}$$

有解 $r_1=1,r_2=\frac{1}{3}(1-\mathrm{e}^{-3t}),r_3=\frac{1}{9}[1-(1+3t)\mathrm{e}^{-3t}]$. 计算得

$$\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 4\\ 1 & 0 & -4\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 4\\ 1 & 0 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 4\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 4\\ 4 & -2 & -8\\ -2 & 1 & 4\end{bmatrix},$$

最后得

$$\exp(\boldsymbol{A}t)=\sum_{j=0}^{2} r_{j+1}(t)\boldsymbol{P}_j$$

$$=\left[\begin{array}{cc}1-\frac{1}{3}(1-\mathrm{e}^{-3t})-\frac{2}{9}[1-(1+3t)\mathrm{e}^{-3t}] & \frac{1}{3}(1-\mathrm{e}^{-3t})+\frac{1}{9}[1-(1+3t)\mathrm{e}^{-3t}]\\ \frac{4}{9}[1-(1+3t)\mathrm{e}^{-3t}] & 1-\frac{1}{3}(1-\mathrm{e}^{-3t})-\frac{2}{9}[1-(1+3t)\mathrm{e}^{-3t}]\\ \frac{1}{3}(1-\mathrm{e}^{-3t})-\frac{2}{9}[1-(1+3t)\mathrm{e}^{-3t}] & \frac{1}{9}[1-(1+3t)\mathrm{e}^{-3t}]\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{4}{9}[1-(1+3t)\mathrm{e}^{-3t}] \\ \frac{4}{3}(1-\mathrm{e}^{-3t})-\frac{8}{9}[1-(1+3t)\mathrm{e}^{-3t}] \\ 1-\frac{4}{3}(1-\mathrm{e}^{-3t})+\frac{4}{9}[1-(1+3t)\mathrm{e}^{-3t}] \end{matrix}\right]$$

$$=\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4+(5+6t)\mathrm{e}^{-3t} & 4-(4+3t)\mathrm{e}^{-3t} & 4[1-(1+3t)\mathrm{e}^{-3t}] \\ 4[1-(1+3t)\mathrm{e}^{-3t}] & 4+(5+6t)\mathrm{e}^{-3t} & 4[1+(-1+6t)]\mathrm{e}^{-3t} \\ 1+(-1+6t)\mathrm{e}^{-3t} & 1-(1+3t)\mathrm{e}^{-3t} & 1+(8-12t)\mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}.$$

(2) 方程组同[§9.5.1－3]. 解见[§9.5.2－3].

4. 当 $y\geqslant 0$ 时方程化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^{\alpha},y^{-\alpha}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x,\frac{1}{1-\alpha}y^{1-\alpha}=x+\tilde{c},\quad y=[(1-\alpha)x+c]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

当 $y<0$ 时方程化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(-y)^{\alpha},(-y)^{-\alpha}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x,\frac{1}{1-\alpha}(-y)^{1-\alpha}=-x+\tilde{c},$$

$$y=-[-(1-\alpha)x+c]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

即解为

$$y=\begin{cases}[(1-\alpha)x+c]^{\frac{1}{1-\alpha}}, & y\geqslant 0,\\ -[-(1-\alpha)x+c]^{\frac{1}{1-\alpha}}, & y<0,\end{cases}$$

其中 c 为任意常数.

5. 特征方程为 $\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y+x^2}=\frac{\mathrm{d}z}{z}$. 有首次积分 $\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{\mathrm{d}x}{x},\frac{z}{x}=c_1$ 和 $\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y+x^2},-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y-x^2\mathrm{d}x=0,\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2}-\mathrm{d}x=0,\frac{y}{x}-x=c_2,\frac{y-x^2}{x}=c_2$. 由柯西条件得 $z=2c_1=y-4,\frac{y-4}{2}=c_2$, 有关系式 $c_1=c_2$. 即解为 $\frac{z}{x}=\frac{y-x^2}{x},z=y-x^2$.

6. 见[§8.3.1－2, §8.4.2－2].

7. 见[§3.4.3－6]逐次逼近证法.

第十章　数学软件在常微分方程中的应用

§10.1　常微分方程的计算机辅助分析

随着计算机技术的发展,计算机辅助分析已深入各领域,包括数学的教学与研究.在常微分方程的教学和研究中如何进行计算机辅助分析是一个值得探讨的问题.本章分析常微分方程的教学和研究中应用计算机辅助分析的四个方面,并结合已普及应用的计算机数学软件 Mathematica、MATLAB、Maple 和 SCILAB 语言进行探讨,比较了它们在应用方面的差异,并给出了进行常微分方程的计算机辅助分析的具体处理方法.还进一步讨论了常微分方程的一些特殊应用,如解常系数线性微分方程、向量场与微分方程的解的综合显示和拉普拉斯变换方法的一般化处理.说明计算机数学软件是进行常微分方程的计算机辅助教学、分析和研究的有力工具.

§10.1.1　计算机数学软件

计算机数学软件是专为进行数学公式、函数与数据的计算和处理而设计的计算机软件.应用计算机数学软件进行数学、物理、生物、社会及工程技术的有关数据、公式的数学处理,代替原来繁难、复杂的纸笔演算,可大大提高工作效率和准确性.

目前国内应用最广泛的计算机数学软件有 Mathematica、MATLAB、Maple 和 SCILAB 四种:Mathematica 语言多用于物理学界,MATLAB 语言主要用于工程及科学计算领域,Maple 语言在数学

界较通行,SCILAB 则是科学计算自由(开源)软件. 四种语言各具特色:Mathematica 语言的符号运算、数值计算及图形绘制均有特点,特别是输入显示界面可以直接输入及显示人们习惯的数学符号,非常直观. 在其“帮助”菜单中列出的例题还可以直接运行或修改运行. MATLAB 语言的矩阵形式变量使数值输入计算非常精练,图形显示也很灵活,并有众多程序包(工具箱)供使用. Maple 语言擅长符号运算,微分方程的积分曲线或轨线图形直接用函数定义,省去了先求数值解再显示的麻烦,且可同时绘多条轨线,非常方便. SCILAB 是“开放源码”,是可供人们免费自由使用与扩展的科学计算软件,其数据格式、函数表示等均与 MATLAB 类似,其基本功能亦可与价格昂贵的 MATLAB 相媲美. 四种语言也各有不便之处:Mathematica 语言的有些规定(如函数参数均需用方括号)与众不同,还自定义了各种各样的规则和符号,初学者不易掌握. MATLAB 语言的函数定义必须用 M 文件,其符号运算是借助 Maple 语言,不甚方便. Maple 语言使用 ASC Ⅱ 符号(英文键盘)进行输入,对数学、希腊符号及上、下标等使用不便. SCILAB 语言既免费,且要照顾灵活性、扩展性,其界面及功能等自然较为简单.

在应用各种计算机数学软件时注意各语言的特殊规定. 如在 Mathematica 语言中运算、执行用“Shift” + “Enter”,而“Enter”仅为换行. 而在 Maple 语言中运算、执行用“Enter”,而“Shift” + “Enter”仅为换行. 刚好相反.

§10.1.2 常微分方程计算机辅助分析

虽然,计算机数学软件可以对一般数学也包括常微分方程进行计算机辅助分析. 但数学或数学分析内容广泛,而常微分方程只是其中的一部分,只要掌握部分内容和方法、技巧即可. 而且常微分方程还有其特定的内容、方法,计算机数学软件应用时需进行特殊处理. 因此,必须考虑在目前计算机普及应用的环境下如何应用

计算机数学软件对常微分方程进行计算机辅助分析.

对常微分方程的教学和研究的内容而言,有如下四个方面可应用计算机软件进行辅助分析计算.

(1) 求解线性微分方程组需要用到的矩阵特征值、特征向量、行列式及指数函数的计算,计算、检验微分方程组的平衡点需要用到的代数方程组的(符号)求解.

四种计算机数学软件均有各种函数供使用. Mathematica 中相应的函数为:

Exp[A] (指数函数)、

Eigenvalues[A] (特征值)、

Eigenvectors[A] (特征向量)、

Eigensystem[A] (特征值和特征向量)、

Det[A] (行列式)、

Solve[{eqns},{vars}] (解代数方程或方程组).

MATLAB 中为:

expm(A) (指数函数)、

[V,D] = eig(A) (特征值和特征向量)、

det(A) (行列式)、

x = A\b (解矩阵方程 Ax = b)、

[x,y] = solve('eqn1','eqn2')(解方程组 eqn1,eqn2,变量为 x,y).

Malpe 中为:

exp(A) (指数函数)、

eigenvals(A) (特征值)、

eigenvectors(A) (特征向量)、

det(A) (行列式)、

solve({eqns},{vars}) (解方程组{eqns},变量为{vars}).

SCILAB 中为:

expm(A) (指数函数)、

[V,D] = spec(A) (特征值和特征向量)、

det(A)(行列式)、

x = A\b (解矩阵方程 Ax = b)、

[x,y] = solve('eqn1','eqn2')(解方程组 eqn1,eqn2,变量为 x,y).

(2) 常微分方程(组)的解(积分曲线或轨线)或辅助曲线的图形显示.

一方面是平面或空间中常微分方程所定义的向量场及其辅助分析函数,如等倾斜线、V 函数曲线及积分曲线或轨线图的绘制. Mathematica 中基本的绘图函数有:

Plot[f,{x,xmin,xmax}](平面曲线图)、

Plot3D[f,{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax}](空间曲线图)、

ContourPlot[f,{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax}]](等高线图)、

ListPlot[{x1,y1},…](平面点列图)、

ParametricPlot[{x(t),y(t)},{t,tmin,tmax}](平面参数图)、

ParametricPlot[{x(t),y(t),z(t)},{t,tmin,tmax}](空间参数图)、

PlotVectorField[{funs},{vars}](平面向量场)、

PlotVectorField3D[{funs},{vars}](空间向量场).

MATLAB 中为:

quiver(x,y,u,v)(向量场)、

contour(X,Y,Z,m)(等高线图)、

contour3(X,Y,Z,[a,b])(等高线立体图).

Malpe 中为:

dfieldplot(向量场)、

contourplot(等高线图)、

contour3d(等高线立体图).

SCILAB 中为:

quiver(x,y,u,v)(向量场)、

contour(X,Y,Z,m)（等高线图）、

contour3(X,Y,Z,[a,b])（等高线立体图）.

对特殊图形如向量场的绘制,开始时或使用有关函数前要先调入相应的绘图函数库. Mathematica 中平面图形用 <<Graphics\`Graphics\`,向量场的绘制在平面为 <<Graphics\`PlotField\`,在空间为 <<Graphics\`PlotField3D\`; MATLAB 中已含各种图形函数,特殊的用工具箱;Maple 中为 with(plots)（图形库）、with(DEtools)（微分方程工具库）;SCILAB 中则要先将要使用的(自定义)函数调入内存.

另一方面是绘制曲线或轨线图所需要的数学函数、代数方程(组)及常微分方程(组)的数值求解. 因只有少数特殊方程才能求得准确解,因此,特别是常微分方程或方程组要绘制积分曲线或轨线图时要先求其数值解,用足够精度的近似数值解进行图形绘制.

Mathematica 中常微分方程(组)的数值解函数为:

不含初值条件 sol = NDSolve[{eqn1,eqn2,…},{y1[x],y2[x],…,},{x,xmin,xmax}];

含初值条件

sol = NDSolve[{eqn1,eqn2,…,ini_conds},{y1[x],y2[x],…,},{x,xmin,xmax}};

积分曲线图用

Plot[Evaluate[y[x]/. sol],{x,xmin,xmax},PlotRange -> All];

轨线图用

ParametricPlot[Evaluate[{y1[x],y2[x]}/. sol],{x,xmin,xmax}].

MATLAB 中要先将高阶微分方程化为 1 阶微分方程组形式,再编写微分方程组的 M 文件 F.m,然后才调用微分方程数值解函数[T,Y] = ode45('F',[a,b],y0),再将结果转化为积分曲线图 plot(T,Y(:,1),'-r',T,Y(:,2),'.g')或轨线图 plot(Y(:,1),Y(:,2),'-r').

Maple 较为特殊,可不必先求其数值解,直接调用常微分方程积分曲线图及轨线图函数 Deplot(平面)、DEplot3d (空间),而且可以同时画出不同初始条件的多条轨线,非常方便.

SCILAB 也要先将高阶微分方程化为 1 阶微分方程组形式,但不必如 MATLAB 那样要存为 M 文件形式,可直接定义方程组.

(3) 常微分方程(组)的特殊求解,包括拉普拉斯变换方法及幂级数解方法以及特殊函数的求解.

Mathematica 中拉普拉斯变换方法用拉普拉斯变换函数 LaplaceTransform[f(t),t,s]化为代数方程(组),再通过符号求解代数方程(组)函数 Solve[{eqns},{vars}]得出解,后再应用反拉普拉斯变换函数 InverseLaplaceTransform[F(s),r,t]得到结果. 幂级数解方法必须调用有限项级数代入一项一项对比求解,不能一步到位.

MATLAB 中不能直接应用拉普拉斯变换和反变换函数解方程,另有信息处理程序包供使用,亦可转为在 Maple 符号处理环境下应用.

Maple 中的拉普拉斯变换和反变换函数为 laplace(F,t,z)和 invlaplace(L,z,t).

SCILAB 中有专门的信号处理函数用于拉普拉斯变换和反变换.

四种数学软件均有众多的特殊函数供使用.

(4) 常微分方程(组)的直接积分.

Mathematica 和 Maple 是符号计算软件,应用其符号计算求解常微分方程或方程组的函数 DSolve[ ]和 dsolve( ),根据参数形式的不同可解不带初值条件的常微分方程(组),如含初值条件则在方程或方程组后附上初值条件.

MATLAB 的符号计算核是借助 Maple 语言,要先作变量说明才能使用. SCILAB 有微分和积分及解方程等函数供使用,但符号处理功能相对较弱.

必须指出的是，正如常微分方程(组)不一定有初等解即不能用初等函数或超越函数积出一样，使用数学软件不一定保证能解出给定的常微分方程(组).甚至能积出的常微分方程(组)也不一定能用数学软件解出，因常微分方程(组)的求解没有统一方法，要用人工智能处理计算机的求解过程.

§10.1.3 常微分方程计算机辅助分析的具体处理

常微分方程用数学软件进行辅助分析时，往往需要经过几个步骤调用不同函数才能得到最后结果.常微分方程中常用方法有以下几种.

(1) 求常系数线性微分方程组的解.方程化为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$ 形式.先求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值及 $\boldsymbol{A}t$ 的指数函数，然后按特征值及其重次或指数函数给出齐次方程的通解.再视 $\boldsymbol{f}(t)$ 的形式及与特征值的关系求非齐次方程的特解.齐次方程的通解加上非齐次方程的特解便是非齐次方程的通解.当有初值条件时可由通解求满足初值条件时的积分常数而求得特解.

(2) 常微分方程(组)的向量场和积分曲线(轨线)图.向量场图必须确定其范围及向量的大小密度，积分曲线(轨线)图要先求给定初值和时间区间的方程的数值解(一般选自动定步长)，再转换成图形.可将同范围的向量场和多条积分曲线(轨线)合并成一个图形，以方便分析处理.

(3) 拉普拉斯变换方法.对非齐次常系数线性微分方程(组)，可用拉普拉斯变换化为代数方程(组)，求解代数方程(组)后再通过反拉普拉斯变换得到微分方程(组)的解.在 Mathematic 和 Maple 中，由于拉普拉斯变换得到的变量符号较长，重定变量名较为方便.MATLAB 则要另调用动态系统建模仿真软件包 Simulink 或优化工具箱使用专用模块进行处理.SCILAB 和 MATLAB 一样在系统与控制程序库中应用传递函数进行处理.

下面将给出分别应用 Mathematica、MATLAB、Maple 和 SCIL-

AB 四种语言解决习题中的问题的具体程序例子，程序后附上解答.

对 Mathematica 和 Maple 语言分为

① 辅助计算：包括微分、积分；行列式、逆矩阵和转置矩阵；矩阵特征方程、特征值和特征向量；奇点（解方程组）4 种.

② 辅助判断：包括恰当方程；积分因子；里卡蒂方程；验证方程组解；判断奇点类型 5 种.

③ 绘图：包括平面向量场及轨线图貌；等高线图；空间曲线、曲面 3 种.

④ 解微分方程：包括一阶微分方程；二阶及高阶微分方程；微分方程组；微分方程近似解和幂级数解；矩阵指数、基解矩阵及微分方程组解；拉普拉斯变换求微分方程组解 6 种.

对 MATLAB 和 SCILAB 语言，因其符号计算功能较弱，MATLAB 语言的符号计算使用 Maple 核，可通过连接转为 Maple 进行符号计算，因此仅分为

① 计算：包括矩阵计算；特征值；奇点（驻定解）；数值解 4 种.

② 绘图：包括平面向量场及轨线图貌；等高线图；空间曲线、曲面 3 种.

每种语言每种类型仅选一个实例程序，且各语言实例基本不重复，个别无法分别举例的，如[§1.2.2 - 例 5]向量场、[§3.4.6 - 1]数值解及[§6.4.6 - 6]双孤子解等可作为比较各语言程序的异同之用. 实例选自书中习题，程序虽可运行但未必最佳，不能作为范例，特别是往往为图方便而多使用复制手段. 幸好各语言均有帮助并附各种范例可作参考. 特别是 SCILAB 语言，所使用的函数往往含于各例子中，要在 SCILAB 界面的“? /Scilab Demos”中的各例子寻找. 学习语言程序的最好办法是通过语言“帮助”中的范例了解.

§ 10.2 Mathematica 程序选

§ 10.2.1 辅助计算

(1) 微分、积分

D[f,x],D[f,{x,n}],Dt[f,x],ND[f,x,x0],

Integrate[f,x],Integrate[f,{x,a,b}],NIntegrate[f,{x,a,b}]

(2) 求行列式、逆矩阵和转置矩阵

Det[A],Inverse[A],Transpose[A].

(3) 求矩阵特征方程、特征值和特征向量

```
(*   Ex5.3 -3(2)   *)
```

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 3\\ 4 & -5 & 3\\ 4 & -4 & 2\end{bmatrix};$$

```
B = DiagonalMatrix[{λ,λ,λ}]   (* 定义对角矩阵 *)
eq = Simplify[Det[A - B]]     (* 求特征方程 *)
Solve[eq == 0,λ]              (* 求特征方程的根 *)
Eigenvalues[A]                (* 求特征值 *)
Eigenvectors[A]               (* 求特征向量 *)
```

输出:

```
{{λ,0,0},{0,λ,0},{0,0,λ}}     4 + 4λ - λ^2 - λ^3
{{λ→ -2},{λ→ -1},{λ→2}}       {-2,2, -1}
{{0,1,1},{1,1,1},{1,1,0}}
```

(4) 求奇点(解方程组)

```
(* Ex6.1 -3(2) *)
F1 = 9x - 6y + 4x y - 5x^2 == 0;
F2 = 6x - 6y - 5x y + 4y^2 == 0;
Solve[{F1,F2},{x,y}]
```

输出:

```
{{x→0,y→0},{x→1,y→2},{x→2,y→1}}
```

（5）微分方程数值解

```
(* Ex3.5-1 ,计算结果见§3.4.6-1 *)
Remove[]
F[y_] := y* (1-y^2) ;
Y0[x_] :=Sqrt[4*Exp[2x]/(4*Exp[2x] -3)] ;
En[y_] := y+ h* F[y] ;
h= 0.1; x0 = 0; yn= 2;
For[n= 1, n< 11, n= n+ 1, xn= x0+n*h;
  ye = En[yn] ;
  yba = yn + h*F[yn] ; yb = yn + h/2 *(F[yn] + F[yba]) ;
  r1 = yn*(1-yn^2) ; r2 = (yn+h/2*r1) * (1-(yn+h/2*r1)^2) ;
  y2 = yn+h*r2;
  k1 = yn*(1-yn^2) ; k2=(yn+h/2*k1) * (1-(yn+h/2*k1)^2) ;
  k3 = (yn+h/2*k2) * (1-(yn+h/2*k2)^2) ;
  k4 = (yn+h*k3) * (1-(yn+h*k3)^2) ;
  y4 = yn+h/6*(k1+2*k2+2*k3+k4) ;
  yn = Y0[xn] ; ee =ye-yn; eb = yb-yn; e2=y2-yn; e4=y4
     -yn;
  Print["xn=", xn, " yn=", yn, " ye=", ye, " ee=", ee,
   " yb=",yb, "eb=",eb, " y2=",y2," e2=",e2," y4=",
   y4," e4=", e4]
];
Clear[]
h = 0.1; x0 =0; yn= 2; ye = 2; yb= 2;y2 =2; y4= 2;
For[n =1, n <11, n = n+ 1, xn = x0+n*h;
  ye = En[ye] ;
  yba = yb + h*F[yb] ;
  yb = yb + h/2 * (F[yb] + F[yba]) ;
  r1 = y2 * (1-y2^2) ; r2 = (y2+ h/2*r1) * (1-(y2+h/2*r1)^2) ;
```

```
  y2 = y2 + h * r2;
  k1 = y4 * (1 - y4^2) ; k2 = (y4 + h/2 * k1) * (1 - (y4 + h/2 * k1)^2) ;
  k3 = (y4 + h/2 * k2) * (1 - (y4 + h/2 * k2)^2) ;
  k4 := (y4 + h * k3) * (1 - (y4 + h * k3)^2) ; y4 = y4 + h/6 * (k1
      + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) ;
  yn = Y0[xn] ; ee = ye - yn; eb = yb - yn; e2 = y2 - yn; e4 = y4
     - yn;
  Print["xn = ", xn, " yn = ", yn, "ye = ", ye, "ee = ", ee," yb = ",
   yb,"eb = ", eb," y2 = ", y2," e2 = ", e2," y4 = ", y4, "e4 = ", e4]
];
```

§10.2.2 辅助判断

(1) 恰当方程

```
(*  Ex2.3-1 (1)  *)
Remove [ "Global`*" ] ;
m = x^2 + y; n = x - 2y;
{∂_y m, ∂_x n}
f = ∫ m dx
g = n - ∂_y f
ky = ∫ g dy
Print["sol:  ", sol = f + ky == c];
s = Solve[Dt[sol, x], Dt[y, x]] // Simplify
s /. Dt[y, x] -> 0 // Simplify
```

输出:

$\{1,1\}$ $\quad \frac{x^3}{3} + xy \quad -2y \quad -y^2$

sol: $\frac{x^3}{3} + xy - y^2 == c$

$\left\{\left\{Dt[y, x] \to -\frac{x^2 + y - Dt[c, x]}{x - 2y}\right\}\right\}$

$$\left\{\left\{0 \to -\frac{x^2 + y - Dt[c, x]}{x - 2y}\right\}\right\}$$

（2）积分因子

```
(*   Ex2.3-2 (5)   *)
Remove [ "Global`*" ] ;
m = y; n = - (x + y^3) ;
∂y m - ∂x n
f[y_] = - (∂y m - ∂x n) /m // Simplify
Print["μ = ", μ = e^∫f[y]dy // Simplify] ;
f = ∫ μm dy
g[x_] = μ n - ∂x f
kx = ∫ g [x] dx
Print["sol:  ", sol = f + kx == c]
s = Solve [Dt [sol, x], Dt[y, x]] // Simplify
s /. Dt[y, x] - > 0 // Simplify
```

输出：

$2 \quad -\frac{2}{y} \quad \mu = \frac{1}{y^2} \quad \text{Log}[y] \quad \frac{-x - y^3}{y^2} \quad -\frac{x^2}{2y^2} - xy$

sol: $-\frac{x^2}{2y^2} - x\,y + \text{Log}[y] == c$

$$\left\{\left\{Dt[y, x] \to \frac{y(x + y^3 + y^2\,Dt[c, x])}{x^2 + y^2 - x\,y^3}\right\}\right\}$$

$$\left\{\left\{0 \to \frac{y(x + y^3 + y^2\,Dt[c, x])}{x^2 + y^2 - x\,y^3}\right\}\right\}$$

（3）里卡蒂方程

```
(* Riccati EQ: y' = Py^2 + Qy + R, y = A *)
  (*   Ex2.5-5 (3)    y[x] = -x^-1   *)
  (* x^2 Y'[x] == x^2  y[x]^2 + x y[x] + 1 *)
 Remove ["Global'*" ];
 P = 1; Q = x^-1; R = x^-2; A = -x^-1;
```

```
eqn = y'[x] == Py[x]^2 + Qy[x] + R
eqn /. {y'[x] -> ∂x A, y[x] -> A}
sol = DSolve[ z'[x] + (2 PA + Q) z[x] == -p, z[x] , x]
Simplify [ % ]
y[x] = A + z [x] /. sol
```

输出：

$$y'[x] == \frac{1}{x^2} + \frac{y[x]}{x} + y[x]^2$$

True

{{z[x]→x C[1] – x Log[x]}}

{{z[x]→x (C[1] – Log[x])}}

$$\left\{ -\frac{1}{x} + x\ C[1] - x\ Log[x] \right\}$$

（4）验证方程组解

```
(* Ex5 .2 - 8 *)
Remove ["Global`*" ] ;
```

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; f = {Sin[t], Cos[t]} ;

```
eqn = x'[t] == A.x[t] ;
eqns = x'[t] == A.x[t] + f;
```

输出：

$$\Phi = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix};$$

```
(* Ex5 .2 - 8 (1) *)
eqn /. {x'[t] -> ∂t Φ, x[t] → Φ} // Simplify
Det [Φ]
```

输出：

True　　e^{4t}

$$\left\{ \left\{ x1[t] \to \frac{1}{25} (27e^{2t} - 15e^{2t}t - 2Cos[t] - 14Sin[t]), \right.\right.$$

$$x2[t] \to \frac{1}{5}(-3e^{2t} - 2Cos[t] + Sin[t])\}\}$$

(5) 判断奇点个数和类型

```
(* Ex6.1 - 3 (3)   *)
Remove ["Global` *"] ;
Fx = y;
Fy = -x + μ (y - x^2) ;
sol = Solve[{Fx == 0, Fy == 0}, {x, y}]
dim = Dimensions[sol] ; dd = dim[[1]]
For[i =1, i ≤ dd, i = i + 1,
  x0 = x/. sol[[i]] ;y0 = y/. sol[[i]] ;
  fx = Fx/. {x - > x + x0, y - > y + y0};
  fy = Fy/. {x - > x + x0, y - > y + y0};
  a = ∂x fx/. {x - > 0, y - > 0}; b = ∂y fx/. {x - > 0, y - >0};
  c = ∂x fy/. {x - >0, y - >0};d = ∂y fy/. {x - >0, y - >0};
 Print[" i = ",i,":a = ",a,",b = ",b,",c = ",c,",d = ",d,"."];
 Print[" p = ",p = - (a + d),",q = ",q = a d - bc,",Δ = ",Δ = p^2
-4q,"."];
 Print["λ1 =",1/2(-p+Sqrt[Δ]),",λ2 = ",1/2(-p-Sqrt[Δ]),"."];]
```

输出：

$$\left\{\{y\to0,\ x\to0\},\ \left\{y\to0,\ x\to-\frac{1}{\mu}\right\}\right\}$$

$i=1: a=0, b=1, c=-1, d=\mu.$

$p=-\mu, q=1, \Delta=-4+\mu^2.$

$\lambda_1=\frac{1}{2}\left(\mu+\sqrt{-4+\mu^2}\right),\ \lambda_2=\frac{1}{2}\left(\mu-\sqrt{-4+\mu^2}\right)$

$i=2: a=0,\quad b=1,\quad c=-1, d=\mu.$

$p=-\mu,\quad q=-1,\quad \Delta=4+\mu^2.$

$\lambda_1=\frac{1}{2}\left(\mu+\sqrt{4+\mu^2}\right),\ \lambda_2=\frac{1}{2}\left(\mu-\sqrt{4+\mu^2}\right).$

§10.2.3 绘图

(1) 平面向量场及轨线图貌

(a) (* Ex6.1 -1, 输出见图 10.1(a) *)

```
<<Graphics`PlotField`
g1 = PlotVectorField[{1, x + 2 * x^2}, {t,0,4}, {x, -2,2}, Frame ->
    True, ScaleFunction -> (1 &), ScaleFactor -> 0.16, HeadLength ->
    0.01, PlotPoints -> {15,15}];
sol2 = NDSolve[{x'[t] == x[t] +2 x[t]^2,x[0] == -1.9},x[t],{t,0,4}];
g2 = Plot[Evaluate[x[t]/. sol2],{t,0,4},PlotRange -> {{0,4},{-2,2}}];
sol3 = NDSolve[{x'[t] == x[t] +2 x[t]^2,x[0] == 0.02},x[t],{t,0,
    4}];
g3 = Plot[Evaluate[x[t]/. sol3],{t,0,3.05},PlotRange -> {{0,
    4},{-2,2}}];
Show[g1,g2,g3]
```

(b) (* Ex6.4 -6(1),输出见图 10.1(b) *)

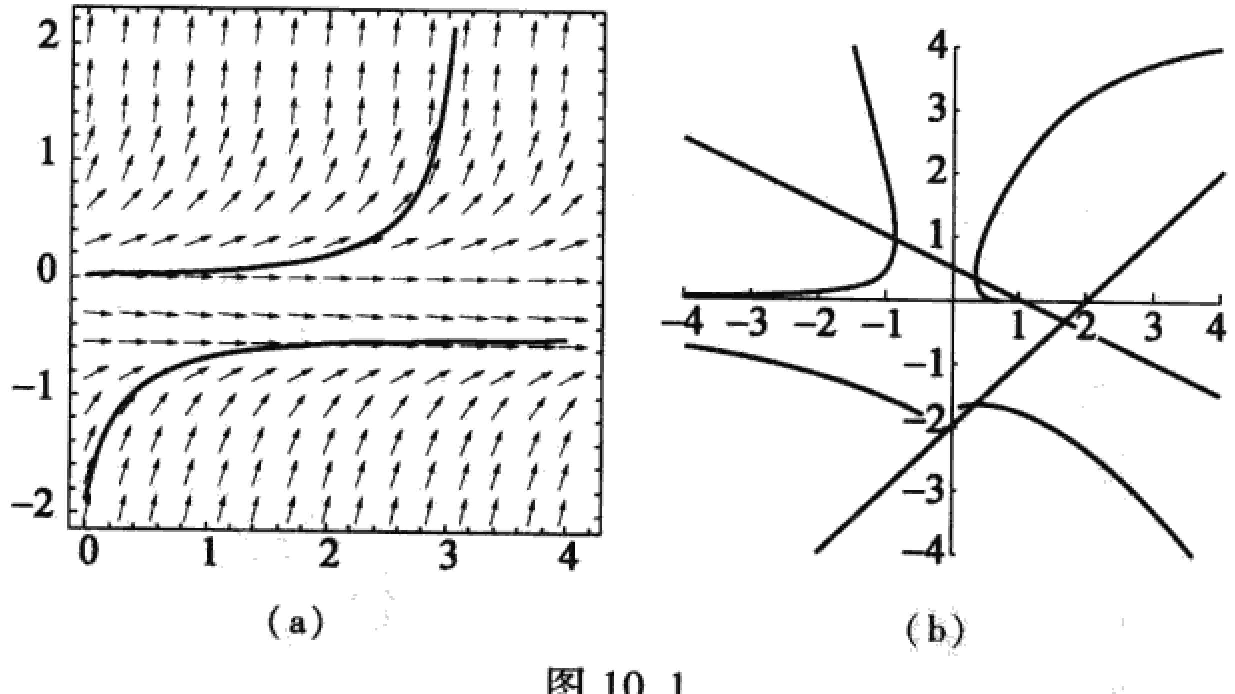


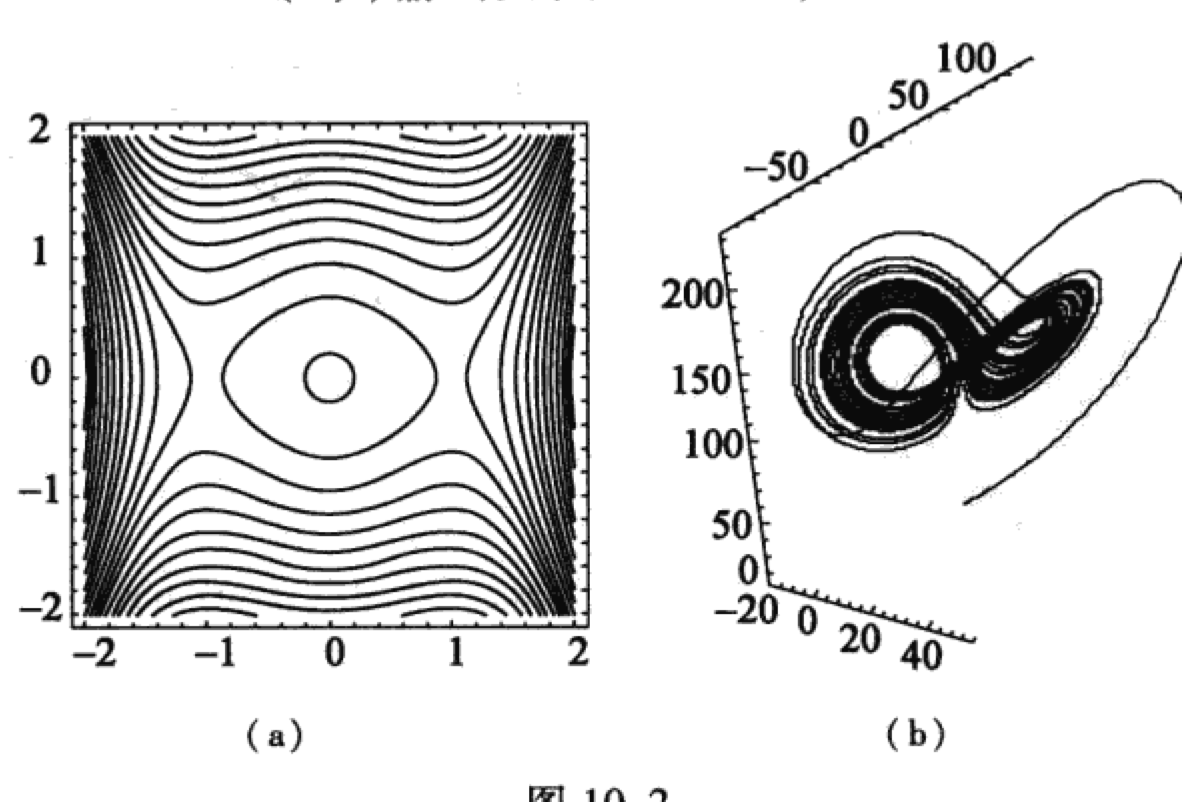
图 10.1

```
Needs["Graphics`"]
g1 = Plot[{0, x - 2, (1 - x)/2}, {x, -4,4}, PlotRange -> {{-4,
    4},{-4,4}}];
sol2 = NDSolve[{x'[t] == x[t] (1 - x[t] - 2 y[t]),y'[t] == y[t] * (x
    [t] -2 - y[t]),x[0] == 4,y[0] == 4},{x[t],y[t]},{t,0,3}];
```

```
g2 = ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/. sol2],{t,0,3},PlotRange
    ->{{-4,4},{-4,4}}];
sol3 = NDSolve[{x'[t] == x[t] (1 - x[t] - 2 y[t]),y'[t] == y[t] * (x
    [t] - 2 - y[t]),x[0] == -1.5,y[0] == 4.0},{x[t],y[t]},{t,
    0,3}];
g3 = ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/. sol3],{t,0,3},PlotRange
    ->{{-4,4},{-4,4}}];
sol4 = NDSolve[{x'[t] == x[t] (1 - x[t] - 2 y[t]),y'[t] == y[t] * (x
    [t] - 2 - y[t]),x[0] == 0.1,y[0] == -1.7},{x[t],y[t]},{t,
    0,3}];
g4 = ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/. sol4],{t,0,3},PlotRange
    ->{{-4,4},{-4,4}}];
sol5 = NDSolve[{x'[t] == x[t] (1 - x[t] - 2 y[t]),y'[t] == y[t] * (x
    [t] - 2 - y[t]),x[0] == -0.1,y[0] == -2.0},{x[t],y[t]},
    {t,0,3}];
g5 = ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/. sol5],{t,0,3},PlotRange
    ->{{-4,4},{-4,4}}];
Show[g1,g2,g3,g4,g5]
```

（2）等高线图

(* Ex6.6-2(2),输出见图 10.2 *)



(a) (b)

图 10.2

```
< <Graphics`ContourPlot'
ContourPlot[y^2/2 + x^2/2 - x^4/4, {x, -2,2}, {y, -2,2},
PlotPoints -> 120, ContourShading -> False, Contours -> 20];
```

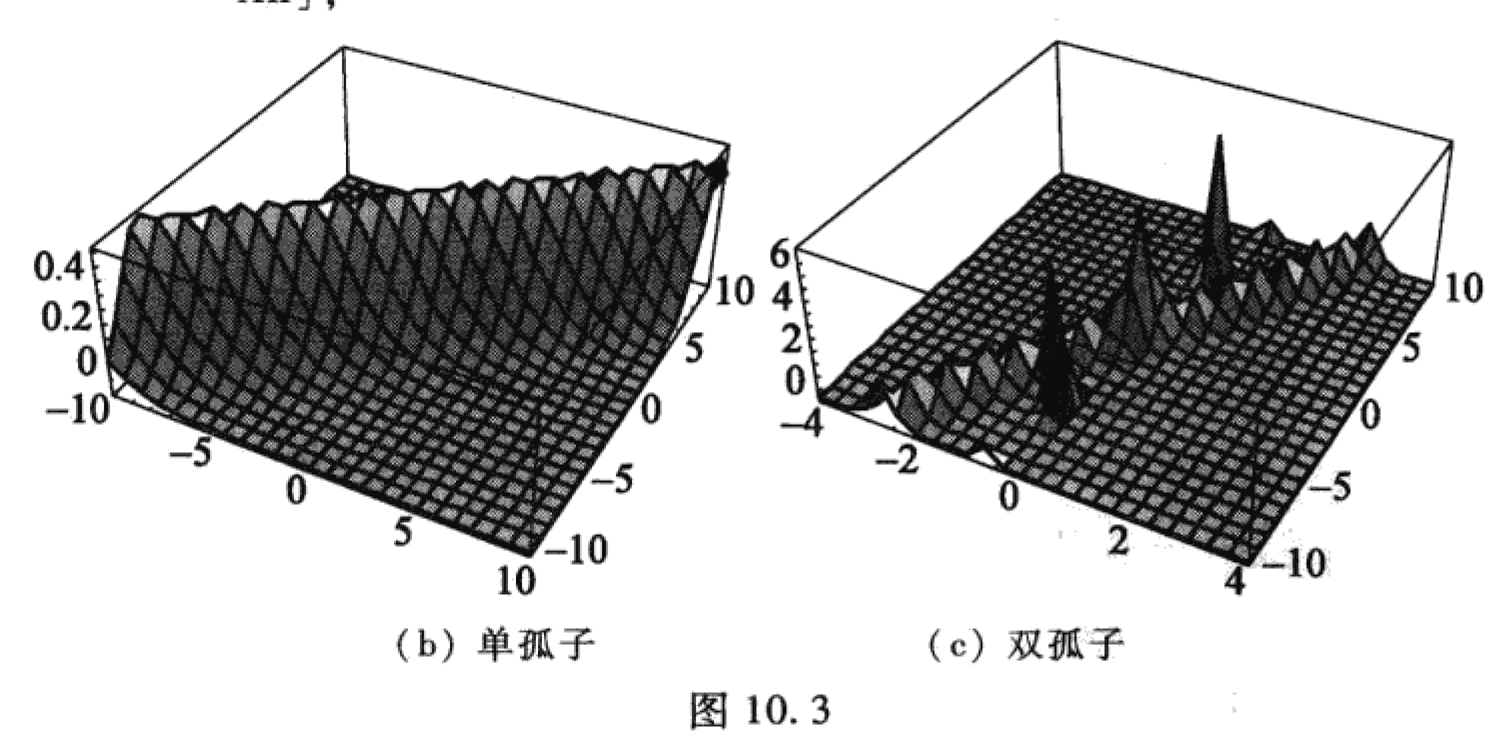
(3) 空间曲线、曲面

(a) (* Ex6.5-4,c=120,输出:图 10.3(a) *)

```
< <Graphics`Graphics3D`
eqs = Sequence[x'[t] == 10 * y[t] - 10 * x[t], y'[t] == 120 * x[t] - x
    [t] * z[t] - y[t], z'[t] == x[t] * y[t] - 8/3 * z[t]];
sol1 = NDSolve[{eqs, x[0] == 1, y[0] == 1, z[0] == 0}, {x[t], y[t],
    z[t]}, {t,0,16}, MaxSteps -> 10000];
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]}/. sol1], {t,0,16}, Plot-
        Points -> 14400, Boxed -> False];
```

(b) (* Ex6.6-6,输出见图 10.3(b)、(c) *)

```
a = .8; c0 = 1;
Plot3D [Sech[Sqrt[a] * (x - a * t - c0)/2]^2/2, {t, -10,10}, {x, -10,
    10}, PlotRange -> All];
Plot3D [12 (3 +4 Cosh[8 t - 2 x] + Cosh[64 t - 4 x])/(Cosh[36 t - 3 x]
    +3 Cosh[28 t - x])^2, {t, -4,4}, {x, -10,10}, PlotRange ->
    All];
```



(b) 单孤子　　　　(c) 双孤子

图 10.3

* §10.2.4 微分方程直接求解

(1) 一阶微分方程

(* Ex2.1 - 1(1) *)

```
DSolve[y'[x] == 2x y[x],y[x],x]
DSolve[{y'[x] == 2x y[x],y[0] == 1},y[x],x]
```

输出：

$\{\{y[x]\to e^{x^2}C[1]\}\}$ $\{\{y[x]\to e^{x^2}\}\}$

(2) 二阶及高阶微分方程

(a) (* Ex4.1 - 3(3) *)

```
DSolve[x"[t] + 4x[t] == t Sin[2 t],x[t],t]
Simplify[%]
```

输出：

$\left\{\left\{x[t]\to C[1]Cos[2t]+C[2]Sin[2t]+\frac{1}{64}(-8t^2Cos[2t]+Cos[2t]Cos[4t]-4tCos[4t]Sin[2t]+4tCos[2t]Sin[4t]+Sin[2t]Sin[4t])\right\}\right\}$

$\left\{\left\{x[t]\to\frac{1}{64}((1-8t^2+64C[1])Cos[2t]+4(t+16C[2])Sin[2t])\right\}\right\}$

(b) (* Ex4 .2 - 2 (7) *)

```
DSolve[x""[t] - 2x"[t] + x[t] == t^2 - 3, x[t], t];
Simplify[%]
```

输出：

$\{\{x[t]\to 1+t^2+e^{-t}C[1]+e^{-t}tC[2]+e^{t}C[3]+e^{t}tC[4]\}\}$

$\{\{x[t]\to e^{-t}(e^{t}(1+t^2)+C[1]+tC[2]+e^{2t}(C[3]+tC[4]))\}\}$

(3) 微分方程组

(a) (* Ex5.2 - 8.(2) *)

```
eqns = {x1'[t] == 2x1[t] + x2[t] + Sin[t],x2'[t] == 2x2[t] + Cos[t]};
DSolve[{eqns,x1[0] == 1,x2[0] == -1},{x1[t],x2[t]},t]
```

输出：

True

$$\left\{\left\{x1[t] \to \frac{1}{25}(27e^{2t} - 15e^{2t}t - 2Cos[t] - 14Sin[t]), x2[t] \to \frac{1}{5}(-3e^{2t} - 2Cos[t] + Sin[t])\right\}\right\}$$

(b) (* Ex7 - 1(2) *)

```
DSolve [{x'[t] == y[t] + 1, y'[t] == x[t] + 1, x[0] == -2, y[0] == 0},
    {x[t], y[t]}, t];
% //Simplify
```

输出:

$\{\{x[t] \to -e^{-t}(1+e^{t}), y[t] \to -e^{-t}(-1+e^{t})\}\}$

$\{\{x[t] \to -1-e^{-t}, y[t] \to -1+e^{-t}\}\}$

(4) 微分方程近似解和幂级数解

(a) (* Ex3 .1 - 1 *)

eqn = y'[x] == x + y[x]^2;

$y[x_] = \sum_{n=0}^{15} a_n x^n + O[x]^{16}$;

sol = Solve[{eqn, y[0] == 0}, Table [a_n, {n, 0, 15}]]

y[x] /. sol [[1]]

输出:

$$\left\{\left\{a_{15} \to 0, a_{14} \to \frac{1}{9856}, a_{13} \to 0, a_{12} \to 0, a_{11} \to \frac{7}{8800}, a_{10} \to 0, a_9 \to 0, a_8 \to \frac{1}{160}, a_7 \to 0, a_6 \to 0, a_5 \to \frac{1}{20}, a_4 \to 0, a_3 \to 0, a_2 \to \frac{1}{2}, a_1 \to 0, a_0 \to 0\right\}\right\}$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} + \frac{7x^{11}}{8800} + \frac{x^{14}}{9856} + O[x]^{16}$$

(b) (* Ex4 .3 - 2 (2) *)

$x[t_] = \sum_{n=0}^{9} a_n t^n + O[t]^{10}$;

eqn = (1 - t)x''[t] + x[t] == 0;

coef = Solve[eqn, Table[a_n, {n, 0, 9}]]

sol = x[t] /. coef

输出:

$\{\{a_0 \to -135434880a_8 + 178536960a_9, a_1 \to 52577280a_8 - 69310080a_9,$

$a_2 \to 67717440a_8 - 89268480a_9, a_3 \to 13809600a_8 - 18204480a_9,$

$a_4 \to 1261680a_8 - 1663200a_9, a_5 \to 66528a_8 - 87696a_9,$

$a_6 \to 2296a_8 - 3024a_9, a_7 \to 56a_8 - 72a_9\}\}$

$\{(-135434880a_8 + 178536960a_9) + (52577280a_8 - 69310080a_9)t + (67717440a_8 - 89268480a_9)t^2 + (13809600a_8 - 18204480a_9)t^3 + (1261680a_8 - 1663200a_9)t^4 + (66528a_8 - 87696a_9)t^5 + (2296a_8 - 3024a_9)t^6 + (56a_8 - 72a_9)t^7 + a_8t^8 + a_9t^9 + O[t]^{10}\}$

(5) 矩阵指数、基解矩阵及微分方程组的解

(a) (* §5.4.1 -6(3) *)

```
Matrix Exp[{{4,2,-2},{1,3,-1},{3,3,-1}}]  //Simplify
```

输出：

$\{\{1,t,0\},\{0,1,0\},\{0,0,e^{3t}\}\}$

(b) (* Ex5 .3 - 4 (4) *)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

```
Exp [A t]
```

输出：

$\{\{e^t,1,e^{3t}\},\{e^{8t},e^t,e^{-t}\},\{e^{5t},e^t,e^{-t}\}\}$

(c) (* Ex5 .3 - 5 (3) *)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Φ = Matrix Exp [A t]// Simplify

X = Φ. η

输出：

$$\left\{\left\{\frac{1}{2}e^{-t}(1+e^{4t})\right\},\left\{\frac{1}{4}e^{-t}(-1+e^{4t})\right\},\left\{\frac{1}{2}e^{-t}(-1+e^{4t})\right\}\right\}$$

(6) 用拉普拉斯变换求微分方程组的解

(* Ex5.3 - 9 -5(1) *)

```
eqL1 = LaplaceTransform[{x1'[t] == x1[t] +2 x2[t],x2'[t] ==4 x1[t]
        +3 x2[t]},t,s]
eqL2 = eqL1/. {x1[0] ->3,x2[0] ->3,LaplaceTransform[x1[t],t,s] ->
       X1[s],LaplaceTransform[x2[t],t,s] -> X2[s]}
soL = Solve[eqL2,{X1[s],X2[s]}]
x1 = InverseLaplaceTransform[soL[[1,1,2]],s,t]
x2 = InverseLaplaceTransform[soL[[1,2,2]],s,t]
```

输出：

```
{s LaplaceTransform [x1[t],t,s] - x1 [0] == LaplaceTransform[x1 [t],
 t,s] + 2 LaplaceTransform [x2[t],t,s],
 s LaplaceTransform [x2[t],t,s] - x2[0] ==4 LaplaceTransform [x1
 [t],t,s] + 3 LaplaceTransform [x2[t],t,s]}
 {-3 + s X1[s] == X1[s] +2 X2[s], -3 + s X2[s] == 4 X1[s] + 3
 X2[s]}
```

$$\left\{\left\{x1[s]\to\frac{3(-1+s)}{-5-4\ s+s^2},x2[s]\to\frac{3(3+s)}{-5-4\ s+s^2}\right\}\right\}$$

$e^{-t}(1+2\ e^{6t})\quad e^{-t}(-1+4\ e^{6t})$

§10.3 MATLAB 程序选

§10.3.1 辅助计算

(1) 矩阵计算

```
%*************************
% Ex5.3 -3(4)
%*************************
clear
syms x
A =[0 1 0;0 0 1; -6 -11 -6];
A'
det(A)
```

```
inv(A)
[v,d] = eig(A)
eA = expm(A)
Ax = det([-x,1,0;0, - x,1;-6,-11,-6-x])
y = solve(Ax)
```

输出：

```
ans =     0      0     -6          ans =   -6
          1      0    -11
          0      1     -6
ans =  -1.8333  -1.0000  -0.1667
        1.0000        0        0
             0   1.0000        0
v =    -0.5774   0.2182  -0.1048
        0.5774  -0.4364   0.3145
       -0.5774   0.8729  -0.9435
d =    -1.0000        0        0
             0  -2.0000        0
             0        0  -3.0000
eA =     0.7474   0.4530   0.0735
        -0.4410  -0.0611   0.0121
        -0.0723  -0.5735  -0.1334
sA =   [   0,   1,   0]
       [   0,   0,   1]
       [  -6, -11,  -6]
V =     [   1,  -3,   3]
        [  -3,   6,  -3]
        [   9, -12,   3]
J =    [-3,  0,  0]
       [ 0, -2,  0]
       [ 0,  0, -1]
Ax =   [  -x,    1,    0]
       [   0,   -x,    1]
```

```
              [     -6,     -11, -6 - x]
as =    -6 * x^2 - x^3 - 11 * x - 6
y =    -1          -2          -3
```

(2) 求特征值

```
% * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
% Ex6.1 -4(1)
% * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
clear
[x] = solve('x^3 + 5 * x^2 + 6 * x + x')
```

输出：

```
x =
                    0
-5/2 + 1/2 * i * 3^(1/2)
-5/2 - 1/2 * i * 3^(1/2)
```

(3) 求奇点(驻定解),解代数方程组

```
% * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
% Ex6.1 -3(1)
% * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
clear
X = 'x * (1 - x - y)';Y = 'y/4 * (2 - 3 * x - y)';
[x,y] = solve(X,Y)
```

输出：

```
x =    0    0    1    1/2    y =    0    2    0    1/2
```

(4) 微分方程数值解(计算结果见 §3.4.6 -1)

```
% * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
%     Ex3.5 -1    f(y) = y(1 - y^2)
% * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
clear
A = zeros(10,10);
B = zeros(10,10);
```

```
h = 0.1;
x0 = 0; yn = 2;
for n = 1:10
    xn = x0 + n * h;
    ye = yn + h * yn * (1 - yn^2);
    yeba = yn + h * yn * (1 - yn^2);
    yeb = yn + h/2 * (yn * (1 - yn^2) + yeba * (1 - yeba^2));
    r1 = yn * (1 - yn^2);
    r2 = (yn + h/2 * r1) * (1 - (yn + h/2 * r1)^2);
    y2rk = yn + h * r2;
    k1 = yn * (1 - yn^2);
    k2 = (yn + h/2 * k1) * (1 - (yn + h/2 * k1)^2);
    k3 = (yn + h/2 * k2) * (1 - (yn + h/2 * k2)^2);
    k4 = (yn + h * k3) * (1 - (yn + h * k3)^2);
    y4rk = yn + h/6 * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4);
    yn = sqrt(4 * exp(2 * xn)/(4 * exp(2 * xn) - 3));
    ee = ye - yn;
    eeb = yeb - yn;
    e2rk = y2rk - yn;
    e4rk = y4rk - yn;
    A(:,n) = [xn;yn;ye;ee;yeb;eeb;y2rk;e2rk;y4rk;e4rk];
end
A'
x0 = 0; ye = 2; yeb = 2; ym = 2; yn = 2;
for n = 1:10
    xn = x0 + n * h;
    ye = ye + h * yn * (1 - ye^2);
    yeba = yeb + h * yn * (1 - yeb^2);
    yeb = yeb + h/2 * (yeb * (1 - yeb^2) + yeba * (1 - yeba^2));
    r1 = ym * (1 - ym^2);
    r2 = (ym + h/2 * r1) * (1 - (ym + h/2 * r1)^2);
    ym = ym + h * r2;
```

```
    k1 = yn * (1 - yn^2);
    k2 = (yn + h/2 * k1) * (1 - (yn + h/2 * k1)^2);
    k3 = (yn + h/2 * k2) * (1 - (yn + h/2 * k2)^2);
    k4 = (yn + h * k3) * (1 - (yn + h * k3)^2);
    yn = yn + h/6 * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4);
    ys = sqrt(4 * exp(2 * xn)/(4 * exp(2 * xn) - 3));
    ee = ye - ys;
    eeb = yeb - ys;
    e2rk = ym - ys;
    e4rk = yn - ys;
    B(:,n) = [xn;ys;ye;ee;yeb;eeb;ym;e2rk;yn;e4rk];
end
B'
```

§10.3.2 绘图

(1) 平面向量场及轨线图貌

```
(a) % * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
%         x' = 1 - x^2 - y^2, y' = 2xy,输出见图 10.4(a)
% * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
clear
x0 = -2.8:0.4:2.9;
y0 = -2.8:0.4:2.9;
[x,y] = meshgrid(x0,y0);
d = sqrt((1 - x.^2 - y.^2).^2 + (2 * x. * y).^2);
u = (1 - x.^2 - y.^2)./d;
v = (2 * x. * y)./d;
hold on
quiver(x,y,u,v,0.3,'b')
hold off
x1 = -1:0.01:1;
y1 = sqrt(1 - x1.^2);
```

```
y2 = -sqrt(1 - x1.^2);
x3 = -2.9:.01:2.9;
y3 = zeros(size(x3));
y4 = x3;
x4 = zeros(size(y4));
hold on
plot(x1,y1,'-g',x1,y2,'-g',x3,y3,'-g',x4,y4,'-g')
hold off
[X,Y] = ode45('odeg613a',[0,4.],[.5;1.2]);
hold on
plot(Y(:,1),Y(:,2),'-r')
hold off
[X,Y] = ode45('odeg613a',[0,4.],[.5;-1.1]);
hold on
plot(Y(:,1),Y(:,2),'-r')
hold off
[X,Y] = ode45('odeg613a',[0,1.5],[2.2;0.4]);
hold on
plot(Y(:,1),Y(:,2),'-r')
hold off
[X,Y] = ode45('odeg613a',[0,2.0],[2.2;-0.2]);
hold on
plot(Y(:,1),Y(:,2),'-r')
hold off
==============================================
function dy = odeg613a(x,y)
    dy = [1 - y(1)^2 - y(2)^2;2 * y(1) * y(2)];
==============================================
```

(b)
```
% * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
%         x' = xy, y' = x^2 - y^4,输出见图 10.4(b)
% * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
```

```
clear
xmin = -2;xmax = 2;
```


(a)

(b)

图 10.4

```
ymin = -2;ymax = 2;
axis([xmin,xmax,ymin,ymax])
x0 = xmin + .1:0.4:xmax;
y0 = ymin + .1:0.4:ymax;
[x,y] = meshgrid(x0,y0);
d = sqrt((x. * y).^2 + (x.^2 - y.^4).^2);
u = (x. * y)./d;
v = (x.^2 - y.^4)./d;
hold on
quiver(x,y,u,v,0.3,'b')
hold off
x0 = xmin:0.01:xmax;
y0 = ymin:0.01:ymax;
y1 = y0;
x1 = zeros(size(y1));
x2 = x0;
y2 = zeros(size(x2));
y3 = ymin:0.01:ymax;
x3 = y3.^2;
y4 = y3;
```

```
x4 = - y4.^2;
hold on
plot (x1,y1,'-k',x2,y2,'-k',x3,y3,'--k',x4,y4,'--k')
hold off
[X,Y] = ode45('odeg613d',[0,2.4],[-.2;1.9]);
hold on
plot(Y(:,1),Y(:,2),'-r')
hold off
[X,Y] = ode45('odeg613d',[0,2.4],[.2;1.9]);
hold on
plot(Y(:,1),Y(:,2),'-r')
hold off
[X,Y] = ode45('odeg613d',[0,3.8],[-1.9;-1.27]);
hold on
plot(Y(:,1),Y(:,2),'-r')
hold off
[X,Y] = ode45('odeg613d',[0,2.1],[1.9;-1.277]);
hold on
plot(Y(:,1),Y(:,2),'-r')
hold off
=============================================
function dy = odeg613d(x,y)
    dy = [y(1) * y(2);y(1)^2 - y(2)^4];
=============================================
```

(2) 等高线图

```
% * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
% Ex6.6-2(3),输出见图 10.5
% * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
clear
[X,Y] = meshgrid(-3:.1:3);
H = -2 * X.^2 + 2 * Y.^2 - X.^4;
```

```
mesh(X,Y,H);
contour(X,Y,H,30)
```

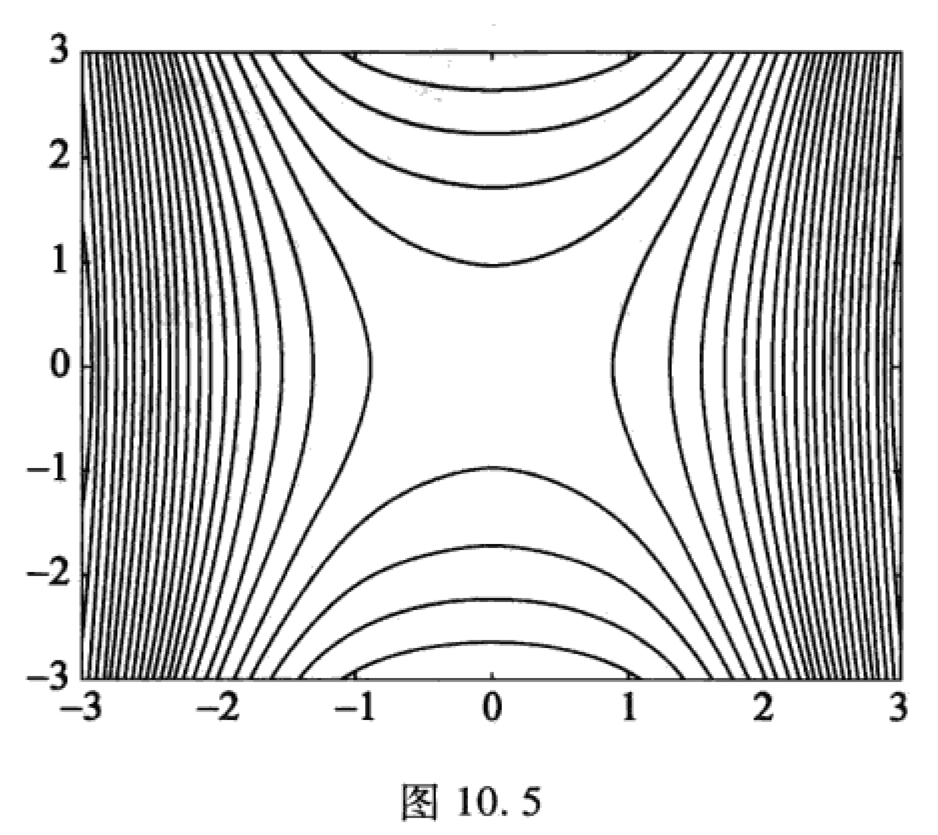


图 10.5

(3) 空间曲线、曲面

```
(a) %* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
 % Ex6.6 -2(3) 曲面,输出见图 10.6(a)
 %* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
clear
[X,Y] = meshgrid( -3:.1:3);
H = -2*X.^2+2*Y.^2-X.^4;
mesh(X,Y,H);
hold on
contour(X,Y,H,30)
hold off
hold on
contour3(X,Y,H)
hold off
(b) %* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
 % Ex6.5 -4(c=13) LorenzEQ, 输出见图 10.6(b)
 %* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
```

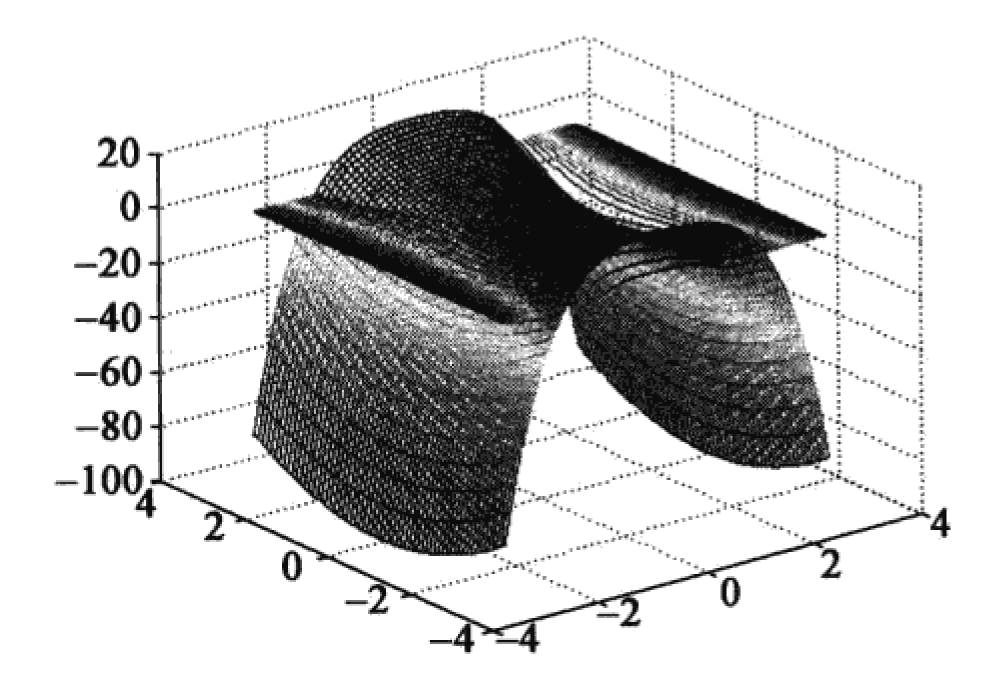


图 10.6(a)

```
clear
global a b c
a = 10;b = 8/3;c = 13;
[T,X] = ode45('LorenzEQ',[0,30],[1;1;0]);
hold on
plot3(X(:,1),X(:,2),X(:,3))
view(-20,60);   % 视角
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z');    % 轴标识
hold off
==================================================
function dx = LorenzEQ(t,x)
    global a b c
    dx = [a * (x(2) - x(1));c * x(1) - x(1) * x(3)...
          - x(2);x(1) * x(2) - b * x(3)];
==================================================
```

(c)
```
% * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
% Ex6.6-6 单孤子图,输出见图 10.6(c)
% * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
clear
a = 2; c0 = 20;
```

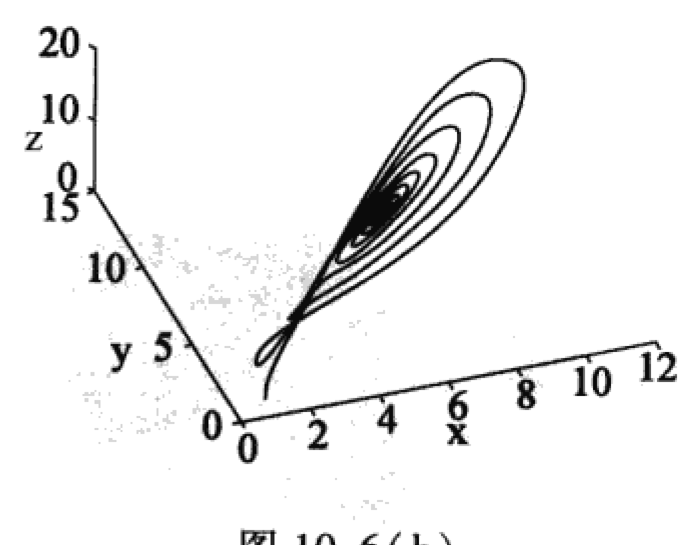


图 10.6(b)

```
[T,X] = meshgrid([ -20:.2:20]);
F = (sech(sqrt(a) * (X - a * T - c0))).^2/2;
mesh(F);
hold on
plot3(T,X,F)
axis([ -20,20, -20,20,0,2])
xlabel('t');ylabel('x');zlabel('f');    % 轴标识
hold off
```

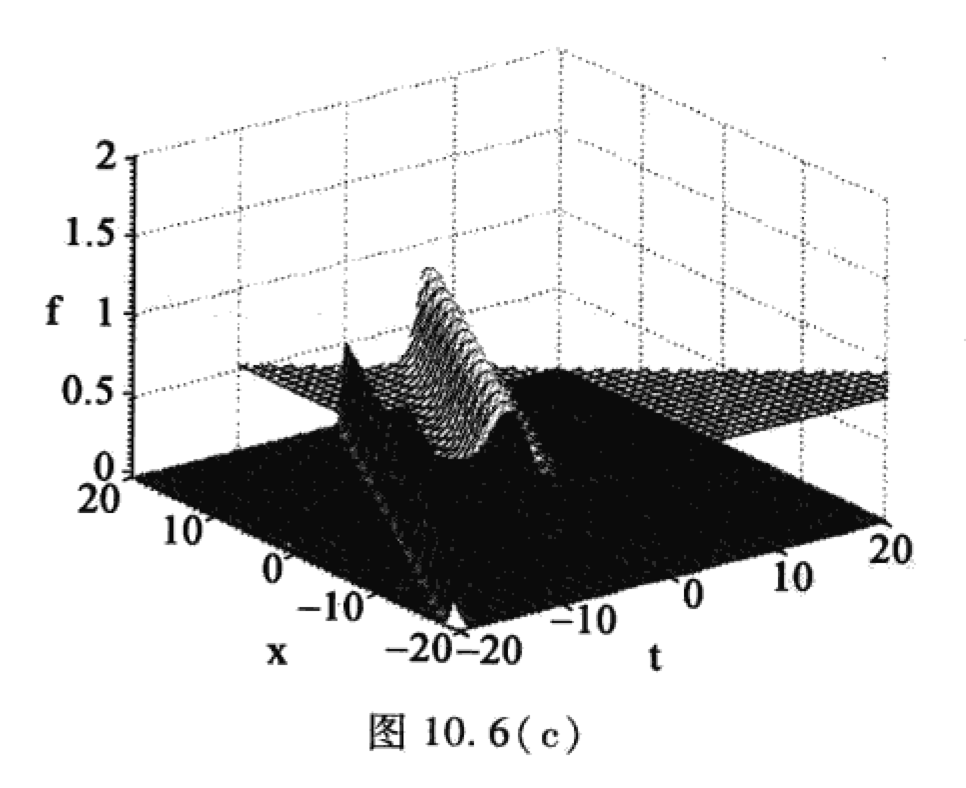


图 10.6(c)

(d)
```
% * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
% Ex6.6-6 双孤子图,输出见图 10.6(d)
% * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
```

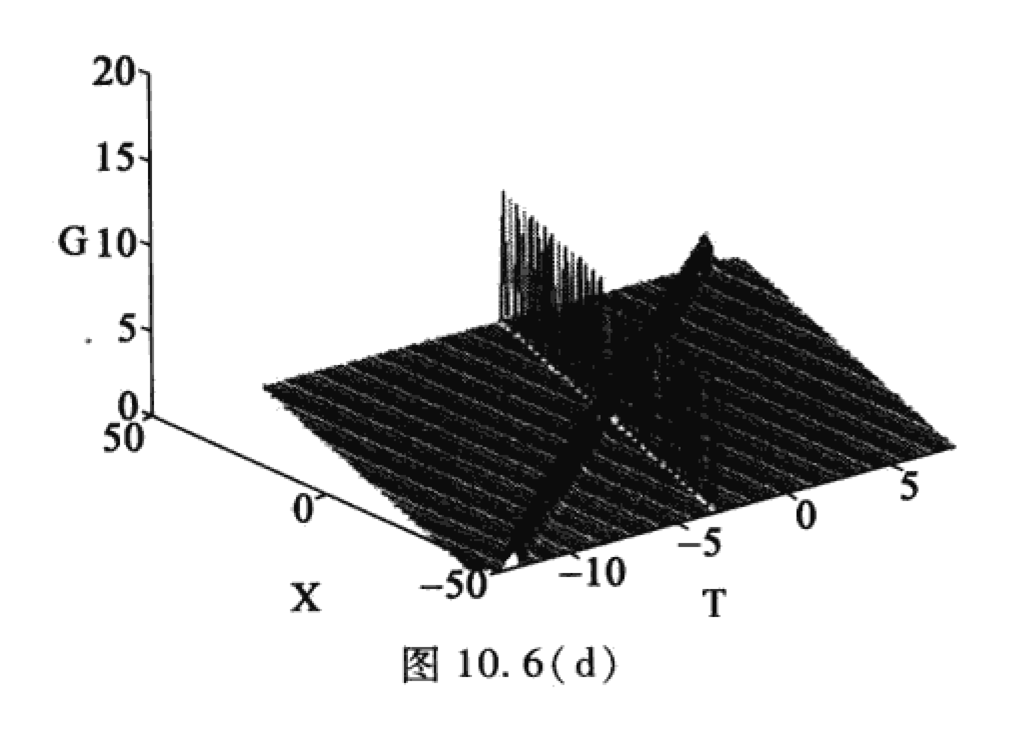


图 10.6(d)

```
clear
[T,X] = meshgrid([-50:.2:50]);
G = 12 * (3 + 4 * cosh(8 * T - 2 * X) + cosh(64 * T - 4 * X))./...
    ((cosh(36 * T - 3 * X) + 3 * cosh(28 * T - X)).^2);
mesh(G);
% hold on
plot3(T,X,G)
axis([-13,8,-50,50,0,20])
xlabel('T');ylabel('X');zlabel('G');    % 轴标识
hold off
```

§10.4 Maple 程序选

§10.4.1 辅助计算

(1) 微分、积分

diff(f,x),d(f),d[1,2,2](f),

int(f,x),int(f,x=a..b),int(f,x=1..infinity).

(2) 求行列式、逆矩阵和转置矩阵

det(A),inverse(A),transpose(A)

(3) 求矩阵特征方程、特征值和特征向量

#Ex5.3 - 3(3),Maple 程序每句执行后即时输出

```
A: = matrix ([[1,2,1],[1, -1,1],[2,0,1]]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
eigenvals(A);
```

$$3, -1, -1$$

```
eigenvects(A);
```

$$[-1,2,\{[-2\ 1\ 2]\}],[3,1,\{[2\ 1\ 2]\}]$$

(4) 求奇点(解方程组)

#Ex6.1 - 3(4)

```
restart:F1: = y - x = 0:
```

$$F2 := y - x^2 - (x - y) * \left(y^2 - 2 * x * y + \frac{2}{3} * x^3 \right) = 0:$$

```
solve({F1,F2},{x,y});
```

$$\{y=0, x=0\},\ \{y=1, x=1\}$$

(5) 微分方程数值解(计算结果见 §3.4.6 - 1)

Ex3.5 - 1

```
f: = proc(y) y * (1 - y^2) end;
fn: = proc(x) sqrt(4 * expand(2 * x)/(4 * expand(2 * x) - 3))   end;
fe: = proc(y) y + h * f(y) end;
fb: = proc(y) local r;r: = y + h * f(y);
      fb: = y + h/2 * (f(y) + f(r));end;
f2: = proc(y) local r1,r2; r1: = f(y);
      r2: = f(y + h/2 * r1); f2 = y + h * r2; end;
f4: = proc(y) local k1,k2,k3,k4; k1: = f(y);
      k2: = f(y + h/2 * k1); k3: = f(y + h/2 * k2);
      k4: = f(y + h/2 * k3); f4: = y + h/6 * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4);
      end;
h: = 0.1; x0: = 0.; yn: = 2.;
for n from 1 to 10 do xn: = x0 + n * h;
```

```
    ye: = fe(yn); yb: = fb(yn); y2: = f2(yn);
    y4: = f4(yn);yn: = fn(xn); ee: = ye - yn;
    eb: = yb - yn; e2: = y2 - yn; e4: = y4 - yn; od;
h: =0.1; x0: =0.; ye: =2; yb: =2; y2: =2; y4: =2; yn: =2.;
for n from 1 to 10 do xn: = x0 + n * h;
ye: = fe(ye); yb: = fb(yb); y2: = f2(y2); y4: = f4(y4);yn: = fn(xn);
     ee: = ye - yn; eb: = yb - yn; e2: = y2 - yn; e4: = y4 - yn; od;
```

§10.4.2 辅助判断

(1) 恰当方程

#Ex2.3 -1(2)

```
restart:m: = y - 3 * x^2;n: = - (4 * y - x);
    {diff(m,y),diff(n,x)};
```

$$\{1\}$$

```
f: = int(m,x);
```

$$yx - x^3$$

```
g: = n - diff(f,y);
```

$$-4y$$

```
ky: = int(g,y);
```

$$-2y^2$$

```
sol: = f + ky = c;
```

$$yx - x^3 - 2y^2 = c$$

(2) 积分因子

#Ex2.3 -2(2)

```
restart:mx: = exp(x) + 3 * y^2:
  ny: = 2 * x * y:
  sxy: = simplify(diff(mx,y) - diff(ny,x));
```

$$4y$$

```
sn: = simplify(sxy/ny) :u: = simplify(exp(int(sn,x)));
```

$$x^2$$

```
f: = int(u * mx, x): g : = simplify(u * ny - diff(f,y)):
    ky : = int(g,y) : sol : = simplify(f + ky = c);
```

$$x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + x^3y^2 = c$$

(3) 里卡蒂方程

(a) #Ex2.5 -5(2), $y' = Py^2 + Qy + R$, $y = A$:

```
restart:P: = x→ -1:Q: = x→2 * sin(x):R: = x→cos(x) - sin^2(x):
    A: = x→sin(x):solz: = dsolve(D(z) (x) + (2 * P(x) · A(x) + Q
    (x)) * z(x) = -P(x),z(x));
```

$z(x) = x + _Cl$

(b) # Ex2.5 -5(7), $y' = py^2 + Qy + R$, $y = A$:

```
restart:P: = x→x - 1:Q: = x→1 - 2 * x:R: = x→x:A: = x→1:
    solz: = dsolve(D(z)(x) + (2 * P(x) * A(x) + Q(x)) * z(x) =
    - P(x),z(x));
```

$z(x) = x + e^x_Cl$

(4) 验证方程组解

Ex5.1 - 1(1)

```
restart:x: = vector([cos(t), - sin(t)]);
```

$$[\cos(t) \quad -\sin(t)]$$

```
A: = matrix([[0,1],[-1,0]]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
evalm(A& * x);
```

$$[-\sin(t) \quad -\cos(t)]$$

```
map(diff,x,t);
```

$$[-\sin(t) \quad -\cos(t)]$$

```
y: = vector([sin(t),cos(t)]);
```

$$[\sin(t) \quad \cos(t)]$$

```
evalm(map(diff,y,t) - evalm(A& * y));
```

$$[0 \quad 0]$$

（5）判断奇点个数和类型

```
# Ex6.1-3(2)
restart:with(DEtools):
Fx:=9*x-6*y+4*x*y-5*x*x:
Fy:=6*x-6*y-5*x*y+4*y*y:
sol:=solve({Fx=0,Fy=0},{x,y});
```

$$sol:=\{y=0,x=0\},\{y=1,x=2\},\{y=2,x=1\}$$

```
m:=nops([sol]);
```

$$m:=3$$

```
for i from 1 to m do
    x0 := eval(x,sol[i]); y0 := eval(y,sol[i]):
    fx0 := radnormal(subs({x=x+x0,y=y+y0},Fx));
    fy0 := radnormal(subs({x=x+x0,y=y+y0},Fy));
    a := subs({y=0,x=0},diff(fx0,x)):
    b := subs({y=0,x=0},diff(fx0,y)):
    c := subs({y=0,x=0},diff(fy0,x)):
    d := subs({y=0,x=0},diff(fy0,y)):
    p := -a-d;q := a*d-b*c; s := p^2-4*q;
    r1 := -1/2*p+1/2*sqrt(s); r2 := -1/2*p-1/2*sqrt(s);
od;
```

$$x0:=0 \qquad y0:=0$$

$$fx0:=9x-6y+4xy-5x^2$$

$$fy0:=6x-6y-5xy+4y^2$$

$$p:=-3 \quad q:=-18 \quad s:=81$$

$$r1:=6 \qquad r2:=-3$$

$$x0:=2 \qquad y0:=1$$

$$fx0:=-7x+2y+4xy-5x^2$$

$$fy0:=x-8y-5xy+4y^2$$

$$p:=15 \quad q:=54 \quad s:=9$$

$$r1:=-6 \qquad r2:=-9$$

$$x0 := 1 \qquad y0 := 2$$

$$fx0 := 7x - 2y + 4xy - 5x^2$$

$$fy0 := -4x + 5y - 5xy + 4y^2$$

$$p := -12 \quad q := 27 \quad s := 36$$

$$r1 := 9 \qquad r2 := 3$$

§10.4.3 绘图

(1) 平面向量场及轨线图貌

Ex6.4 -6(2),输出见图 10.7

restart:with(DEtools):DEplot({D(x)(t) = x(t) · (1 - x(t) + y(t)), D(y)(t) = y(t) · (x(t) - 2 - $\frac{1}{2}$y(t))}, {x(t), y(t)}, t=0..1.0, [[x(0) = 1.2, y(0) = 5], [x(0) = 1.5, y(0) = 5], [x(0) = 1.8, y(0) = 5]], stepsize = .015, scene = [x(t), y(t)], linecolour = blue, thickness = 1, method = classical[foreuler]);

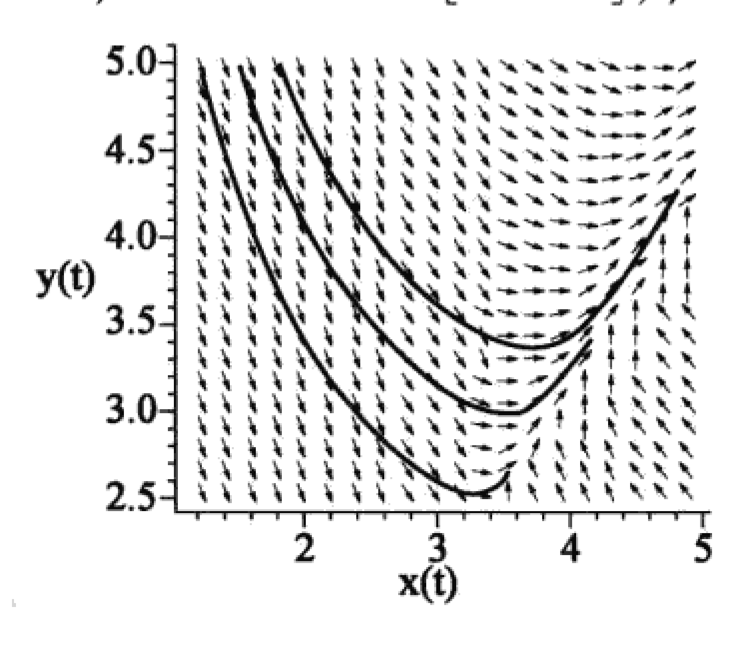


图 10.7

(2) 等高线图

Ex6.6 - 2(1),输出见图 10.8

restart:with(plots):contourplot($\left(\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot y^2 - \frac{1}{3} \cdot x^3\right)$, x = -3..3, y = -3..3, contours = [0.02, 0.05, 0.08, 0.12, 0.18, 0.25, 0.

3,0.5,0.7,1,1.4,1.8,2,2.5,3,3.5,4])

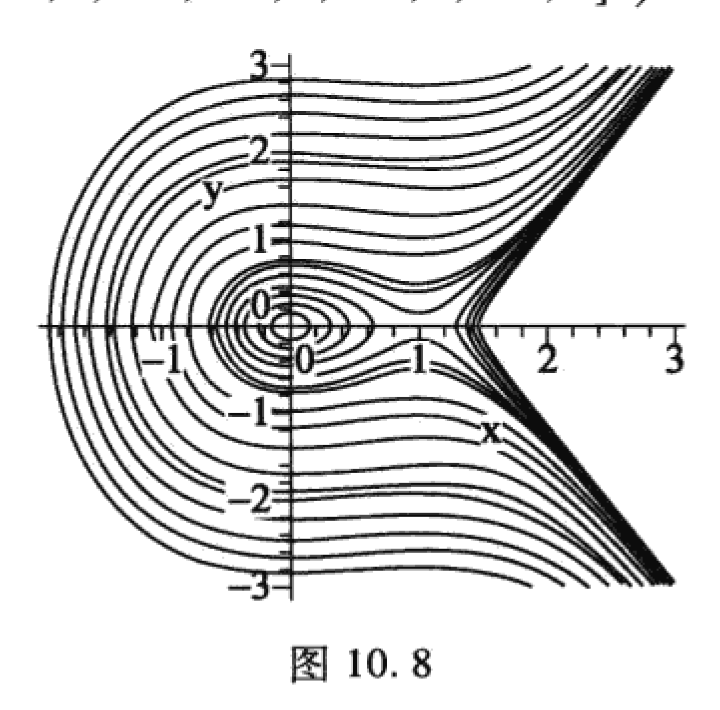


图 10.8

（3）空间曲线、曲面

（a）#6.5-4， Lorenz 方程 a = 10, b = 8/3, c = 60, 输出见图 10.9(a)

```
restart:with(plots):with(DEtools):
DEplot3d({D(x)(t)=10·y(t)-10·x(t),D(y)(t)=60·x(t)-x
    (t)·z(t)-y(t),D(z)(t)=x(t)·y(t)-8/3·z(t)},{x(t),
    y(t),z(t)},t=0..10,[[x(0)=1,y(0)=1,z(0)=0]],step-
    size=.001,scene=[x(t),y(t),z(t)],linecolour=blue,
    thickness=1,orientation=[139,-106]);
```

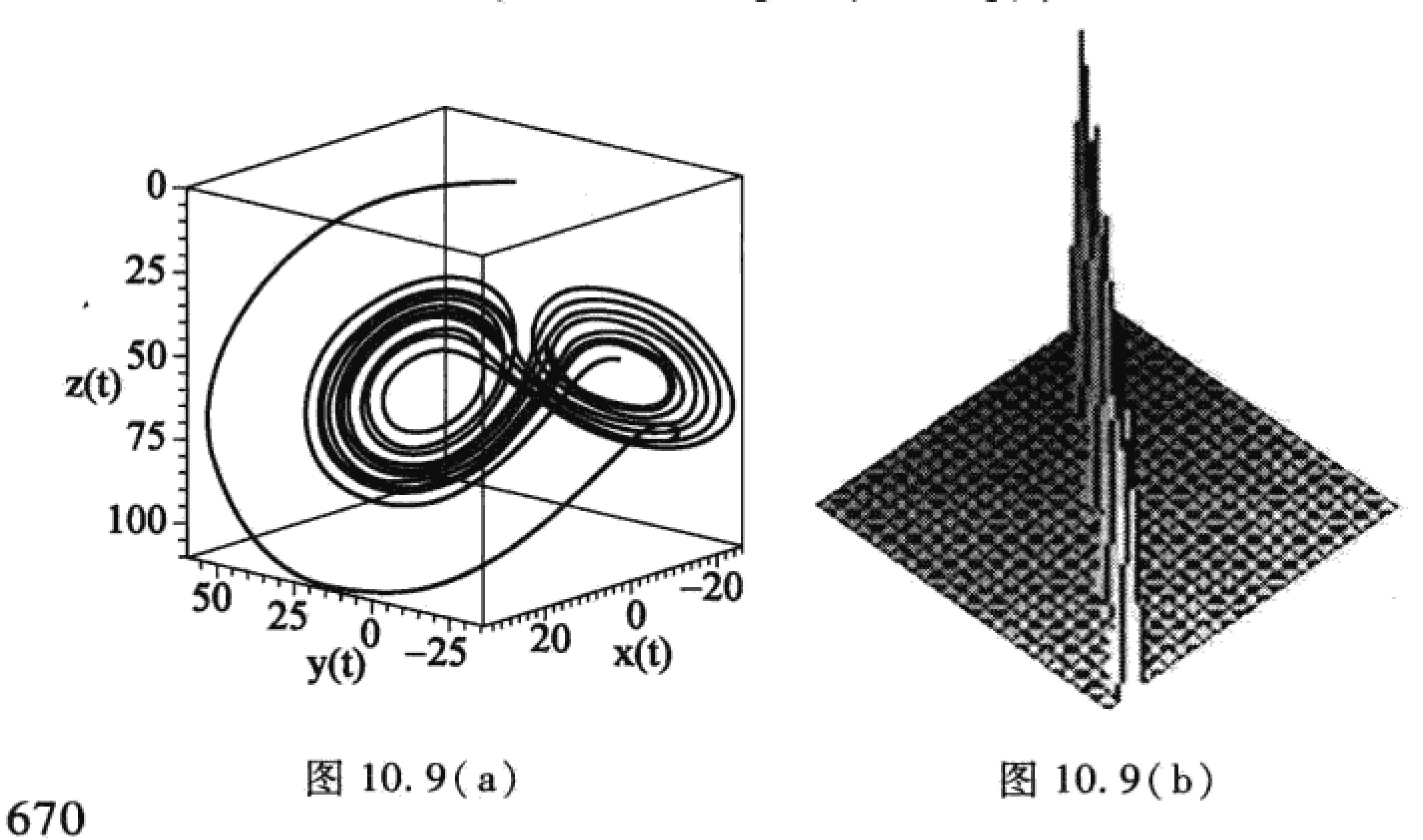


图 10.9(a)　　图 10.9(b)

(b) #6.5.4 - 单孤子图, a = 4, c0 = 0, 输出见图 10.9(b)

```
restart:with(plots):
a:=4;c0:=0;plot3d(sech(12*sqrt(a)*(x-a*t-c0)/2)^2/2,t=
    -3..3,x=-10..10);
```

(c) #Ex6.6-6 双孤子图, 输出见图 10.9(c)

```
restart :with(plots):plot3d(12*(3+4*cosh(8*t-2*x)+cosh(64*t
    -4*x))/(cosh(36*t-3*x)+3*cosh(28*t-x))^2,t=-
    3..3,x=-10..10);
```

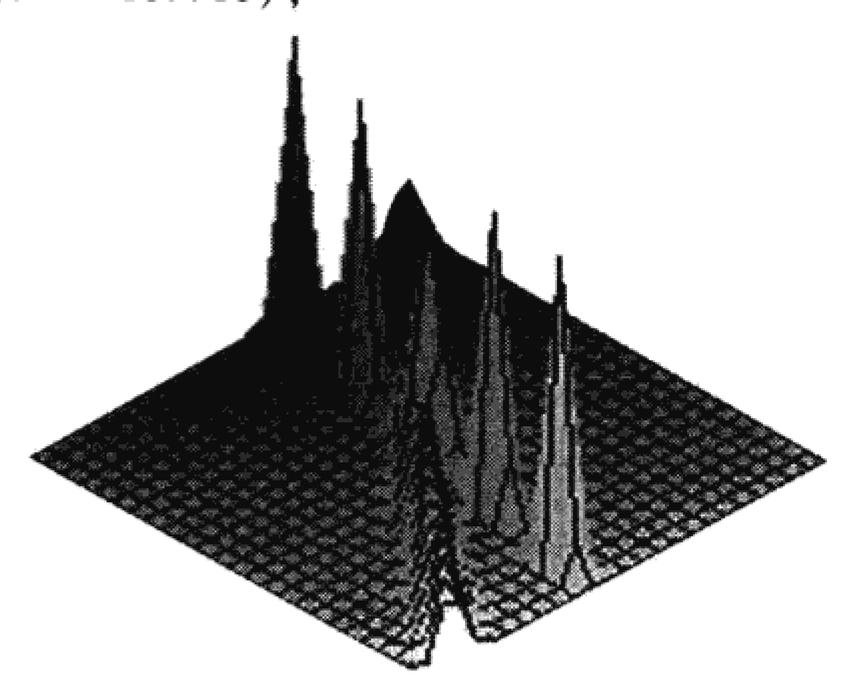


图 10.9(c)

* §10.4.4 微分方程直接求解

(1) 一阶微分方程

Ex2.1 - 2(7)

$$\text{dsolve}\left(\text{D}(y)(x)=\frac{2*x^3+3*x*y(x)^2+x}{3*x^2*y(x)+2*y(x)^3-y(x)},y(x)\right);$$

$$\frac{1}{4}\ln(x^2+y(x)^2)-\frac{5}{4}\ln(x^2-2-y(x)^2)+_C1=0$$

(2) 二阶及高阶微分方程

(a) # Ex4.1 -3(2)

$$\text{restart:dsolve}\left(\text{diff}(x(t),t,t)+\frac{t}{1-t}*\text{D}(x)(t)-\frac{1}{1-t}*x(t)=t-1,x(t)\right);$$

$$x(t)=t_C2+e^t_C1-1-t^2$$

(b) #Ex4.2 -2(8)

```
restart:dsolve(diff(x(t),t,t,t) - x(t) = cos(t),x(t));
```

$$x(t) = -\frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\sin(t) + _C1e^{t} + _C2e^{(-\frac{1}{2}t)}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}t\right) + _C3e^{(-\frac{1}{2}t)}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}t\right)$$

(3) 微分方程组

(a) # Ex5.2 - 9

```
restart:dsolve({D(x1)(t) =2 * x1(t) + x2(t),D(x2)(t) =2 * x2(t) +
    exp(2 * t),x1(0) =1,x2(0) = -1},{x1(t),x2(t)});
```

$$\left\{x2(t) = (t-1)e^{(2t)}, x1(t) = \left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}t\right)e^{(2t)} + \frac{7}{4} + 2xt\right\}$$

(b) # Ex7 - 1(3)

```
restart:dsolve({D(x)(t) =x(t) -2 * y(t),D(y)(t) =x(t) - y(t),x(0)
    =1,y(0) =1},{x(t),y(t)});
```

$$\{x(t) = -\sin(t) + \cos(t), y(t) = \cos(t)\}$$

(4) 微分方程近似解和幂级数解

(a) # Ex3.1 -2

```
eqn: = D(y)(x) = x - y(x)^2;
```

$$(D(y))(x) = x - y(x)^2$$

```
Order: =20:dsolve({eqn,y(1) =0},y(x),series);
```

$$y(x) = \left(x - 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{12}(x-1)^5 + \frac{5}{36}(x-1)^6 - \frac{1}{252}(x-1)^7 - \frac{19}{288}(x-1)^8 - \frac{139}{9072}(x-1)^9 + \frac{817}{30240}(x-1)^{10} + \frac{2839}{199584}(x-1)^{11} - \frac{4891}{544320}(x-1)^{12} - \frac{702311}{77837760}(x-1)^{13} + \frac{156841}{83825280}(x-1)^{14}\right.$$

$$+\frac{38623363}{8172964800}(x-1)^{15}$$

$$+\frac{1022933}{2905943040}(x-1)^{16}-\frac{430105381}{202095129600}(x-1)^{17}$$

$$-\frac{65155823}{90531302400}(x-1)^{18}+\frac{308777390399}{380140938777600}(x-1)^{19}$$

$$+O((x-1)^{20})\Big)$$

(b) # Ex4.3 - 2(3)

```
restart:eqn:=diff(x(t),t,t)-t*diff(x(t),t)-x(t)=0;
```

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t)-\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)t-x(t)=0$$

```
Order:=20:
  dsolve({eqn,x(0)=a,D(x)(0)=b},x(t),series);
```

$$x(t)=\Big(a+bt+\frac{1}{2}at^2+\frac{1}{3}bt^3+\frac{1}{8}at^4+\frac{1}{15}bt^5+\frac{1}{48}at^6$$

$$+\frac{1}{105}bt^7+\frac{1}{384}at^8+\frac{1}{945}bt^9+\frac{1}{3840}at^{10}$$

$$+\frac{1}{10395}bt^{11}+\frac{1}{46080}at^{12}+\frac{1}{135135}bt^{13}$$

$$+\frac{1}{645120}at^{14}+\frac{1}{2027025}bt^{15}+\frac{1}{10321920}at^{16}$$

$$+\frac{1}{34459425}bt^{17}+\frac{1}{185794560}at^{18}+\frac{1}{654729075}bt^{19}$$

$$+O(t^{20})\Big)$$

(5) 矩阵指数、基解矩阵及微分方程组的解

Ex5.3 - 5(3)

```
A:=matrix([[1,2,1],[1,-1,1],[2,0,1]]):
u:=vector([1,0,0]);
```

$$[1\quad 0\quad 0]$$

```
X:=exponential(A*t);
```

$$\Big[\Big[\frac{1}{2}e^{(3t)}+\frac{1}{2}e^{(-t)},te^{(-t)}-\frac{1}{4}e^{(-t)}+\frac{1}{4}e^{(3t)},$$

$$-\frac{3}{8}e^{(-t)}+\frac{3}{8}e^{(3t)}-\frac{1}{2}te^{(-t)}\Bigg],$$

$$\Bigg[-\frac{1}{4}e^{(-t)}+\frac{1}{4}e^{(3t)},-\frac{1}{2}te^{(-t)}+\frac{7}{8}e^{(-t)}+\frac{1}{8}e^{(3t)},$$

$$\frac{1}{4}te^{(-t)}-\frac{3}{16}e^{(-t)}+\frac{3}{16}e^{(3t)}\Bigg],$$

$$\Bigg[-\frac{1}{2}e^{(-t)}+\frac{1}{2}e^{(3t)},-te^{(-t)}-\frac{1}{4}e^{(-t)}+\frac{1}{4}e^{(3t)},$$

$$\frac{3}{8}e^{(3t)}+\frac{5}{8}e^{(-t)}+\frac{1}{2}te^{(-t)}\Bigg]\Bigg]$$

```
x: = evalm(X& · u);
```

$$\Bigg[\Big[\frac{1}{2}e^{(3t)}+\frac{1}{2}e^{(-t)},-\frac{1}{4}e^{(-t)}+\frac{1}{4}e^{(3t)},-\frac{1}{2}e^{(-t)}+\frac{1}{2}e^{(3t)}\Big]\Bigg]$$

（6）用拉普拉斯变换求微分方程组的解

```
# Ex5.3 -9 -6(2)
restart :with(inttrans):
L: = laplace( {diff(xl(t),t) = x2(t),
diff(x2(t),t) = x3(t),
diff(x3(t),t) = -6 * xl(t) -11 * x2(t) -6 * x3(t) +exp( -t)},t,s);
```

$$\Big\{s\ laplace(x1(t),t,s)-x1(0)=laplace(x2(t),t,s),$$

$$s\ laplace(x2(t),t,s)-x2(0)=laplace(x3(t),t,s),$$

$$s\ laplace(x3(t),t,s)-x3(0)$$

$$=-6\ laplace(xl(t),t,s)-11\ laplace(x2(t),t,s)$$

$$-6\ laplace(x3(t),t,s)+\frac{1}{1+s}\Big\}$$

```
L1 : = subs(xl(0) =0,x2(0) =0,x3(0) =0,
      laplace(x1(t),t,s) = X1(s),laplace(x2(t),t,s) = X2(s),
      laplace(x3(t),t,s) = X3(s),L);
```

$$\Big\{sX1(s)=X2(s),sX2(s)=X3(s),$$

$$sX3(s)=-6X1(s)-11X2(s)-6X3(s)+\frac{1}{1+s}\Big\}$$

```
soL1 := solve(L1, {X1(s), X2(s), X3(s)});
```

$$\left\{X3(s)=\frac{s^2}{7s^3+6+17s+17s^2+s^4},\right.$$

$$X2(s)=\frac{s}{7s^3+6+17s+17s^2+s^4},$$

$$\left.X1(s)=\frac{1}{7s^3+6+17s+17s^2+s^4}\right\}$$

```
x1 := invlaplace(soL1[3], s, t);
```

$$invlaplace(X1(s),s,t)$$

$$=-\frac{1}{4}e^{(-3t)}+e^{(-2t)}+\frac{1}{4}e^{(-t)}(2t-3)$$

```
x2 := invlaplace(soL1[2], s, t);
```

$$invlaplace(X2(s),s,t)$$

$$=\frac{3}{4}e^{(-3t)}-2e^{(-2t)}-\frac{1}{4}e^{(-t)}(2t-5)$$

```
x3 := invlaplace(soL1[1], s, t);
```

$$invlaplace(X3(s),s,t)$$

$$=-\frac{9}{4}e^{(-3t)}+4e^{(-2t)}+\frac{1}{4}e^{(-t)}(2t-7)$$

（7）解偏微分方程

（a）# Ex7 -2(3)

```
pdsolve(x^2 * diff(z(x,y),x) - x * y * diff(z(x,y),y) + y^2 = 0,
    z(x,y));
```

$$z(x,y)=\frac{1}{3}\frac{y^2}{x}+_F1(x\,y)$$

（b）# Ex7 -2(9)

```
restart: with(PDEtools):
pdsolve({x * diff(z(x,y),x) - y * diff(z(x,y),y) = z(x,y),
z(x,1) = 3 * x}, z(x,y));
```

$$\{z(x,y)=_F1(yx)x\}$$

§ 10.5 SCILAB 程序选

§ 10.5.1 辅助计算

(1) 矩阵计算

```
//* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
// Ex5.3 -3(1)
//* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
clear
A=[0 1 0;0 0 1; -6 -11 -6];
A'
det(A)
inv(A)
spec(A)
[v,d,s]=bdiag(A)
expm(A)

//p=poly(A,"x","coeff")
//xv=roots(p)

x=poly(0,"x");
E=eye(3,3);B=E*x-A;
q=det(B)
roots(q)
```

输出:

```
ans  =    0.        0.        -6.       ans      = -6.
          1.        0.        -11.
          0.        1.        -6.
ans  =  -1.8333333  -1.     -0.1666667
          1.         0.      0.
```

```
              0.              1.      0.
ans   =    - 1.     - 2.     - 3.
s     =     1.       1.       1.
d   =    - 0.1740777     0.2666846    - 0.6731456
           0.1740777   - 0.5333693      2.0194368
         - 0.1740777     1.0667385    - 6.0583104
v   =    - 1.    0.    0.
           0.  - 2.    0.
           0.    0.  - 3.
ans   =     0.7474195     0.4530381     0.0734980
          - 0.4409878   - 0.0610581     0.0120502
          - 0.0723015   - 0.5735405   - 0.1333596
q   =                        2    3
          6  +  11x  +  6x  +  x
ans   =   - 1.        - 2.        - 3.
```

(2) 求特征值

```
(a) //* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
// §6.2.2 -2(1)
//* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
clear
x = poly(0,"x");
p = x^4 + 2 * x^3 + 4 * x^2 + 3 * x + 2;
roots(p)
```

输出:

```
  ans   =    - 0.5 + 0.8660254i
             - 0.5 - 0.8660254i
             - 0.5 + 1.3228757i
             - 0.5 - 1.3228757i
```

```
(b) //* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
// §6.2.2 -2(4)
//* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
```

```
clear
x = poly(0,"x");
dx = det([ -1 -x,0,1;2, -x, -1;0, -1, -x -1])
y = roots(dx)
```

输出:

```
 dx  =          2   3
         -1 -2x -x
 y   =    0.1027847 +0.6654570i
          0.1027847 -0.6654570i
         -2.2055694
```

```
(c)//* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
// Ex6.1 -4(1)
//* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
clear
x = poly(0,"x");
p = x^3 +5 * x^2 +6 * x +1;
roots(p)
```

输出:

```
 ans  =  -0.1980623
         -1.5549581
         -3.2469796
```

(3) 求奇点(驻定解),解代数方程组

应用非线性方程组求解函数 fsolve,需给出初值.最好先通过绘制右端函数图知两函数曲线有多少个交点,并以附近点为初值计算.fsolve 基本格式为

[x,[,v[,info]]] = fsolve(x0,fct[,fjac][,tol])

其中,x0 为方程求解的初值(实向量);fct 和 fjac 为用字符串表示的方程组;tol 为中止计算的相对误差(实数),缺省值为 tol = 1.d -10;x 为方程组过零点的向量解;v 为实向量,相当于方程 v(x)的解;info 为求解信息(0:输入出错;1:求解结果达到 tol 要求;

2:求解结果未达到 tol 要求,程序以最大迭代次数中止计算;3. tol 给定值太小;4:计算结果不收敛).

(a)
```
//* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
// Ex6.1-3(1) 解为 (0,0),(0,2),(1,0),(0.5,0.5)
//* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
clear
deff('[y]=fsol(x)','y(1)=x(1)*(1-x(1)-x(2)),
y(2)=1/4*x(2)*(2-3*x(1)-x(2))');
[x1,f1,IN1]=fsolve([0.1;0],fsol)
[x2,f2,IN2]=fsolve([1;10],fsol)
[x3,f3,IN3]=fsolve([10;1],fsol)
[x4,f4,IN4]=fsolve([1;2],fsol)
```

输出:

```
IN1  =  1.     f1  =  0.  0.      x1  =  0.  0.
IN2  =  1.     f2  =  1.0D-14 *  0.5002454  0.2220446
x2   =  -5.002D-15  2.
IN3  =  1.     f3  =  1.0D-15 *  0.1157740  0.0289435
x3   =  1. -1.158D-16
IN4  =  1.     f4  =  0.  0.      x4  =  0.5  0.5
```

(b)
```
//* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
// Ex6.1-3(4)  解为 (0,0),(1,1)
//* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
clear
deff ('[y]=fsol(x)','y(1)=x(2)-x(1),y(2)=x(2)-x(1)^2-
    (x(2)-x(1))*(x(2)^2-2*x(1)*x(2)+2/3*x(1)^3)');
[x1,f1,IN1]=fsolve([0.1;0.1],fsol)
[x2,f2,IN2]=fsolve([1;10],fsol)
[x3,f3,IN3]=fsolve([10;1],fsol)
[x4,f4,IN4]=fsolve([10;10],fsol)
```

输出:

```
IN1  =   1.    f1  =   0.  0.    x1  =   0.  0.
```

```
IN2  =  1.   f2  =  0.  0.   x2  =  1.  1.
IN3  =  1.   f3  =  0.  0.   x3  =  1.  1.
IN4  =  1.   f4  =  0.  0.   x4  =  1.  1.
```

(4) 微分方程数值解 Ex3.5 - 1

程序可与 § 10.3.1 -(4)全同. 但注意 MATLAB 的注释% 要改为//.

```
//**************************
//    Ex3.5 - 1    f(y) = y(1 - y^2)
//**************************
```

(5) 微分方程组的直接求解

求微分方程 $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 12$ 的通解.

令 $x_1 = y, x_2 = y', x_3 = y''$, 则微分方程化为方程组

$$x' = Ax + f(t),\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

```
// ********SCILAB  程序**********
clear
A = [0 1 0;0 0 1; -6  -11  -6];
[J,T] = bdiag(A)
```

输出:

```
T  =    -0.1740777    0.2666846   -0.6731456
         0.1740777   -0.5333693    2.0194368
        -0.1740777    1.0667385   -6.0583104
J  =    -1.   0.   0.
         0.  -2.   0.
         0.   0.  -3.
```

加上观察得方程组有特解 $\boldsymbol{x}=[2,0,0]^{\mathrm{T}}$,得方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} -0.174\,077\,7\mathrm{e}^{-t} & 0.266\,684\,6\mathrm{e}^{-2t} & -0.673\,145\,6\mathrm{e}^{-3t} \\ 0.174\,077\,7\mathrm{e}^{-t} & -0.533\,369\,3\mathrm{e}^{-2t} & 2.019\,436\,8\mathrm{e}^{-3t} \\ -0.174\,077\,7\mathrm{e}^{-t} & 1.066\,738\,5\mathrm{e}^{-2t} & -6.058\,310\,4\mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}\boldsymbol{c}+\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{c}$ 为任意常向量.原方程的解为

$$y=-0.174\,077\,7c_1\mathrm{e}^{-t}+0.266\,684\,6c_2\mathrm{e}^{-2t}-0.673\,145\,6c_3\mathrm{e}^{-3t}+2.$$

§10.5.2 绘图

(1) 平面向量场及轨线图貌

(a) //* *

// gLK.sci Lotka - Volterra ODE x' = x(3 - 2y), y' = y(x - 2), 输出见图 10.10(a)

```
//* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
clear
xbasc()              //清理图形
xset("pixmap",0);    //直接显示
deff("dy = f(t,y)",..
    ["dy1 = aa * y(1) - cc * y(1) * y(2)";..
     "dy2 = - bb * y(2) + ff * y(1) * y(2)";..
     "dy = [dy1;dy2]"]);
aa = 3; bb = 2; cc = 2; ff = 1;
xmin = 0; xmax = 4; ymin = 0; ymax = 4;
fx = xmin:0.5:xmax;
fy = ymin:0.5:ymax;
x0 = xmin:.01:xmax;
y0 = aa/cc * ones(x0);
y1 = ymin:.01:ymax;
x1 = bb/ff * ones(y1);
plot(x0,y0);
plot(x1,y1);
fchamp(f,1,fx,fy);       //等倾斜线
```

```
xset("font",4,18);
xtitle([""],["Y1"],["Y2"]);
xset("thickness",3);    //线宽
t0 =0; tmax =5;
t = t0:0.05:tmax; rtol =0.0001; atol = rtol;
x0 =1; y0 =2;
sol = ode([x0;y0],t0,t,rtol,atol,f);
plot2d(sol(1,:),sol(2,:))
x0 =2; y0 =3;
sol = ode([x0;y0],t0,t,rtol,atol,f);
plot2d(sol(1,:),sol(2,:))
x0 =2; y0 =2;
sol = ode([x0;y0],t0,t,rtol,atol,f);
plot2d(sol(1,:),sol(2,:))
```


(a)

(b)

图 10.10

(b) //* *

// gvdPeq. sci van de Pol EQ $x' = y - c(x^3/3 - x), y' = -x$，输出见图 10.10(b)

```
//* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
clear
xbasc()                //清理图形
xset("pixmap",0);     //直接显示
```

```
deff("dy=f(t,y)",..
    ["dy1=y(2)-cc*(y(1).^3/3-y(1))";..
     "dy2=-y(1)";..
     "dy=[dy1;dy2]"]);
cc=1;
xmin=-4; xmax=4; ymin=-4; ymax=4;
fx=xmin:0.5:xmax;fy=ymin:0.5:ymax;
x0=xmin+0.001:.1:xmax;y0=zeros(x0);y1=x0./(cc*(1-x0.^
    2));
plot2d(x0,y0,rect=[-4,-4,4,4])
plot2d(x0,y1,rect=[-4,-4,4,4])
fchamp(f,1,fx,fy)
xset("font",4,18);xtitle([""],["Y1"],["Y2"]);
xset("thickness",2);   //线宽
rtol=0.0001; atol=rtol;t0=0;
tmax=8;t=t0:0.05:tmax;
x0=-3; y0=2;
sol=ode([x0;y0],t0,t,rtol,atol,f);
plot2d(sol(1,:),sol(2,:),rect=[-4,-4,4,4])
tmax=8;t=t0:0.05:tmax;
x0=2; y0=-3;
sol=ode([x0;y0],t0,t,rtol,atol,f);
plot2d(sol(1,:),sol(2,:),rect=[-4,-4,4,4])
tmax=10;t=t0:0.05:tmax;
x0=.3; y0=.3;
sol=ode([x0;y0],t0,t,rtol,atol,f);
plot2d(sol(1,:),sol(2,:),rect=[-4,-4,4,4])
```

（2）等高线图

```
//*****************************
// Ex6.2-1(5)   g6215     V = xcosx + ysiny,输出见图
10.11
```

```
//* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
deff('[z] = Surf1(x,y)','z = x * cos(x) + y * sin(y)');
x = -%pi:0.1:%pi; y = x;
contour(x,y,Surf1,20);
```

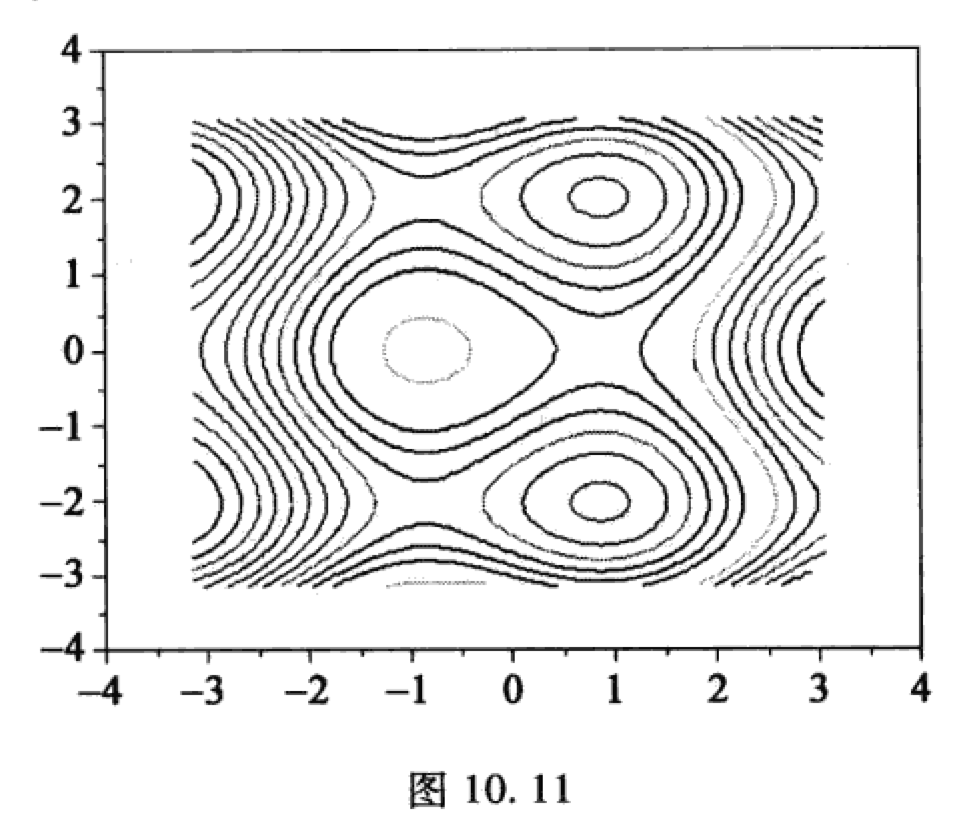


图 10.11

(3) 空间曲线、曲面

(a) 输出见图 10.12(a)

```
deff('[z] = Surf1(x,y)','z = x^2 + y^3');
x = -1:0.1:1; y = x;
subplot(211);contour(x,y,Surf1,10);
deff('[z] = Surf2(x,y)','z = x^2 + y^2');
z = eval3d(Surf2,x,y)
subplot(212);plot3d(x,y,z);contour(x,y,z+0.1,10,flag=[0,2,4]);
```

(b)

```
//* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
//   Ex6.5-4    Lorenz 方程    a=10,b=8/3,c=28
//        x'=a(y-x),y'=cx-y-xz,z'=-bz-xy,输出见图 10.12(b)
//   \scilab demos\simulation\ODE's\lorenz equation
//* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
deff('[ydot] = lorenz(t,y)',...
```

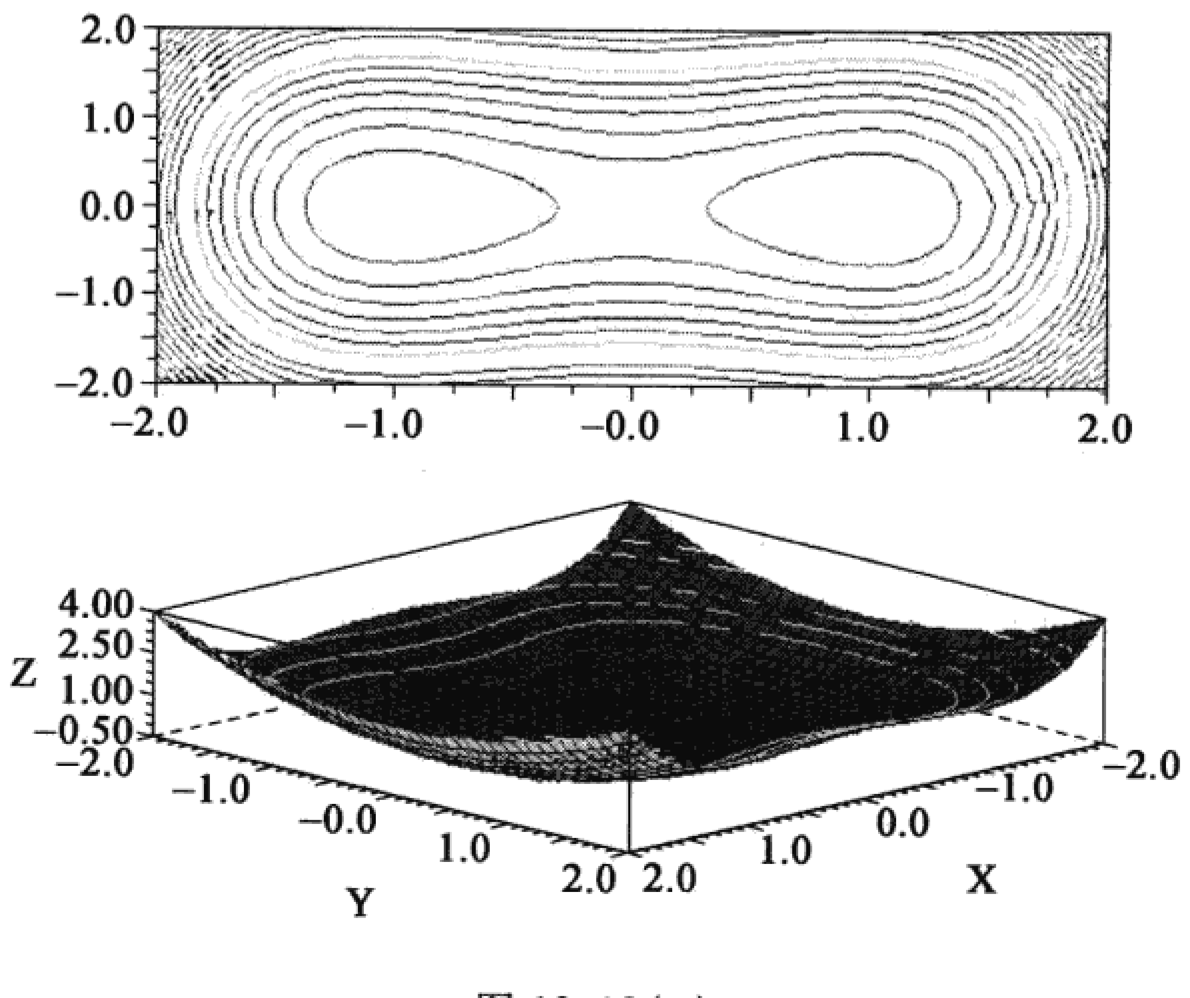


图 10.12(a)

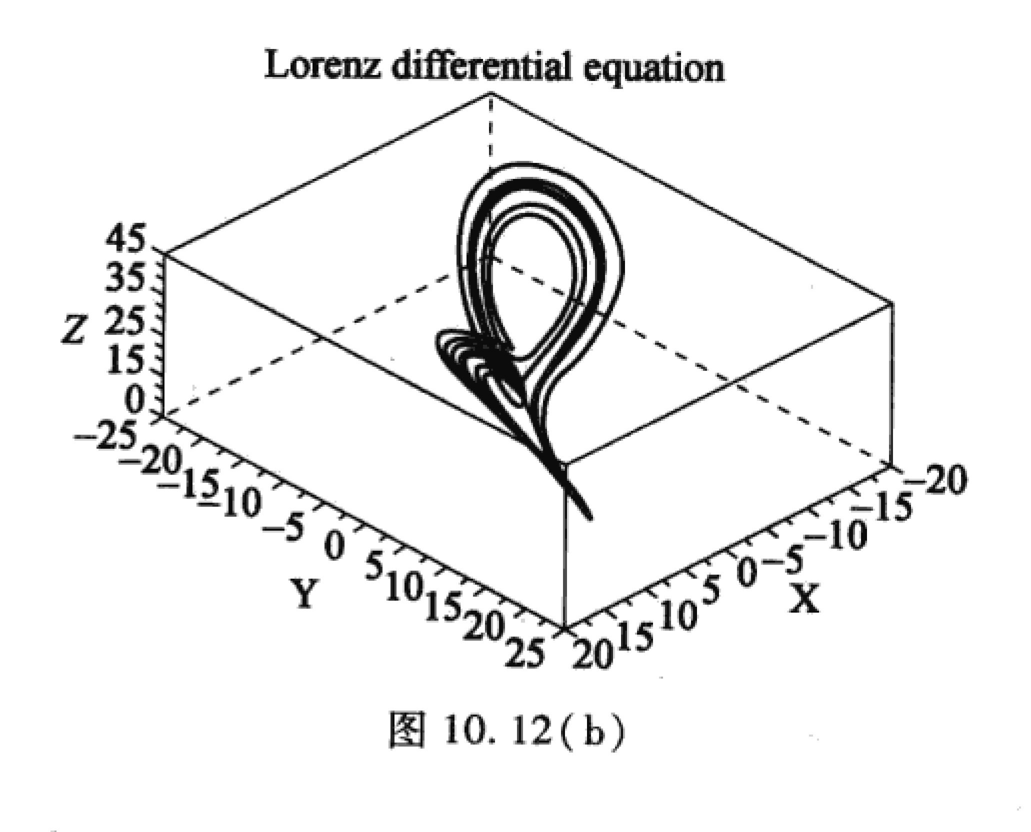


图 10.12(b)

```
// Copyright INRIA
"x = y(1);...
a = [ -10,10,0;28, -1, -x;0,x, -8/3];...
ydot = a * y")
deff('[j] = jacobian(t,y)',...
```

```
"x = y(1);yy = y(2);z = y(3);...
j = [ -10,10,0;28 - z, -1, -x; -yy,x, -8/3]")
y0 = [ -3; -6;12];t0 = 0;step = 0.01;t1 = 10;
instants = t0:step:t1;
y = ode(y0,t0,instants,lorenz,jacobian);
xbasc(0);param3d(y(1,:),y(2,:),y(3,:))
```

（4）传递函数方法(时域响应曲线)

对非齐次常系数线性微分方程(组)，可用拉普拉斯变换化为代数方程(组)，求解代数方程(组)后，再通过反拉普拉斯变换得到微分方程(组)的解. SCILAB 中线性微分方程(组)可作为线性控制系统，应用系统与控制程序库中的各种函数(如传递函数)代替拉普拉斯变换进行处理.

例 二阶微分方程 $x''+2x=\sin t, x(0)=x'(0)=0$ 的时域响应曲线图.

记 $x(t)$ 的拉普拉斯变换 $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$，则方程经拉普拉斯变换后化为

$$s^2X(s)+2X(s)=\frac{1}{s^2+1}, X(s)=\frac{1}{(s^2+2)(s^2+1)}.$$

可直接应用系统与控制中的 syslin、csin 函数的时域响应曲线图.

```
// * * * * * * x" - 2x = sin t,输出见图 10.13 * * * * * *
```

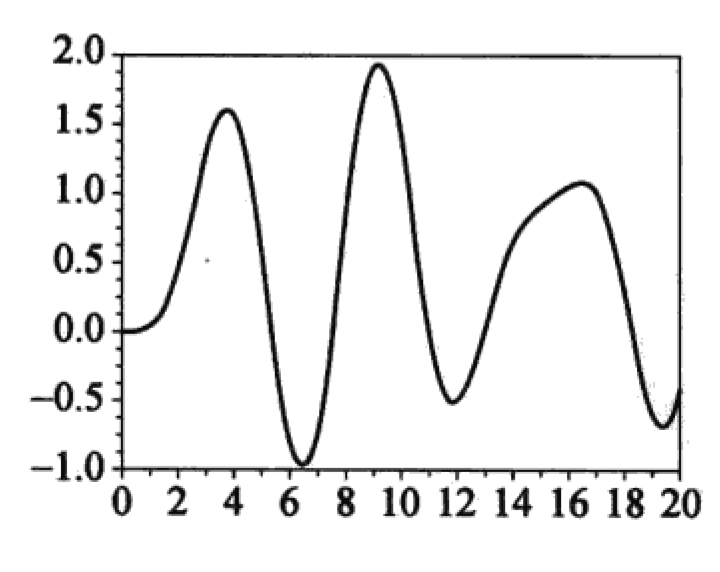


图 10.13

```
s = poly(0,'s')
sl = syslin('c',1/((s * s + 2) * (s * s + 1)))
```

```
x = 0:0.01:20;
y = csim('step',x,sl);
plot2d(x',y')
```

§10.5.3 SCILAB Demos(演示)

(1) 演示

在 SCILAB4.1.2 版本中已和 MATLAB 类似有很完整的帮助条目供索引查询.可在界面上点击“? /SCILAB Help”或直接按 F1 键.SCILAB 中还有足够多的实例演示供使用及参考.这可在“? /SCILAB Demos”中找到.如对常微分方程,可通过“? /SCILAB Demos/Graphics/2D and 3D”中找到 2 维图形 plot2d, 3 维图形 plot3d,向量场 champ,fchamp 及等高线图 contour,fcontour 的例子,而在“? /SCILAB Demos/Simulation/ODE'S”则有洛伦茨方程的例子.在调用这些实例时会显示有关程序,可通过这些程序学习脚本文件的编写,也可以复制这些程序并改变其方程而绘制出自己需要的图形.在 SCILAB Demos 中还有对我们学习研究常微分方程很有帮助的动画显示与动态绘图.

(2) 动画显示

SCILAB 的范例中可以进行动画显示与动态绘图.在 SCILAB 的界面上点击“? /SCILAB Demos/Graphics/Animation”,会出现 8 个可旋转 360°的立体曲线、曲面图形,其中有“Lorenz curve (param3d)”旋转显示洛伦茨方程的立体图像.可仿照修改方程定义而显示其他方程的 3 维图形.

(3) 动态绘图

在“? /SCILAB Demos/Simulation/ODE'S”有 7 个常微分方程图形显示.其中“Lorenz equation”、“Van de Pol vector field”和“Lotka – Volterra vector field”分别动态绘制向量场和轨线图.其中“Lorenz equation”仅显示洛伦茨方程的立体图像(不旋转).而后两种则先在图形窗口显示 Van de Pol 或 Lotka – Volterra 方程,用

“File/Close”关闭图形窗口后再在 SCILAB 主窗口的“halt --> ”中按“Enter”键，则会出现向量场图形，用鼠标移动十字会在图形窗口中出现通过该位置的轨线，轨线随着鼠标的移动而移动，放手并点击轨线将固定该轨线，移动鼠标后再点击又会出现另一条轨线．这样可在向量场图形中画出多条轨线，点击鼠标右键后退出．非常方便绘制多条轨线的轨线图貌．复制、修改其中的方程便可以对其他方程绘制向量场和轨线图貌．

附录 I　科学计算自由软件 SCILAB

§1　SCILAB 使用[47]

科学计算自由软件 SCILAB 于 1994 年由法国国立信息与自动化研究院(INRIA)推出,是一种可以免费自由获取和使用的科学计算"开放源码"软件. SCILAB 软件主要用于科学计算,有强大的计算、数据可视化功能及专用的工具箱,还可以自行扩充. SCILAB的句法、功能和使用与行业软件 MATLAB 相类似,完全满足数学包括常微分方程的教学和研究的需要. 但又避免支付昂贵的软件使用费. 特别适合学生、教师个人使用. SCILAB 是由 Scientific Laboratory(科学实验室)两字的头三个字母组成. 可以通过网站如 SCILAB 主页 http://www-rocq. inria. fr/scilab 或 SCILAB 中国网站 http://www. scilab. org. cn 下载.

1. **使用速成**　SCILAB 有直接交互运行的指令行操作和运行程序文件两种方式,均通过 SCILAB 界面运行.

(1) **直接交互运行**　点击图标 SCILAB3. 0→在运行窗口"- ->"右侧输入指令(程序)→按[Enter]键运行→输出结果→再在运行窗口"- ->"右侧输入指令→按[Enter]键运行→输出结果……直至结束. 当直接定义函数时用 endfunction 指令表示结束.

(2) **编写运行程序**　点击图标 SCILAB3. 0→菜单[Editor]→编写执行程序→存储为 ** . sci 文件→退出[Editor];[File]→Change Directory(改变当前目录)→输入 ** . sci 文件目录→Exec

[** . sci] (执行) →检查/处理运算结果→quit (退出 SCILAB).
注:如当前目录中已含 ** . sci 文件,则可不改变当前目录.

(3) **编辑程序**　clear 清除内存中变量和函数;break 中止最内循环;pause 暂停;global 定义全局变量;"//"注释;" = "赋值;","分句;";"分行(不显示);[Enter]换行(显示结果);[, *]、[* ,] * 为可选项(非矩阵符).

(4) **操作或运行程序**　[Control] Abort 取消运行;Resume 恢复;Interrupt 中断.

2. **数值运算**　以矩阵(包括标量、向量)为基本量,[ ]括之,标量[a]同 a. 如 v = [1,2,3;4,5,6.1]表 2 行、3 列矩阵,方括号中","可用空格代之. A(i,j)表 A 的第 i 行第 j 列元素,如 v(2,3) = 6.1. 而 v(: ,2) = [2;5],v(2,2:3) = [5,6.1]. x = 1:.5:3 表 x = [1 1.5 2 2.5 3],而 a = 1:3 表 a = [1 2 3].

(1) **生成**　标量 v = 4;向量 v = [1,2,3,4,5,6.1];
u = 1:5;u = [1,2,3,4,5];
x = linspace(d1,d2,n) d1 与 d2 间均匀分布 n 个值;
y = logspace(d1,d2,n) d1 与 d2 间均匀分布 n 个对数值;
矩阵 v = [1,2,3;4,5,6.1];
zeros(m1,m2,…,mn) m1 × m2 × … × mn 全零阵;
zeros(A) 生成与 A 同维全零阵;zeros( ) 生成单零值.
ones (m1,m2,…,mn) m1 × m2 × … × mn 全 1 阵;
ones(A)生成与 A 同维全 1 阵;ones( ) 单 1 值.
eye(m,n) m × n 对角阵;eye(A)生成与 A 同维单位阵;
eye( ) 单 1 值.
rand(m1,m2,…,mn) m1 × m2 × … × mn 均匀分布随机阵;
read(A)与 A 同维均匀分布随机阵;read( )随机值.

(2) **内部常数**　ans 最近计算结果;% eps 浮点运算精度;% inf 无穷大;% pi 圆周率;% i 虚数单位;% nan 无效数值;% T,% t,% F,% f 布尔量真假.

（3）**基本运算**　A + B、A − B、A. * B、A. /B、A. ^B 为同维矩阵相应元素的 +、−、*、/、^；而 A * B、A^k、A^(−1)则为矩阵相乘、k 次自乘、逆阵(inv(A))；A′表 A 的转置；A\B、A/B 矩阵左、右除；A. \B、A. /B 同维矩阵相应元素左、右除.

（4）**关系运算**　==、>、<、> =、< =、< >　等于、大于、小于、大于等于、小于等于、不等于.

（5）**逻辑运算**　&、|、~　与、或、非.

3. **矩阵函数**　matrix(v,n,m) 将向量或数组 v 转为 n × m 矩阵；

tril(x [,k]) 提取下三角元素，k > 0 扩大 k 级，k < 0 缩小 −k 级，默认 k = 0；

triu(x [,k]) 提取上三角元素，k > 0 缩小 k 级，k < 0 扩大 −k 级，默认 k = 0；

diag(vm [,k]) vm 向量时生成对角矩阵，vm 矩阵时提取对角元素为向量，k > 0 提取上第 k 条对角元素，k < 0 提取下第 −k 条对角元素，默认 k = 0；

size 求维数；　length 向量长度；　spec 特征值；　det 行列式；
rank 矩阵秩；　trace 矩阵迹；　inv　矩阵逆；　' 转置；

[Ab [,X [bs]]] = bdiag(A) 求 A 的分块对角矩阵 Ab(子块均为 1 时对角元素为特征值)、特征向量 X、分块大小 bs.

4. **数学函数**

（1）**基本函数**　acos 反余弦；　acosh 反双曲余弦；
acot 反余切；　acoth 反双曲余切；　acsc 反余割；
acsch 反双曲余割；　asin 反正弦；　asinh 反双曲正弦；
atan 反正切；　atanh 反双曲正切；　cos 余弦；
cosh 双曲余弦；　cotg 余切；　coth 双曲余切；
sin 正弦；　sinh 双曲正弦；　tan 正切；
tanh 双曲正切；　exp 指数；　log 自然对数；
log10 常用对数；　log2 以 2 为底对数；　sqrt 平方根；

sign 符号函数；　abs 实数绝对值或复数的模；
ceil 向上取整；　fix 向零取整；　floor 向下取整；
round 四舍五入取整；　conj 复共轭；　imag 虚部；
real 实部；　mod 求余；　gcd 最大公因子；
lcm 最小公倍数；　rem 除法的余数．

(2) **统计函数**　[m [,i]] = max(A [,'r'/'c']) A 或其行/列的最大值与其下标；
min 最小值；　mean 平均值；　std 标准差；　sum 求和；
cumsum 累计和；　prod 求积；　cumprod 累计积；
cov 相关矩阵；　conv 卷积和多项式相乘．

5．**多项式、有理矩阵**　x = poly(0,"x") 定义多项式变量；

po2str 转为字符串；

poly(v,"x" [,"flag"]) x 为变量，flag 为 roots/coeff(缺省值 roots)，v 矩阵时为特征多项式，v 向量时为根或系数多项式；

inv_coeff(C[,d [,"name"]]) 生成最高次为 d 的变量为 name 的系数多项式；

+加，-减，* 乘；/ 除；

[Q [,R]] = pdiv(P1,P2) 多项式相除，R 为商，Q 为余；
ldiv 多项式矩阵长除；simp 多项式简化；
coeff 多项式系数；　coffg 多项式矩阵逆；　invr 有理矩阵逆；
degree 多项式阶数；　denom 有理式分子项；
numer 有理式分母项；　horner(P,x) 求多项式值；
roots 求多项式的根；　derivat 有理多项式求导；
determ 矩阵行列式值；　factors 因式分解；　polfact 最小因式；
lcm 最小公倍数；　residu 余量；　systmat 系统矩阵；
pol2des 多项式矩阵转表达式；　pol2str 多项式转为字符串．

6．**应用**

(1) **分析**　fsolve 求零点；　derivative 导数计算；

intg 不定积分；　impl 线性微分方程；　ode 常微分方程；

dasrt 隐式微分方程过零解；　ode _ root 常微分方程根解；
ode _ discrete 离散常微分方程；　odedc 连续离散常微分方程.

（2）**数据拟合**　[p, err] = datafit ([imp,] G [, DG], Z [,W], [contr,] p0 [, algo], [df0, [mem]], [work], [stop], [' in '])　其中 imp 跟踪模式(0 仅错误信息,1 初始和最终报告,2 每次, >2 线性搜索时)；G 目标函数 e = G(p,z)；Z 数据矩阵；w 权重矩阵；　contr 参数约束(' b ' ,binf,bsuo:上、下限)；　p0 参数初始值;stop 控制参数 stop = ' ar ' ,nap, [iter [, epsg [, epsf [, epsx]]]],分别为停止,调用函数最大次数,迭代最大次数,梯度模域值,f 下降域值,x 变化域值; ' in ' 初始化参数保留键值；　p 最优解；err 误差.

（3）**优化**　linpro 线性规划；　leastsq 非线性最小二乘法；optim 非线性优化；

（4）**插值与样条**　interpln 线性插值；　interp 样条插值；splin 样条函数；

7. **绘图**

（1）**绘图参数**　xget 读图形显示方式设定；

xset (choice-name, x1, x2, x3, x4, x5) 图形显示方式设定, choice-name 为字串名,xi 为值. 名有 window(窗口号),background(背景色),foreground(前景色),color(颜色),thickness(线宽),viewport(视点 x,y),wpos(窗口左上点位置),pattern(窗口宽高),clipping(绘图区左上点位置宽高)等；

getcolor 当前色图,色图为 m×3 阵,m 种色由红、绿、蓝 3 基色组成,有 0(黑),8(白),10(蓝),15(鲜绿),21(红),32(深黄)等 32 色；

colormap 应用颜色图；　xtitle 图形标题；　xaxis　轴名标注；
xstring 图中字符；　xsetech 设置小窗口；　subplot 设置多子窗口.

（2）**二维图形**　基本绘图命令为 plot 与 plot2di:

plot(Y) 以向量 Y 的元素值为纵坐标,相应元素下标为横坐标,绘制连线图;

plot(X,Y) X 和 Y 同维时 X 为横坐标、Y 为纵坐标绘连线图,X 向量、Y 是有一维与 x 同维的矩阵时,则以 X 为横坐标绘制多条不同对颜色的连线图,矩阵另一维为曲线数,当 X 未给定时,可用向量(1,size(Y,' * '))代之;

plot(X,Y [,xcap,ycap,caption]) 对 X,Y 绘图,选项为 x,y 坐标及图形标题;

plot2di(X,Y, < opt _ args >) 二维图形,plot2d 分段连线,plot2d2 分段常量,plot2d3 柱形图,plot2d4 箭头图;

< opt _ args > keyj = valuej 序列:style 线型曲线向量,正值表颜色,非值表标注方式绘图,其绝对值为颜色;leg 曲线标题;rect 绘图范围; nax 网线; Logflag 坐标刻度(线性/对数);

Framefiag 框架方式(0 ~ 8); Axesflags 轴类型(0 ~ 5);

champ 二维向量场; chamol 颜色二维向量场;

contour2d 等高线图; errbar 误差范围框线;

grayplot 颜色表面; xgrid 坐标网格线;

matplot 散点图; histplot 统计频数直方图.

(3) 三维图形

plot3d(x,y,z [,theta,alpha,leg,flag,cbox]) 绘制曲面 z = f(x,y),其中 x,y 单调递增 x,y 轴行向量; theta,alpha 视点球坐标(角);leg 坐标轴标题(以@ 分隔); flag = [mode,type,box], mode >0(去除隐含后颜色) =0(绘制隐含) <0(阴影颜色),type = 0(当前比例) 1(用 extreme aspect ratios 自动调节,边界由 ebox 定) 2(同 1,边界由给定数据定) 3(3d 包络盒由 ebox 定) 4(3d 包络盒由给定数据定,与 2 类似) 5(3d 扩展包络盒由 ebox 定) 6(3d 扩展包络盒由给定数据定,与 2 类似),box =0,1(不画包络盒) 2(仅画后轴) 3(绘包络盒,添轴标题) 4((绘包络盒,添轴和标题);

plot3d(x,y,z, <opt_args>)　绘制曲面 z=f(x,y),其中 <opt_args> 与前同. 还可绘制多个曲面,可参看说明;

param3d(x,y,z [,theta,alpha,leg,flag,cbox])　绘制空间曲线,其参数与三维曲面同;

param3d(x,y,list(z,colors) [,theta,alpha,leg,flag,cbox]) 绘制多条空间曲线,x,y,z 为同维矩阵,colors 为曲线颜色;

plot3dl 颜色三维曲面;　　param3dl 空间多曲线;

contour 三维表面等高线图;　　hist3d 三维统计频数直方图;

geom3d　三维向二维投影.

8. **编程**

(1) **表类型**　矩阵内数据为同一类型,list(表)类型元素可含各种数据类型.

l=list(a1,…,an) 创建与插入(a1 是表 l 时为插入);

[x,y,…,z]=l(v) 提取;l(i)=null() 删除;

tlist 字符向量(表头)开始的表;　　mlist 字段名引用的 tlist.

(2) **函数**　函数扩展名为".sci",用 getf 或 exec 加载入内存才能重复使用. 函数定义:

function 输出=函数名(输入参数序列); // 注释;

函数体;

函数亦可在线定义及使用,用 endfunction 表定义结束.

(3) **控制语句**　循环语句

for 循环变量=初值:步长:终值 ;循环体;end;

while 表达式;循环体;end;(表达式为 T 时执行,否则退出)

判断语句　if 表达式;语句序列;end;(表达式为 T 时执行,否则退出)

if 表达式;语句序列 1;else;语句序列 2;end;

select 表达式 0,case 表达式 1　then 语句序列 1,…,case 表达式 n　then 语句序列 n,[else 其他语句序列],end ;判断那个表达式的值与表达式 0 的值相同时执行那个语句序列.

(4) **脚本文件** SCILAB 程序文件为 ASCⅡ编码的脚本文件，扩展名为“.sci”.解释型执行.

调试程序 可用 disp(x1 [,x2,…,xn])和 pause 指令显示和暂停运行,亦可用[…] = retutn(…)带回变量值.调用函数将适进入高一级工作空间,当要在不同空间中使用同一变量时,可在调用函数前声明该变量为“global”变量.who 或 whos 命令可显示标准空间和全局空间中的变量及占用的内存空间.stacksize 重新分配内存.

字串操作 convstr 字母大小转换； emptystr 清空字串；
grep 寻找相同字串； part 字符提取； string 字串转换；
strcat 连接字符； strsubst 字串中字符替换；
code2str SCILAB 数码转字符串； str2code 字串转 SCILAB 数码.

数据转换 excel2sci 读 ASCⅡ格式 Excel 文件；
fun2string 函数生成 ASCⅡ码； pol2tex 多项式转换为 TxX 格式；
texprint 按 TeX 格式输出；
mfile2sci MATLAB 文件转换为 SCILAB 文件；
translatepaths 将子目录下所有 MATLAB 文件转换为 SCILAB 文件.

9. **系统命令** clear 清除内存中变量和函数；
exit 关闭 SCILAB； quit 退出 SCILAB； save 存内存变量；
exec 运行脚本文件； who 列出变量名； what 列出基本命令；
pwd 显示目录； chdir 改变目录； mkdir 创建目录.

10. **输入输出** diary 生成屏幕记录； disp 变量显示；
file 文件管理;input 键盘输入； load 读变量； mclose 关闭文件； mopen 打开文件;mgetl 按行读文件； strartup 启动文件; write 按格式存文件；
temer CPU 计时.

11. **C/FORTRAN 程序接口** 可用动态链接,程序接口或 intersci调用 C 或 FORTRAN 程序.

程序接口 可按 SCILAB/routines/examples/interface - tutorial 及 - tour 中的例子写. Intersci 建立. desc 文件,并刷新 fundef 文件添加新命令.

动态链接 link('path/ * . o ',' * * '[,flag]) 链接目标文件 * . o, * * 为调用名,链接 C 语言程序时 flag =' C ' ,FORTRAN 程序的 flag =' F ' 可缺省. 链接成功返回 0.

ulink 取消链接 .

c _ link(' * * ') 测试链接,链接成功返回 T,没有链接为 F.

[y1 ,··· ,yk] = eall(' * * ' ,x1 ,px1 ," tx1 ,···) 调用链接(长调用),不需程序接口 .

[y1 ,··· ,yk] = eall(' * * ' ,x1 ,··· ,xn) 快速调用,还需写一小程序接口 .

12. **Tcl/Tk 应用** Tcl/Tk 用于建立用户接口界面.

Tcl 基本指令 格式 Command arg1 arg2···, set 变量值(给变量赋值),set 变量 [字符串] (执行字符串指令替代[ ],可嵌套),expr 式 (计算表达式),双引号" " (允许组内替代) 和花括号 {} (不允许组内替代) 用来将单词组合成参数.

控制指令 if boolean [then] body1 else body2;

while booleanExpr body;

for initial test final body;

foreach loopVar valueList commandBody;

Tk 结合指令 TK _ EvaFile(filename) 读取并执行;

SCILABEval str(执行 str);

value = Tk _ GetVar(varname) (取值);

Tk _ SetVar(varname,value) (置值);

13. **SCILAB 主窗口菜单**

[**File**] [文件] New SCILAB 新窗口; Exec··· 执行; Open··· 打开文件; Load···读取文件; Save···存储文件; Change Directory 改变当前目录;

Get Currnt Directory 显示当前目录；

Print Setup… 打印机设置；　　Print 输出到打印机；

Exit 退出 SCILAB.

[**Edit**]　[编辑]；　Select All 全选；　Copy 复制；

Paste　粘贴；Empty Cipboard 清空剪切板；　History 历史记录．

[**Preferences**]　[选择]　Language 语言；　Colors 颜色；

Toolbar 工具条；　　File's Association 文件后缀；

Choose Font 选择字体；　　Clear History 清除历史记录；

Clear Command Window 清除命令窗口；　　Console 控制盘．

[**Control**] [控制]　　Resume 恢复；　　Abort 放弃、取消；

Interrupt 中断．

[**Editor**]　[编辑器].

[**Applications**] [应用]　Scicos　SCILAB 仿真器；

EditGraph　编辑图形窗口；　　m2sci　MATLAB 到 SCILAB；

Browser Variables　浏览变量．

[?]　[遇到问题或困难]

SCILAB Help　　SCILAB 帮助；　　Configure 配置；

SCILAB Demos　SCILAB 演示；

Web Links　　SCILAB 网址连接；　　About　关于．

§2　绘制轨线图貌的改进[48]

§2.1　绘制轨线图貌的存在问题

对具体方程绘制轨线图貌进行分析时要将一定范围的向量场、等倾斜线和多条轨线合并在一个图形上，以方便分析处理. 但在各种数学软件包括 Mathematica、MATLAB 及 SCILAB 中均缺少同时绘制多条轨线的功能（函数），Maple 软件中可同时绘制多条轨线，但又要求各轨线的起始终止时间一致，起始时间可从 0 开

始，但终止时间无法一致．而且不能保证结果在一定范围内，实际上也不很实用，难以应用．

§2.2 绘制轨线图貌函数的改进

本来 SCILAB 中可用如前所述的动态绘图解决同时绘制多条轨线的问题，但又仅能输出保留图形，而无法得到各条轨线的具体初始位置和终止时间，还是有所缺憾．其改进的方法是直接修改 SCILAB 中的动态绘图程序，增加存贮点击确定后的各轨线的初始位置及其终止时间数据供最后输出．修改方法以"？/SCILAB Demos/Simulation/ODE' S/ Lotka-Volterra vector field"为例．在其脚本文件分三处插入几行：

一是在第 40 行循环运行前插入存储轨线最大条数 maxkk 的轨线初始位置 x0，y0 及终止时间 tm 的矩阵 xt0 及轨线号 kk 的定义及初值，并修改循环语句，使当输入的轨线超出定义的轨线最大条数 maxkk 时跳出循环：

```
41  maxkk =5;                  // 存 5 条轨线，可视需要修改
42  xt0 = zeros(maxkk,3);      // 轨线初值及终止时间矩阵 xt0
43  kk =0;                     // 轨线数初始化
45  while ( kk  <  maxkk )     //原循环语句为 while( %t )
```

二是循环体内插入记录点击输入的轨线号及其初始位置 x0，y0 及终止时间 tm：

```
66     kk = kk + 1;            // 轨线号
67     tm = size(t(:));        // 获取终止时间 tm
68     xt0(kk,:) = [x0,y0,tm(1)];
    // 循环体内存轨线初值及终止时间
    // 如要配合后面的新函数 odeg 自动计算
    //终止时间，可取为[x0,y0,0]
```

三是结束运行后显示已存轨线数 maxkk 及轨线初值及终止时间矩阵 xt0

```
72  kk                  // 最后显示已存轨线数
73  xt0(:,1:kk)         // 最后显示轨线初值及终止时间矩阵
```

通过这种方法便能方便地得到动态点击输入的轨线的有关参数.

§2.3 绘制多轨线图貌的新函数

上述方法是在已有的动态绘图脚本文件中进行修改以输出多轨线的初始位置和终止时间.但无法重新运行.彻底的处理是直接建立绘制多轨线图貌的新函数 odeg.新函数为[xt] = odeg('ode',xt0,xy).其中'ode'为定义的方程,xy 为图形绘制范围矩阵[xmin,xmax;ymin,ymax],xt0 为轨线初始位置及终止时间矩阵,和[ξ10.5.3-(3)]中定义的一样,所有轨线起始时间均设为0.当终止时间为0时要求轨线不超出图形绘制范围且终止时间小于100(防止趋于奇点时死循环).输出 xt 为计算出来的不超出图形绘制范围的多轨线的初始位置和终止时间.此时终止时间不为0.新函数调用了SCILAB中的计算常微分方程数值解函数 ode(x0,t0,tn,rtol,atol,f),其中 x0 为初值(矩阵),t0 为初始时间,tn 为终止时间,rtol,atol 为计算精度(取0.001),f 为定义的方程.计算步长取0.05.

odeg 函数脚本

```
//* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
// odeg 绘制平面多轨线图貌函数    [xt] = odeg('ode',xt0,xy)
//       调用 sol = ode(x0,t0,tn,rtol,atol,f) 函数
//* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
function [xt] = odeg(f,xt0,xy)
  [n,m] = size(xt0);
  if m <> 3 then return end;
  y1 = xy(1,1);y2 = xy(2,1);y3 = xy(1,2);y4 = xy(2,2);
```

```
xt = xt0; xy0 = [y1,y2,y3,y4];
rtol = 0.0001; atol = rtol;
for kk = 1:n
   x0 = [xt0(kk,1);xt0(kk,2)];
   t0 = 0;
   tm = xt0(kk,3);
   if tm <> 0 then
      tn = t0:0.05:tm;
      sol = ode(x0,t0,tn,rtol,atol,f);
      plot2d(sol(1,:),sol(2,:),rect = xy0)
   else
      dn = 10;
      tm = dn;
      tn = t0:0.05:tm;
      k = 0;
      y = x0;
      while ((y(1) > y1) & (y(2) > y2) & (y(1) < y3) &...
         (y(2) < y4) & (tm < 100))
         x = ode(y,t0,tn,rtol,atol,f);
         plot2d(x(1,:),x(2,:),rect = xy0)
         t0 = tm;
         tm = tm + dn;
         tn = tm;
         m = size(x(1,:))
         y = [x(1,m(2));x(2,m(2))];
         k = k + 1;
      end;
      xt(kk,3) = tm;
   end;
end;
endfunction
```

* *

§2.4 算例

下面以 Lotka-Volterra 方程为例并调用新函数,其结果如图 1.

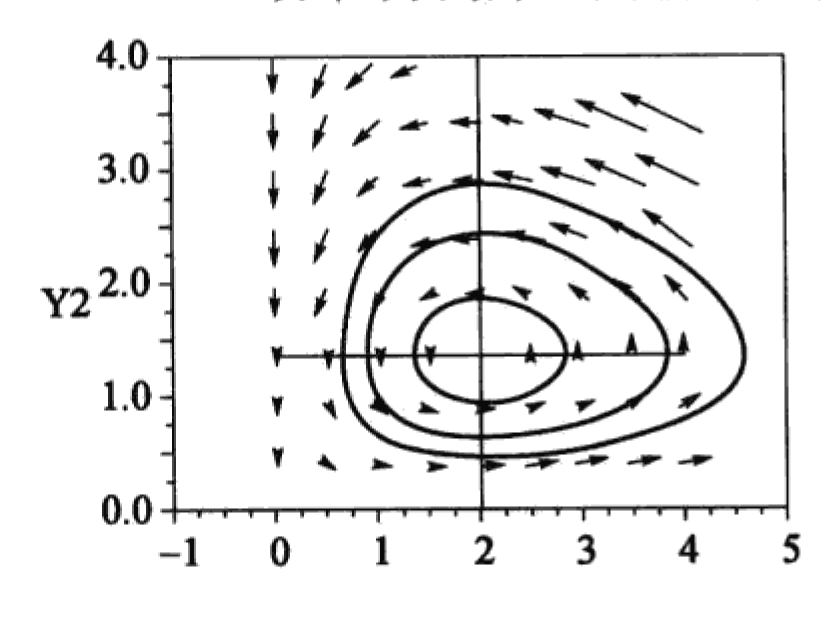


图 1 Lotka-Volterra 方程

```
deff("dy = flv(t,y)",…
    ["dy1 = y(1) * (1 - aa * y(1) - bb * y(2))";…
     "dy2 = y(2) * (cc * y(1) - 2 - dd * y(2))";…
     "dy = [dy1;dy2]"]);
aa = 1; bb = 2; cc = 1; dd = 1;
xmin = 0; xmax = 4; ymin = 0; ymax = 4;
fx = xmin:0.25:xmax; fy = ymin:0.25:ymax;
fchamp(flv,1,fx,fy)        // 绘向量场
xy = [0,4;0,4];
xt0 = [.2,3.8,0;1,3.8,0;2,3.8,0;3.8,3.8,0;3.8,2.5,0;3.8,1,0;3.8,0.
2,0];
show_pixmap();
[xt] = odeg(fct,xt0,xy)
```

如果需要修改数据如缩短某条轨线长度或移动初始位置时可将新 xt 矩阵数据修改后作为 xt0 矩阵代入重算. 亦可以与 [§10.5.3-(3)]中的动态绘图相结合,将动态绘图点击得到的多轨线的初始位置和终止时间 xt0 参数代入新函数 odeg 进行重绘

确认.

以 Van de Pol 方程为例,可通过"Van de Pol vector field"或由"Lotka-Voiterra vector field"如[§10.5.3 -(3)]方式改造的程序,动态绘图得到了初始位置和终止时间(可取为 0)矩阵 xt0,然后定义方程并调用 odeg 函数,其程序如下.结果如图 2.此程序脚本是在动态绘图已取得 xt0 并已调入 odeg 函数后调用或直接输入的.

```
deff("yp = fvdp(t,y)",..
      ["yp1 = y(2)";..
     "yp2 = mu * (1 - y(1)^2) * y(2) - y(1)";..
     "yp = [yp1;yp2]";])
      mu = 3;
xy = [ -3,3; -6,6];
show _ pixmap()
[xt] = odeg(fvdp,xt0,xy)
```

这种绘制轨线图貌的改进程序可推广到其他数学软件 Mathematica、MATLAB 及 Maple,以方便应用.

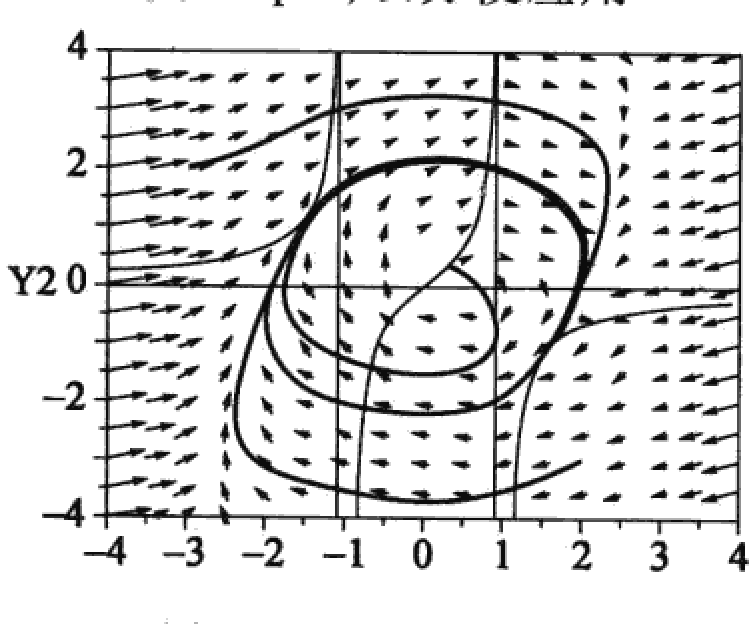


图 2　Van de Pol 方程

附录Ⅱ　解题和建模常用的部分公式

§1　函　　数

§1.1　三角函数（实与复均成立）

1. 定义

正弦　$\sin\theta=\frac{y}{r}=-\sin(-\theta)=\mp\sin(\pi\pm\theta)$

余弦　$\cos\theta=\frac{x}{r}=\cos(-\theta)=-\cos(\pi\pm\theta)$

正切　$\tan\theta=\frac{y}{x}=-\tan(-\theta)=\pm\sin(\pi\pm\theta)$

余切　$\cot\theta=\frac{x}{y}=-\cot(-\theta)=\pm\cot(\pi\pm\theta)$

正割　$\sec\theta=\frac{r}{x}=\sec(-\theta)=-\sec(\pi\pm\theta)$

余割　$\csc\theta=\frac{r}{y}=\csc(-\theta)=\mp\csc(\pi\pm\theta)$

2. 基本关系

$\sin\theta\cdot\csc\theta=1,\cos\theta\cdot\sec\theta=1,\tan\theta\cdot\cot\theta=1$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\sec^2\theta-\tan^2\theta=1,\csc^2\theta-\cot^2\theta=1$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

3. 两角和

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}, \cot(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\cot \alpha \cdot \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$

4. 倍角

$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \dfrac{2\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha = \dfrac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}, \cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2 \alpha - 1}{2\cot \alpha}$

$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha, \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$

$(\cos \alpha + i\sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$

5. 半角

$\sin \dfrac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 - \cos \alpha}{2}}, \cos \dfrac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 + \cos \alpha}{2}}$

$\tan \dfrac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \dfrac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \dfrac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$

$\cot \dfrac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \dfrac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \dfrac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$

6. 和、差、积

$\sin \alpha + \sin \beta = 2\sin \dfrac{\alpha + \beta}{2} \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin \alpha - \sin \beta = 2\cos \dfrac{\alpha + \beta}{2} \sin \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$\cos \alpha + \cos \beta = 2\cos \dfrac{\alpha + \beta}{2} \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$\cos \alpha - \cos \beta = -2\sin \dfrac{\alpha + \beta}{2} \sin \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$$

$$\cot\alpha \pm \cot\beta = \pm\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

$$\tan\alpha \pm \cot\beta = \frac{\cos(\alpha \mp \beta)}{\cos\alpha \cdot \sin\beta}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

§1.2　指数函数

1. 定义

$$\exp z \equiv \mathrm{e}^z \equiv \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

2. 性质

$$(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z,\quad \mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{e}^{z_2}$$

$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x, \mathrm{Arg}\ \mathrm{e}^z = y + 2\pi n(n \in \mathbf{Z}), \mathrm{e}^{z+2n\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z \neq 0$$

§1.3　双曲函数（实与复均成立）

1. 定义

双曲正弦　$\mathrm{sh}\ z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z})$

双曲余弦　$\mathrm{ch}\ z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z})$

双曲正切　$\mathrm{th}\ z = \frac{\mathrm{sh}\ z}{\mathrm{ch}\ z}$

双曲余切　$\mathrm{coth}\ z = \frac{\mathrm{ch}\ z}{\mathrm{sh}\ z}$

双曲正割　$\mathrm{sech}\ z = \frac{1}{\mathrm{ch}\ z}$

双曲余割　$\operatorname{csch} z = \frac{1}{\operatorname{sh} z}$

2. 性质

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \operatorname{sech}^2 x + \operatorname{th}^2 x = 1, \quad \operatorname{coth}^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$

§1.4 泰勒展式(实与复均成立)

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} + \cdots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + \cdots$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n + \cdots$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \cdots$$

$(|z| < 1)$

§1.5 部分分式

1. $\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right)$

2. $\frac{cx+d}{(x+a)(x+b)} = \frac{ca-d}{a-b} \cdot \frac{1}{x+a} - \frac{cb-d}{a-b} \cdot \frac{1}{x+b}$

§2 导数、微分

§2.1 定义

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]' \quad (n=2,3,\cdots)$$

$$\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x$$

§2.2 法则

$$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$$

$$[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \quad (v(x)\neq 0)$$

§2.3 常用函数的导数

$$f(x)=c,x,x^{\mu},a^{x},\mathrm{e}^{x},\log_a x,\ln x,\sin x,\cos x,\tan x,\cot x$$

$$f'(x)=0,1,\mu x^{\mu-1},a^{x}\ln a,\mathrm{e}^{x},\frac{\log_a \mathrm{e}}{x},\frac{1}{x},\cos x,-\sin x,\sec^2 x,-\csc^2 x$$

$$f(x)=\arcsin x,\arccos x,\arctan x,\mathrm{arccot}\, x,\mathrm{arcsec}\, x,\mathrm{arccsc}\, x$$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\frac{1}{1+x^2},-\frac{1}{1+x^2},\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$f(x)=x^{\mu},\quad \ln x,\quad \log_a x$$

$$f^{(n)}(x)=\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}\quad (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{x^n},\quad (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{\ln a}\frac{1}{x^n}$$

$$f(x)=\mathrm{e}^{kx}\quad a^{x},a^{kx},\mathrm{sh}\, x,\mathrm{ch}\, x,\mathrm{th}\, x,\mathrm{coth}\, x$$

$$f^{(n)}(x)=k^n\mathrm{e}^{kx},(\ln a)^n a^{x},(k\ln a)^n a^{kx},\mathrm{ch}\, x\,\mathrm{sh}\, x,\mathrm{ch}^{-2}x,-\mathrm{sh}^{-2}x$$

$$f(x)=\sin x,\quad \cos x,\quad \sin kx,\quad \cos kx$$

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),k^n\sin\left(kx+\frac{n\pi}{2}\right),k^n\cos\left(kx+\frac{n\pi}{2}\right)$$

§2.4 全微分式

$$y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = \mathrm{d}(xy), \quad \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2} = \mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right), \quad \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{xy} = \mathrm{d}\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right)$$

$$\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} = -\mathrm{d}\left(\arctan\frac{y}{x}\right), \quad \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right)$$

§3 不定积分

§3.1 定义

$$F'(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x + C$$

§3.2 性质

1. $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' = f(x), \mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x)\mathrm{d}x$

   $\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$

2. $\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]\mathrm{d}x = c_1\int f_1(x)\mathrm{d}x + c_2\int f_2(x)\mathrm{d}x$

3. $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C, u = u(x)$

   $\Rightarrow \quad \int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = F(u(x)) + C$

4. 分部积分公式 $\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$

广义分部积分公式 $\int uv^{(n+1)}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^{(k)} v^{(n-k)} + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)} v\mathrm{d}x$

§3.3 不定积分式

1. 有理函数

(1) $\int 0\mathrm{d}x = C$

(2) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$

注 为简便计后面将省略任意常数 C.

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|$

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \quad (|x| \neq a)$

(6) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{b}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} - \frac{1}{(n-2)(ax+b)^{n-2}}\right]$

$(n \neq 1,2)$

(7) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax+b)} = -\frac{1}{b}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|$

(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} & (4ac-b^2>0) \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| & (4ac-b^2<0) \end{cases}$$

2. 无理函数

(9) $\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} - a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|\right)$

(10) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right)$

$(|x| \geqslant a)$

(11) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) \quad (|x| < a)$

(12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsh} x$

(13) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

(14) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| \quad (|x| > a)$

(15) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} \quad (|x| < a)$

(16) $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} \quad (|x| < a)$

(17) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}\right|$

(18) $\int (x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

3. 指数、对数函数(对数函数式中 $x>0$)

(19) $\int \mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x}$

(20) $\int x\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{\alpha x-1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{\alpha x}$

(21) $\int x^2\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{\alpha} - \frac{2x}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3}\right)\mathrm{e}^{\alpha x}$

(22) $\int x^n e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} x^n e^{\alpha x} - \frac{n}{\alpha} \int x^{n-1} e^{\alpha x} dx$

(23) $\int \ln x dx = x\ln x - x$

(24) $\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1} dx \quad (n \in \mathbf{N})$

(25) $\int x^m \ln x dx = x^{m+1}\left[\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right] \quad (m \neq -1)$

(26) $\int \frac{(\ln x)^n}{x} dx = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$

(27) $\int \frac{\ln x}{x^m} dx = -\frac{\ln x}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2 x^{m-1}} \quad (m \neq 1)$

4. 双曲函数

(28) $\int \operatorname{sh} \alpha x dx = \frac{1}{\alpha} \operatorname{ch} \alpha x$

(29) $\int \operatorname{ch} \alpha x dx = \frac{1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha x$

(30) $\int \operatorname{th} \alpha x dx = \frac{1}{\alpha} \ln |\operatorname{ch} \alpha x|$

(31) $\int \coth \alpha x dx = \frac{1}{\alpha} \ln |\operatorname{sh} \alpha x|$

(32) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} \alpha x} = \frac{1}{\alpha} \ln \left|\operatorname{th} \frac{\alpha x}{2}\right|$

(33) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} \alpha x} = \frac{2}{\alpha} \arctan e^{\alpha x}$

(34) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 \alpha x} = -\frac{1}{\alpha} \coth \alpha x \quad (x \neq 0)$

(35) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 \alpha x} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{th} \alpha x$

(36) $\int x \operatorname{sh} \alpha x dx = \frac{1}{\alpha} x \operatorname{ch} \alpha x - \frac{1}{\alpha^2} \operatorname{sh} \alpha x$

(37) $\int x\text{ch } \alpha x\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}x\text{sh } \alpha x - \frac{1}{\alpha^2}\text{ch } \alpha x$

5. 三角函数

(38) $\int \sin \alpha x\mathrm{d}x = -\frac{1}{\alpha}\cos \alpha x$

(39) $\int \cos \alpha x\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\sin \alpha x$

(40) $\int \tan \alpha x\mathrm{d}x = -\frac{1}{\alpha}\ln|\cos \alpha x|$

(41) $\int \cot \alpha x\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\ln|\sin \alpha x|$

(42) $\int \sin^n \alpha x\mathrm{d}x = -\frac{\sin^{n-1}\alpha x \cdot \cos \alpha x}{n\alpha} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-1}\alpha x\mathrm{d}x$

(43) $\int \cos^n \alpha x\mathrm{d}x = \frac{\cos^{n-1}\alpha x \cdot \sin \alpha x}{n\alpha} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-1}\alpha x\mathrm{d}x$

(44) $\int x\sin \alpha x\mathrm{d}x = \frac{\sin \alpha x}{\alpha^2} - \frac{x\cos \alpha x}{\alpha}$

(45) $\int x\cos \alpha x\mathrm{d}x = \frac{\cos \alpha x}{\alpha^2} + \frac{x\sin \alpha x}{\alpha}$

(46) $\int x^n\sin \alpha x\mathrm{d}x = -\frac{x^n}{\alpha}\cos \alpha x + \frac{n}{\alpha}\int x^{n-1}\cos \alpha x\mathrm{d}x$

(47) $\int x^n\cos \alpha x\mathrm{d}x = \frac{x^n}{\alpha}\sin \alpha x - \frac{n}{\alpha}\int x^{n-1}\sin \alpha x\mathrm{d}x$

(48) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin \alpha x} = \frac{1}{\alpha}\ln\left|\tan \frac{\alpha x}{2}\right|$

(49) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos \alpha x} = \frac{1}{\alpha}\ln\left|\tan\left(\frac{\alpha x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$

(50) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 \alpha x} = \frac{1}{\alpha}\tan \alpha x \quad \left(x \neq \frac{2n+1}{2}\pi, n \in \mathbf{Z}\right)$

(51) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 \alpha x} = -\frac{1}{\alpha}\cot \alpha x \quad (x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z})$

(52) $\int \frac{dx}{\sin \alpha x \cdot \cos \alpha x} = \frac{1}{\alpha} \ln |\tan \alpha x|$

6. 指数三角函数

(53) $\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$

(54) $\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$

(55) $\int e^{ax} x\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{(a^2 + b^2)^2}[-b(-2a + a^2 x + b^2 x)\cos bx + (-a^2 + b^2 + a^3 x + ab^2 x)\sin bx]$

(56) $\int e^{ax} x\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{(a^2 + b^2)^2}[(-a^2 + b^2 + a^3 x + ab^2 x)\cos bx + b(-2a + a^2 x + b^2 x)\sin bx]$

索　　引

一、排疑解惑

(9) 刚性常微分方程

4. (1) 朗斯基行列式和范德蒙德(Vandermonde)行列式

(2) 算子法与高阶常系数线性方程

(3) 变系数线性微分方程

(4) 二阶线性微分方程

(5) 幂级数方法与解析理论

(6) 特殊函数

(7) 第二类贝塞尔函数及广义贝塞尔方程

(8) 变分法

5. (1) 变系数线性方程组

(2) 矩阵指数 exp($\boldsymbol{A}t$)

(3) 已知 k 个解的降阶

(4) 指数函数待定系数法(欧拉法)

(5) 若尔当(Jordan)标准型

(6) 线性算子的分解

(7) 求基解矩阵的微分方程方法

(8) 拉普拉斯变换

6. (1) 临界情形稳定性

(2) 非线性奇点

(3) 全局图貌

(4) 范德波尔(Van de Pol)方程

(5) 李纳(Lienard)方程极限环证明

(6) 极限环个数、位置与希尔伯特第 16 个问题

*(7) 分支和规范形

*(8) Li - Yorke 定理

*(9) 混沌

*(10) KAM 定理

*(11) 梅利尼科夫方法

*(12) 孤立子

7. (1) 首次积分
   (2) 积分曲面与柯西问题
   (3) 偏微分方程
   (4) 偏微分方程的求解
   (5) 一阶偏微分方程
   (6) 一阶偏微分方程的特征方程
 *(7) 偏微分方程与孤立子、特征值问题及反散射方法
8. (1) 边值问题
   (2) 特征值与特征函数
   (3) 格林函数
   (4) 施图姆 - 刘维尔(Sturm - Liouville)自伴方程
 *(5) 薛定谔(Schrödinger)方程
 *(6) 反散射方法

二、应用实例

1. (1) 几何图形构成的微分方程
   (2) 物理现象产生的微分方程
   (3) 经典力学
   (4) 化学动力学
   (5) 控制系统
   (6) 社会科学
   (7) 生命科学
2. (1) 运动速度与位置
   (2) 物体冷却过程
   (3) 气体混合
   (4) 容器中水流出量
   (5) 放射性衰变
   (6) 群体增长
3. (1) 曲线轨迹

(2) 正交曲线
(3) 圆筒壁传热
*(4) 年代的判断与艺术品防伪
*(5) 技术革新的推广速度
4. (1) 追赶轨迹
(2) 悬链线
(3) 倒置摆与希尔方程
(4) 自由端的弹性梁
*(5) 减振器与陷波器
*(6) 开普勒定律和万有引力定律
*(7) 人造卫星的运行轨道
5. (1) 炮弹的运动轨迹
(2) 药物动力学的房室模型
(3) 糖尿病检测
(4) 兰彻斯特战斗理论
(5) 质点动力学和三体问题
*(6) 刚体运动与陀螺仪
*(7) 飞机的运动
*(8) 电子电路的微分方程
6. (1) 综合国力与经济调整模型
(2) 电子管振动电路
(3) 生态模型
(4) 疾病模型
(5) 价格均衡模型
(6) 植物生长模型
(7) 地中海鲨鱼
*(8) 加拿大山猫循环
*(9) 控制系统的绝对稳定性
*(10) 混沌普遍性实例

7. (1) 人口发展方程
   (2) 交通流
   (3) 流体动力学、伯努利定律和容器小孔液体流
   (4) 电报方程
  *(5) 奇非线性行波方程的常微分方程方法
  *(6) 数学物理方程
8. (1) 导弹跟踪
   (2) 弹性理论与梁的弯曲
   (3) 弹性基础上的梁
   (4) 压杆弯曲的临界力
   (5) 固定端点的弦振动

三、历史与人物

1. (1) 简史(常微分方程)
   (2) 牛顿(I. Newton,1642—1727)
   (3) 欧拉(L. Euler,1707—1783)
   (4) 高斯(C. F. Gauss,1777—1855)
   (5) 黎曼(B. Riemann,1826—1866)
   (6) 希尔伯特(D. Hilbert,1862—1943)
   (7) 沃尔泰拉(V. Volterra,1860—1940)
2. (1) 简史(一阶微分方程)
   (2) 莱布尼茨(G. W. Leibnitz,1646—1716)
   (3) 伯努利(Bernoulli)家族
   (4) 里卡蒂(C. J. F. Riccati,1676—1754)
   (5) 利比(W. F. Libby)
3. (1) 简史(解的存在唯一性、奇解、数值解)
   (2) 利普希茨(R. Lipschtz,1832—1903)
   (3) 皮卡(E. Picard,1856—1941)
   (4) 佩亚诺(G. Peano,1858—1932)

(5) 克莱罗(A. C. Clairaut,1713—1765)
(6) 龙格(C. Runge,1856—1927)
(7) 库塔(M. W. Kutta,1867—1944)
4. (1) 简史(高阶微分方程)
(2) 泰勒(Brook Taylor,1685—1732)
(3) 勒让德(A. M. Legendre,1752—1833)
(4) 贝塞尔(F. W. Bessel,1784—1846)
(5) 阿贝尔(N. H. Abel,1802—1829)
5. (1) 简史(微分方程组)
(2) 拉格朗日(J. L. Lagrange,1736—1813)
(3) 拉普拉斯(P. S. de Laplace,1749—1827)
(4) 哈密顿(W. R. Hamilton,1805—1865)
(5) 若尔当(C. Jordan. 1838—1922)
6. (1) 简史(非线性微分方程)
(2) 庞加莱(J. H. Poincaré,1854—1912)
(3) 李雅普诺夫(A. M. Liapunov,1857—1918)
(4) 伯克霍夫(G. D. Birkhoff,1884—1944)
(5) 李纳(A. Lienard,1869—1958)
(6) 范德波尔(B. Van de Pol,1889—1959)
(7) 斯梅尔马蹄
(8) 洛伦茨吸引子
(9) Li - Yorke 混沌的故事
(10) 日本吸引子
7. (1) 简史(偏微分方程)
(2) 达朗贝尔(J. d'Alembert,1717—1783)
(3) 蒙日(Gaspard Monge,1746—1818)
(4) 柯西(A. - L. Cauchy,1789—1857)
(5) 雅可比(C. G. Jacob,1804—1851)
8. (1) 简史(边值问题)

（2）格林（G. Green，1793—1841）

（3）施图姆（C. —F. Sturm，1803—1855）

（4）刘维尔（J. Liouville，1809—1882）

（5）薛定谔（E. Schrödinger，1887—1961）

四、习题程序

§10.2　Mathematica 程序选

§10.2.1　辅助计算

（1）微分、积分

（2）求行列式、逆矩阵和转置矩阵

（3）求矩阵特征方程、特征值和特征向量　Ex5.3 - 3(2)

（4）求奇点（解方程组）　Ex6.1 - 3(2)

（5）微分方程数值解　Ex3.5 - 1

§10.2.2　辅助判断

（1）恰当方程　Ex2.3 - 1(1)

（2）积分因子　Ex2.3 - 2(5)

（3）里卡蒂方程　Ex2.5 - 5(3)

（4）验证方程组解 Ex5.2 - 8(1)

（5）判断奇点个数和类型　Ex6.1 - 3(3)

§10.2.3　绘图

（1）平面向量场及轨线图貌

（a）Ex6.1 - 1，（b）Ex6.4 - 6(1)

（2）等高线图　Ex6.6 - 2(2)

（3）空间曲线、曲面

（a）Ex6.5 - 4，（b）Ex6.6 - 6

* §10.2.4　微分方程直接求解

（1）一阶微分方程 Ex2.1 - 1(1)

（2）二阶及高阶微分方程

（a）Ex4.1 - 3(3)，（b）Ex4.2 - 2(7)

(3) 微分方程组

(a) Ex5.2 - 8(2), (b) Ex7 - 1(2)

(4) 微分方程近似解和幂级数解

(a) Ex3.1 - 1, (b) Ex4.3 - 2(2)

(5) 矩阵指数、基解矩阵及微分方程组的解

(a) §5.4.1 - 6(3), (b) Ex5.3 - 4(4),

(c) Ex5.3 - 5(3)

(6) 用拉普拉斯变换求微分方程组解　Ex5.3 - 9 - 5(1)

§10.3　MATLAB 程序选

§10.3.1　计算

(1) 矩阵计算 Ex5.3 - 3(4)

(2) 求特征值 Ex6.1 - 4(1)

(3) 求奇点(驻定解),解代数方程组 Ex6.1 - 3(1)

(4) 微分方程数值解 Ex3.5 - 1

§10.3.2　绘图

(1) 平面向量场及轨线图貌

(a) x' = 1 - x^2 - y^2, y' = 2xy,

(b) x' = xy, y' = x^2 - y^4

(2) 等高线图　Ex6.6 - 2(3)

(3) 空间曲线、曲面

(a) Ex6.6 - 2(3), (b) Ex6.5 - 4(c = 13),

(c) Ex6.6 - 6(单孤子图), (d) Ex6.6 - 6(双孤子图)

§10.4　Maple 程序选

§10.4.1　辅助计算

(1) 微分、积分

(2) 求行列式、逆矩阵和转置矩阵

(3) 求矩阵特征方程、特征值和特征向量　Ex5.3 - 3(3)

(4) 求奇点(解方程组)　Ex6.1 - 3(4)

(5) 微分方程数值解 Ex3.5 - 1

§10.4.2 辅助判断

（1）恰当方程 Ex2.3 -1(2)

（2）积分因子 Ex2.3 -2(2)

（3）里卡蒂方程

(a) Ex2.5 -5(2)，(b) Ex2.5 -5(7)

（4）验证方程组解 Ex5.1 -1(1)

（5）判断奇点个数和类型 Ex6.1 -3(2)

§10.4.3 绘图

（1）平面向量场及轨线图貌 Ex6.4 -6(2)

（2）等高线图 Ex6.6 -2(1)

（3）空间曲线、曲面

(a) Ex6.5 -4

* §10.4.4 微分方程直接求解

（1）一阶微分方程 Ex2.1 -2(7)

（2）二阶及高阶微分方程

(a) Ex4.1 -3(2)，(b) Ex4.2 -2(8)

（3）微分方程组

(a) Ex5.2 -9，(b) Ex7 -1(3)

（4）微分方程近似解和幂级数解

(a) Ex3.1 -2， (b) Ex4.3 -2(3)

（5）矩阵指数、基解矩阵及微分方程组的解 Ex5.3 -5(3)

（6）用拉普拉斯变换求微分方程组的解 Ex5.3 -9 -6(2)

（7）解偏微分方程

(a) Ex7 -2(3)，(b) Ex7 -2(9)

§10.5 SCILAB 程序选

§10.5.1 计算

（1）矩阵计算 Ex5.3 -3(1)

（2）求特征值

(a) §6.2.2 -2(1)，(b) §6.2.2 -2(4)，

(c) Ex6.1 -4(1)

(3) 求奇点(驻定解),解代数方程组

(a) Ex6.1 -3(1), (b) Ex6.1 -3(4)

(4) 微分方程数值解 Ex3.5 -1

(5) 微分方程组的直接求解

§10.5.2 绘图

(1) 平面向量场及轨线图貌

(a) Lotka - Volterra 方程, (b) van de Pol 方程

(2) 等高线图 Ex6.2 -1(5)

(3) 空间曲线、曲面

(a) z = x^2 + y^3, (b) Ex6.5 -4

(4) 传递函数方法(时域响应曲线)

§10.5.3 SCILAB Demos(演示)

(1) 演示

(2) 动画显示

(3) 动态绘图

参 考 文 献

[1] 周尚仁,权宏顺.常微分方程习题集.北京:高等教育出版社,1980.

[2] [苏]菲利波夫 A Φ.常微分方程习题集.孙广成,张德厚译.上海:上海科学技术出版社,1981.

[3] [苏]斯米尔诺夫 M M.数学物理方程习题集.孙和生,何善堉译.上海:商务印书馆,1955.

[4] 钱祥征.常微分方程解题方法.长沙:湖南科学技术出版社,1984.

[5] [日]田中静男.微分方程习题详解.杜长春,罗固事译.重庆:重庆出版社,1988.

[6] 庄万.常微分方程习题解.济南:山东科学技术出版社,2006.

[7] [美]艾尔斯.微分方程原理及题解.方世荣译.北京:晓园出版社出版,世界图书出版公司北京公司重印,1993.

[8] [日]矢野健太朗.微分方程式的基本原理及习题详解.张文译.北京:晓园出版社出版,世界图书出版公司北京公司重印,1994.

[9] [美] WILLIAN F. LUCAS.微分方程模型.朱煜民,周宇虹译.长沙:国防科技大学出版社,1988.

[10] [美] WILLIAN F. LUCAS.生命科学模型.翟晓燕,黄振高,许若宁译.长沙:国防科技大学出版社,1996.

[11] [美]卡曼 T V,比奥 M A.工程中的数学方法.高庆琳,赵旭生,吴宜译.北京:科学出版社,1959.

[12] 王树禾. 微分方程模型与混沌. 合肥:中国科技大学出版社, 1999.
[13] 朱思铭,李尚廉. 数学模型. 广州:中山大学出版社,1995.
[14] 潭永基,俞文鮍. 数学模型. 上海:复旦大学出版社, 1997.
[15] 姜启源,谢金星,叶俊. 数学模型(第三版). 北京:高等教育出版社,2003.
[16] 尤秉礼. 常微分方程补充教程. 北京:人民教育出版社,1981.
[17] [美] 塞蒙斯 G F. 微分方程——附应用及历史注记. 张理京译. 北京:人民教育出版社, 1981.
[18] 贺建勋,王志成. 常微分方程(上)(中)(下). 长沙:湖南科学技术出版社,1979.
[19] 丁同仁,李承治. 常微分方程. 北京:高等教育出版社,1985.
[20] 金福临,阮炯,黄振勋. 应用常微分方程. 上海:复旦大学出版社,1991.
[21] [美] HIRSCH M W, SMALE S. 微分方程、动力系统和线性代数. 黄傑,刘世伟译. 北京:高等教育出版社,1987.
[22] [苏] 阿诺尔德 B И. 常微分方程. 沈家骐等译. 北京:科学出版社,1985.
[23] [苏] TNXOHOB A H 等. 微分方程. 张德荣等译. 北京:高等教育出版社,1991.
[24] 胡健伟,汤怀民. 微分方程数值方法. 北京:科学出版社,1999.
[25] 薛兴垣. 数学物理偏微分方程. 合肥:中国科技大学出版社,1995.
[26] 卡姆克 E. 常微分方程手册. 张鸿林译. 北京:科学出版社,1977.
[27] 许淞庆. 常微分方程稳定性理论. 上海:上海科学技术出版

社,1964.

[28] 张芷芬,丁同仁,黄文灶,董镇喜.微分方程定性理论.北京:科学出版社,1985.

[29] 张芷芬,李承治,郑志明,李伟固.向量场的分岔理论基础.北京:高等教育出版社,1995.

[30] 叶彦谦.极限环论.上海:上海科学技术出版社,1984.

[31] 叶彦谦.多项式微分系统定性理论.上海:上海科学技术出版社,1995.

[32] 罗定军,张祥,董梅芳.动力系统的定性与分支理论.北京:科学出版社,2001.

[33] Li J B, Dai H H. On the Study of Singular Nonlinear Traveling Wave Equations: Dynamical System Approach. Beijing: Science Press,2007.

[34] Liu Z R, Wang R Q, Jing Z J. Peaked Wave Solution of Camassa - Holm equation. Chaos Solitons & Fractais, 2004 (19):77 -92.

[35] Putzer E. J. Avoiding the Jordan Canonnical form in the Discussion of Linear Systems with Constant Coefficients. American Mathematical Monthly, 1966,73(1).

[36] 中国大百科全书编辑部.中国大百科全书.数学卷.北京:中国大百科全书出版社,1988.

[37] 日本数学会.数学百科辞典.张鸿林,杨贤英译.北京:科学出版社,1984.

[38] [美] 克莱因 M.古今数学思想(1)-(4).江泽涵,申又枨,邓东皋等译.上海:上海科学技术出版社,1979.

[39] [美] 洛伦茨 E N.混沌的本质.刘式达等译.北京:气象出版社, 1997.

[40] Smale S. Finding a Horseshoe on the Beaches of Rio. The Mathematical Intelligencer, 1998,20(1).见数学译林,在里

约热内卢的海滩上发现了马蹄. 1999(2):114 - 122.

[41] Li T Y and Yorke J A. Period Three Implies Chaos. Amer. Math. Monthly, 1975(82):985 - 992. 见数学译林,周期3蕴含混沌. 1989, 8(3):211 - 218.

[42] 李天岩. 附:关于 Li - Yorke 混沌的故事. 数学译林, 1989, 8(3): 219 - 222.

[43] Ueda Y. Strange Attractors and the Origin of Chaos. Nonlinear Science Today, 1992,2(2):1 - 16. 见数学译林,奇异吸引子和最早的混沌. 1995(2):117 - 136.

[44] 陈式刚. 映象与混沌. 北京:国防工业出版社,1992.

[45] [美] 斯托克 J J. 力学和电学系统中的非线性振动. 谢寿鑫,钱曙复译. 上海:上海科学技术出版社,1963.

[46] 陈关荣,吕金虎. Lorenz 系统族的动力学分析控制与同步. 北京:科学出版社,2003.

[47] 胡包钢,赵星,康孟珍. 科学计算自由软件——SCILAB 教程. 北京:清华大学出版社,2003.

[48] 容志新. 科学计算自由软件 SCILAB 在常微分方程中的应用. 肇庆学院学报,2008(5):27 - 30.

[49] 罗伯特·梅. 生逢其时:逻辑斯谛映射. 见[英]格雷厄姆·法米罗主编的天地有大美——现代科学之伟大方程,吴俊译,冯承天译校,上海:上海世纪出版集团、上海科技教育出版社,2006.